سلسلۂ نصابات علمیۂ جامعۂ عثمانیہ

# تفرقی مساواتیں

مصنفہ


ایچ - ٹی - ایچ - پیاجو ایم - اے ڈی - ایس - سی

پروفیسر ریاضی یونیورسٹی کالج، ناٹنگھم

سابق سینیر اسکالر سینٹ جانز کالج کیمبرج


مترجمہ


محمد نذیر الدین صاحب - ایم - اے

سابق رکن دارالترجمہ جامعۂ عثمانیہ سرکار عالی



۱۳۶۳ھ م ۱۳۵۳ف م ۱۹۴۴ء

# دوسرا باب

## پہلے رتبہ اور پہلے درجہ کی مساواتیں



# تیسرا باب

## مستقل سروں والی خطی مساواتیں

| دفعہ | | صفحہ |
|---|---|---|
| ۲۸ | اعلیٰ ترتیبوں پر توسیع | ۵۰ |
| ۲۹ | متمم تفاعل اور خاص تکملہ | ۵۳ |
| ۳۰-۳۳ | عامل عف کے خواص | ۵۶ |
| ۳۴ | متمم تفاعل جبکہ امدادی مساوات کی اصلیں مساوی ہوں | ۶۰ |
| ۳۵-۳۸ | خاص تکملہ کو معلوم کرنے کے لیے علامتی طریقے۔ آزمائشی طریقے اور ان سے حاصل ہونے والے نتائج کی تصدیق | ۶۳ |
| ۳۹ | متجانس خطی مساوات | ۷۷ |
| ۴۰ | ہمزاد خطی مساواتیں | ۷۹ |
| | تیسرے باب پر متفرق مثالیں (میکانی اور برقی تعبیروں، آزاد اور قسری ارتعاشوں اور گمک پر نوٹس کے ساتھ) | ۸۲ |

# چوتھا باب

## سادہ جزئی تفرقی مساواتیں

| دفعہ | | صفحہ |
|---|---|---|
| ۴۱ | زیر غور مساواتوں کا طبیعی ماخذ | ۹۳ |
| ۴۲-۴۳ | اختیاری تفاعلوں اور مستقلوں کا اسقاط | ۹۵ |
| ۴۴ | جزئی تفرقی مساواتوں میں خاص مشکلیں | ۹۸ |
| ۴۵-۴۶ | خاص حل - ابتدائی اور حدودی شرطیں | ۹۹ |
| ۴۷-۴۸ | فوریر کے نیم سعت سلسلے | ۱۰۴ |
| ۴۹-۵۰ | دیے ہوئے حدودی شرطوں کو پورا کرنے والے حل کی دریافت میں فوریر کے سلسلہ کا اطلاق | ۱۰۹ |
| | چوتھے باب پر متفرق مثالیں (ایصال حرارت، برقی موجوں کے ارسال اور حل شدہ نمکوں کے نفوذ پر نوٹس کے ساتھ) | ۱۱۱ |

# پانچواں باب

## وہ مساواتیں جو رتبہ اول کی ہیں لیکن درجہ اول کی نہیں

| دفعہ | | صفحہ |
|---|---|---|


# چھٹا باب

## نادر حل

# ساتواں باب

## دوسرے اور اس سے اعلیٰ رتبوں کی مساواتوں کے لیے متفرق طریقے



# آٹھواں باب

## تفرقی مساواتوں کے حلوں کے عددی تقرب

# نواں باب

## سلسلوں میں حل۔ فرابینس کا طریقہ

# دسواں باب

## پکرڈ، کوشی، اور فرابینس کے مسائل موجودگی

دفعہ صفحہ



# گیارہواں باب

## تین متغیروں والی معمولی تفرقی مساواتیں اور متناظر منحنی اور سطحیں

| دفعہ | | صفحہ |
| --- | --- | --- |
| ۱۱۶ | مساوات ف فر‌لا + ق فرما + س فری کی ہندسی تعبیر | ۲۶۹ |
| ۱۱۷ | اس مساوات کے تکمل کا طریقہ جبکہ وہ تکمل پذیر ہو | ۲۷۱ |
| ۱۱۸ - ۱۱۹ | وہ ضروری اور کافی شرط کہ ایسی مساوات تکمل پذیر ہو | ۲۷۳ |
| ۱۲۰ | ناتکمل پذیر مساوات کا ہندسی مفہوم | ۲۷۸ |
| | گیارھویں باب پر متفرق مثالیں | ۲۸۴ |

# بارھواں باب

## پہلے رتبہ کی جزئی تفرقی مساواتیں۔مخصوص طریقے

| دفعہ | | صفحہ |
| --- | --- | --- |
| ۱۲۱ - ۱۲۲ | اس باب کی مساواتیں ہندسی دلچسپی کے حامل ہیں | ۲۸۹ |
| ۱۲۳ | لگرانج کی خطی مساوات اور اس کی ہندسی تعبیر | ۲۹۰ |
| ۱۲۴ | عام تکملہ کی تحلیلی تصدیق | ۲۹۴ |
| ۱۲۵ | مخصوص تکملے۔ انہیں حاصل کرنے کے ایم۔ جے۔ ایم۔ ہل کے طریقوں کی مثالیں | ۲۹۶ |
| ۱۲۶ - ۱۲۷ | ن مطبوع متغیروں کی خطی مساوات | ۲۹۸ |
| ۱۲۸ - ۱۲۹ | غیر خطی مساواتیں۔ معیاری شکل (۱) صرف ع اور ق موجود | ۳۰۲ |
| ۱۳۰ | معیاری شکل (۲)۔ صرف ع، ق اور ی موجود | ۳۰۳ |
| ۱۳۱ | معیاری شکل (۳) ف (لا، ع) = فا (ما، ق) | ۳۰۴ |
| ۱۳۲ | معیاری شکل (۴)۔ جزئی تفرقی مساواتیں جو کلیروٹ کی شکل کے مشابہ ہوں | ۳۰۵ |

# تیرہواں باب

## پہلے رتبہ کی جزئی تفرقی مساواتیں عام طریقے



# چودھواں باب

## دوسرے اور اس سے اعلیٰ رتبوں کی جزئی تفرقی مساواتیں

# پندرہواں باب

## متفرق طریقے

| دفعہ | | صفحہ |
|---|---|---|
| ۱۶۶ | حل کا طریقہ جبکہ دو مخصوص تکملے معلوم ہوں۔ | ۴۰۳ |
| ۱۶۷ | حل کا طریقہ جبکہ ایک مخصوص تکملہ معلوم ہو | ۴۰۴ |
| ۱۶۸ | کُل تفرقی مساوات ف فرلا + ق فرما + ر فری = ۰ کو تکمل کرنے کے دو طریقے | ۴۰۹ |
| ۱۶۹ | متجانس مساواتوں کے لیے متکمل جزو ضربی | ۴۱۰ |
| ۱۷۰ | میر کا طریقہ | ۴۱۲ |
| ۱۷۱ | دوسرے رتبہ کی خطی تفرقی مساواتیں | ۴۱۵ |
| ۱۷۲ | باقاعدہ تکملے | ۴۱۶ |
| ۱۷۳ | فوشس کا مسئلہ | ۴۲۰ |
| ۱۷۴ | معمولی اور نادر نقطے | ۴۲۳ |
| ۱۷۵ | فوشی نمونہ کی مساواتیں | ۴۲۵ |
| ۱۷۶ | ممیز نمایندہ | ۴۲۸ |
| ۱۷۷ | طبعی اور تحت طبعی تکملے | ۴۲۹ |
| ۱۷۸ | مرتعش ڈوریوں کی مساوات | ۴۳۶ |
| ۱۷۹ | موج کی مساوات کے خاص حل | ۴۳۷ |
| ۱۸۰ | پوائسن (یا لیویل) کا عام حل | ۴۳۹ |
| ۱۸۱ | ریاضیاتی طبیعیات کی دیگر تفرقی مساواتیں | ۴۴۳ |
| ۱۸۲ | عددی تقریب۔ آڈم کا طریقہ | ۴۴۵ |
| ۱۸۳ | دفعات ۹۰ تا ۹۴ کے طریقہ کی ریس کی توسیع | ۴۵۳ |

## ضمیمہ ۱

| | | |
|---|---|---|
| | وہ ضروری اور کافی شرط کہ مساوات م فرلا + ن فرما = ۰ ٹھیک ہو | ۴۵۵ |

صفحہ

# ضمیمہ ب



# ضمیمہ ج



# ضمیمہ د

# تمہید

سوفس لائی (Sophus Lie) نے کہا ہے کہ تفرقی مساواتوں کا نظریہ ریاضیات جدید کی اہم ترین شاخ ہے۔ یہ مضمون گویا ایک مرکزی محل اختیار کرتا ہے جس سے متعدد سمتوں میں اس کی توسیع کی شاخیں پھیلی ہوئی ہیں۔ اگر ہم اس شاخ پر چلیں جو خالص تحلیلی ہے تو ہم جلد ہی لامتناہی سلسلوں، موجودگی کے مسئلوں، اور تفاعلوں کے نظریہ کی بحث پر پہنچتے ہیں۔ لیکن ایک دوسری شاخ پر چلیں تو منحنیوں اور سطحوں کے تفرقی علم ہندسہ پر آتے ہیں۔ ان دو کے درمیان وہ شاخ ہے جس کو سب سے پہلے سوفس لائی نے دریافت کیا تھا اور وہ استحالہ کے مسلسل گروہوں اور ان کی ہندسی تعبیر پر ختم ہوتی ہے۔ اس سے ہٹ کر دوسری سمت میں تمام قسم کے حیلی اور برقی ارتعاشات اور گھمک کے اہم مظاہر کا علم حاصل ہوتا ہے۔ بعض جزئی تفرقی مساواتوں سے حرارت کے ایصال، برقی موجوں کے انتقال، اور علم طبیعات کی بہت سی دیگر شاخوں کے علم کا آغاز ہوتا ہے۔ طبیعی کیمیا اور کمیتی عمل کا کلیہ بڑی حد تک بعض تفرقی مساواتوں سے متعلق ہے۔

اس کتاب کا مقصد یہ ہے کہ اس مضمون کے مرکزی حصوں کو اس قدر سادہ شکل میں بیان کیا جائے جس قدر ممکن ہے تاکہ وہ طلبا اس سے استفادہ کر سکیں ہو جو اس مضمون سے واقف نہیں ہیں اور ساتھ ہی ان

مختلف سمتوں کی جانب اشارہ کر دیا جائے جس میں اِس مضمون کی توسیع ممکن ہے۔ متن کا بیشتر حصہ اور اِس میں مندرجہ مثالیں بہت آسان ہیں۔ قارئین سے صرف اِس امر کی توقع کی گئی ہے کہ وہ تفرقی اور تکملی احصاء کے مبادی اور کچھ محدد وں کے علم ہندسہ سے واقف ہوں گے۔ ابواب کے ختم پر جو متفرق مثالیں دی گئی ہیں وہ قدرے مشکل ہیں۔ اِنمیں کچھ اہم مسئلے شامل ہیں لیکن اِن کے ساتھ ہی کچھ ایسے اشارے درج کر دئے گئے ہیں جن کی مدد سے ان کو حل کیا جا سکتا ہے۔ اِن میں ہندسی اور طبیعاتی اطلاقات بھی دئے گئے ہیں لیکن سوالوں کے بیان کرنے میں بڑی احتیاط ملحوظ رکھی گئی ہے تاکہ طبیعیات سے واقف ہونے کی ضرورت نہ رہے مثلاً ایک جزئی تفرقی مساوات کو بعض خاص مستقلوں اور متغیروں کی رقوم میں حل کرنے کے لیے کہا گیا ہے۔ اِس کو خالص ریاضی کا سوال سمجھا جا سکتا ہے لیکن اِس کے ساتھ ہی ایک نوٹ درج ہے جس میں یہ بتایا گیا ہے کہ یہ سوال حرارت کے ایک مشہور تجربہ سے متعلق ہے اور اُن مستقلوں اور متغیروں کا کیا مفہوم ہے جو اِس میں استعمال ہوئے ہیں۔ آخر میں کتاب کے ختم پر ۱۱۵ مثالیں بہت مشکل دی گئی ہیں اور اِن میں سے اکثر مختلف جامعات کے امتحانوں کے پرچوں سے لی گئی ہیں۔ [ میں جامعات لندن، شیفیلڈ، اور ویلز اور مطبع جامعہ کیمبرج کے سنڈیکیٹ کا ممنون ہوں کہ اِن مثالوں کے اندراج کی اجازت مجھے دی گئی ]۔ یہ کتاب بی۔ ایس۔ سی (لندن) آنرز یا کیمبرج میتھیمیٹیکل ٹرائی پاس حصۂ دوم کے شیڈیول (A) کے نصاب پر حاوی ہے اور نیز اِس میں کچھ وہ حصہ بھی شامل ہے جو ایم۔ ایس۔ سی (لندن) اور میتھیمیٹیکل ٹرائی پاس شیڈیول (B) کے لیے مطلوب ہوتا ہے۔ ضمیمہ میں زائد مطالعہ کے لیے حوالے درج ہیں۔ حل شدہ یا حل طلب مثالوں کی تعداد بہت زیادہ ہے اور حل طلب مثالوں کے جوابات کتاب کے ختم پر دے دئے گئے ہیں۔

چند اہم امور کا ذکر نامناسب نہ ہوگا۔ پہلے باب میں جو ترسیمی طریقہ بیان کیا گیا ہے [ یہ طریقہ اس مقالہ کے مسودہ پر جو ڈاکٹر براڈ ٹسکی نے ازراہ مہربانی مجھے مستعار عنایت کیا تھا اور جس کو انہوں نے میتھیمیاٹیکل ایسوسی ایشن کے سامنے پڑھ کر سنایا تھا اور پروفیسر ٹیکو واڈیا کے ایک ایسے ہی مقالہ پر مبنی ہے ] اس سے پہلے کسی کتاب میں شائع نہیں ہوا۔ وہ باب جس میں عددی تکمل کے مضمون پر بحث کی گئی ہے معمول سے زیادہ تفصیلی بحث کا حامل ہے۔ اس میں خاص کر رنج اور ریکرڈ کے طریقوں پر بحث کی گئی ہے لیکن ایک نیا طریقہ بھی جس کو میں نے وضع کیا ہے بیان کر دیا گیا ہے۔

مستقل سروں والی خطی تفرقی مساواتوں پر جو باب ہے اس میں ایسے غیر اطمنان بخش ثبوتوں سے اجتناب کیا گیا ہے جنھیں "لامتناہی مستقل" شامل ہوتے ہیں۔ اس میں یہ بھی بتایا گیا ہے کہ خاص تکملوں کے دریافت کرنے میں عامل عف کا استعمال اُس سے زیادہ توجہ کا محتاج ہے جو اب تک اسے دیجاتی رہی ہے۔ اس باب میں جو طریقہ اختیار کیا گیا ہے وہ یہ ہے کہ اس عامل کو ایک جبری علامت کے طور پر بلا خوف استعمال کر کے ایک نتیجہ حاصل کیا گیا ہے اور اس کی تصدیق راست تفرق سے کی گئی ہے۔

اس کے بعد وہ باب آتا ہے جس میں سادہ جزئی تفرقی مساواتوں پر بحث کی گئی ہے [ اس کا انحصار ریمن کی کتاب "Partielle Differential-gleichungen" ... پر ہے ]۔ اس میں جو طریقے درج ہیں وہ صریحاً پچھلے باب کے طریقوں کی توسیعات ہیں اور ان کی طبیعاتی اہمیت اتنی زیادہ ہے کہ ان کو کسی آیندہ باب پر منحصر رکھنا مناسب نہ تھا۔

اُن حصوں میں جن میں لگرانج کی خطی جزئی تفرقی مساواتوں سے بحث کی گئی ہے ایم۔ جے۔ ایم ہل کے حالیہ مقالہ سے دو

مثالیں ہی گئی ہیں جن سے موصوف کے اُن طریقوں کی توضیح ہوتی ہے جو خاص تکملوں کے حصول کے لئے استعمال کئے گئے ہیں۔
سلسلوں میں جو حل حاصل کئے گئے ہیں اُن میں فرابنیس کے طریقہ کو سب سے زیادہ اہمیت دی گئی ہے۔ مثالوں کو حل کرکے اِس طریقہ کو سمجھانے میں پورا ایک باب وقف کیا گیا ہے۔ اِس کے بعد ایک بہت مشکل باب آتا ہے جس میں اُن مفروضات کو صحیح ثابت کیا گیا ہے جو اول الذکر باب میں مان لیے گئے ہیں اور نیز استدقاق کے مشکل مسئلوں پر بحث کی گئی ہے۔ اِس میں اِس امر کی کوشش کی گئی ہے کہ جو مشکل پیدا ہوتی ہے اور پیچیدہ ثبوتوں کے عام تخیلات کو بہت صاف صاف واضح طور پر بیان کیا جائے۔ یہ عام تجربہ کی بات ہے کہ جب ایک طول طویل حرفی ثبوت سے طالب علم دوچار ہوتا ہے تو وہ تفصیلات سے اِسقدر پریشان ہوجاتا ہے کہ اِس کو عام نظریہ کا بہت کم اندازہ ہوتا ہے۔ اِس باب کی تیاری میں مسٹر ایس پولرڈ بی۔ اے ٹرنیٹی کالج کیمبرج نے جو مدد کی ہے اِس کا میں شکر گذار ہوں۔
یہ باب اِس کتاب کا وہ حصہ ہے جو اعلیٰ ریاضیات سے متعلق ہے اور اِس کے سمجھنے کے لیئے لامتناہی سلسلوں سے واقف ہونے کی ضرورت ہے۔ جہاں کہیں ایسے مسئلے استعمال ہوئے ہیں وہاں اُن معیاری کتابوں کا حوالہ دیا گیا ہے جن میں یہ مسائل مِل سکتے ہیں۔
میں پروفیسر ڈبلیو۔ پی۔ ملن جنرل ایڈیٹر بلیس متھیمیٹیکل سیریز کا اِن کی مسلسل ہمت افزائی اور تنقید کے لئے اور مسٹر جے۔ مارشل ایم۔ اے، بی۔ ایس۔ سی اور مس ایچ۔ ایم۔ براوننگ ایم۔ ایس۔ سی کا اِن کے اُس کام کے لیے جو انھوں نے مثالوں کی تصدیق اور شکلوں کے کھینچنے میں کیا ہے بہت ممنون اور شکر گذار ہوں۔
کوئی تصحیح یا مشورہ بڑی ممنونیت کے ساتھ قبول کیا جائیگا۔

ایچ۔ ٹی۔ ایچ۔ پیاجو
یونیورسٹی کالج ناٹنگھم فروری ۱۹۲۰ء

۲۸۶

# سنہ ۱۹۲۸ء
# تمہید اڈیشن

اس اڈیشن میں ایک طویل نئے باب کا اضافہ کیا گیا ہے جس کی نوعیت ایک ضمیمہ کی سی ہے، اس میں اُن مشکلوں سے جو نادر حلوں کے نظریہ میں پیش آتی ہیں بحث کی گئی ہے، اور ممیزوں کے طریقوں کو اماطوں (Loci) کے طور پر پیش کیا گیا ہے جس سے بہت کم لوگ واقف ہیں، نیز ریکٹی کی مساوات، کلی تفرقی مساواتوں کے لیے دو زائد طریقے (میئر کا عام طریقہ اور متجانس مساواتوں کے لیے متکمل جزو ضربی کا استعمال)، دوسرے رتبہ کی خطی تفرقی مساواتوں کے حل سلسلوں میں (فوک کا مسئلہ، معمولی اور نادر نقطے، فوکی نمونہ کی مساواتیں ممیزنما، طبعی اور تحت طبعی تکملے ریاضیاتی طبیعیات کی چند مساواتیں (بالخصوص مرتعش ڈوریوں کی مساوات اور موجوں کی تین بعدی مساوات) اور تقریبی عددی حل (آدم کا طریقہ اور رمس کی حالیہ تحقیق) بھی بیان کئے گئے ہیں۔ کتاب کے دوسرے حصوں کی نظرثانی کیگئی اور چند زائد مثالوں کا اضافہ کیا گیا ہے۔ جوابوں کو جہاں ضرورت محسوس ہوئی بدل دیا گیا ہے۔

میں اپنے متعدد احباب کا اُن کے قیمتی مشوروں اور مدد کے لیے ممنون ہوں اُن میں خاص طور پر مسٹر ایچ۔ بی۔ میچل سابق پروفیسر جامعہ کولمبیا پروفیسر ای۔ ایچ نیوویلی جامعہ ریڈنگ اور مسٹر ای۔ ایف انڈرووڈ قابل ذکر ہیں۔

مئی سنہ ۱۹۲۸ء — ایچ۔ ٹی۔ ایچ پیاجو

۴۸۶

# تاریخی تعارف

تفرقی اور تکملی احصا کی ایجاد کے بعد بہت جلد تفرقی مساوات کے علم کا آغاز ہوا جو صریحاً تفرقی اور تکملی احصا سے متعلق ہے۔ نیوٹن نے ۱۶۶۵ء میں تفرقی احصا کی (Fluxional) شکل کا انکشاف کیا اور اس کے گیارہ سال بعد ہی اس نے ۱۶۷۶ء میں ایک تفرقی مساوات کو ایک لامتناہی سلسلہ کے استعمال سے حل کیا۔ لیکن یہ نتیجے ۱۶۹۳ء تک شائع نہیں ہوئے اور یہ سنہ وہی ہے جس میں لیب نیز کی تصنیف شائع ہوئی میں ایک تفرقی مساوات کا ذکر کیا گیا ہے (لیب نیز نے ۱۶۸۴ء جس میں تفرقی احصا پر ایک مضمون لکھا تھا)۔

اس کے بعد چند سال کے اندر ہی بڑی سرعت سے ترقی ہوئی۔ ۱۶۹۴ء تا ۱۶۹۷ء میں برنولی نے "متغیروں کو جدا کرنے" کے طریقہ کی توضیح کی اور یہ بتایا کہ پہلے رتبہ کی ایک متجانس تفرقی مساوات ایک ایسی مساوات میں تحویل کی جاسکتی ہے جس میں متغیر جدائی پذیر ہوتے ہیں۔ اس نے ان طریقوں کو قائم مرماہ پر استعمال کیا۔ وہ اور اس کا بھائی جیکب (جس کے نام پر "برنولی کی مساوات" مشہور ہے) بہت سی تفرقی مساواتوں کو ایسی شکلوں میں تحویل کرنے میں کامیاب ہوئے جن کو وہ حل کر سکتے تھے۔ مکمل اجزائے ضربی کو

غالباً یولر نے ۱۷۳۴ء میں اور (جداگانہ طور پر) فونٹین اور کلیرو نے دریافت کیا اگرچہ بعض محقق کہتے ہیں کہ اِن کا اِنکشاف لیب نیز نے کیا تھا۔ نادر حل جن کا علم لیب نیز کو ۱۶۹۴ء میں اور بروک ٹیلر کو ۱۷۱۵ء میں ہوا بالعموم کلیرو (۱۷۳۴ء) کے نام سے منسوب کئے جاتے ہیں۔ لیب نیز نے اِن کی ہندسی تعبیر ۱۷۷۴ء میں بیان کی لیکن وہ نظریہ جو موجودہ شکل میں ہے اِس کے بہت بعد ۱۸۷۲ء میں کیلے نے اور ۱۸۸۸ء میں ایم۔ جے۔ ایم ہل نے بیان کیا۔

مستقل سروں والی دوسرے اور اِس سے اعلیٰ رتبہ کی تفرقی مساواتوں کو حل کرنے کے طریقے یولر سے منسوب ہیں۔ ڈلمبرٹ نے وہ صورت حل کی جن میں امدادی مساوات کی اصلیں مساوی ہوتی ہیں۔ خاص تکملہ کو معلوم کرنے کے علامتی طریقے تقریباً ایک صدی بعد لوبیاٹو نے ۱۸۳۷ء میں اور بُول نے ۱۸۵۹ء میں بیان کئے۔

پہلی جزئی تفرقی مساوات جس کا علم ہوا وہ تھی جس سے ایک مرتعش ڈوری کی شکل حاصل ہوئی ہے۔ اِس مساوات پر جو دوسرے رتبہ کی ہے یولر اور ڈلمبرٹ نے ۱۷۴۷ء میں بحث کی۔ لگرانج نے اِس مساوات کے حل کی تکمیل کی اور نیز اُن مقالوں میں جو ۱۷۷۲ء سے ۱۷۸۵ء تک اُس نے لکھے پہلے رتبہ کی تفرقی مساواتوں پر بحث کی گئی ہے۔ اُس نے خطی مساوات کا عام تکملہ معلوم کیا اور ممکن تکملوں کی مختلف قسموں کو دریافت کیا جبکہ مساوات خطی نہ ہو۔

یہ نظرئے تا حال نامکمل ہیں۔ کرسٹل نے ۱۸۹۲ء میں اور ہل نے ۱۹۱۷ء میں اِس مضمون میں کچھ اضافہ کیا ہے۔ پہلے رتبہ کی جزئی تفرقی مساواتوں کو حل کرنے کے دوسرے طریقے چارپی (۱۷۸۴ء) اور جیکوبی (۱۸۳۶ء) نے بیان کئے۔ اِس سے اعلیٰ رتبہ کی

مساواتوں کے لیے اہم ترین تحقیقاتیں لاپلاس (۱۷۷۳ء)، موُنگے (۱۷۸۴ء)، امپیر (۱۸۱۴ء) اور ڈاربو (۱۸۷۰ء) نے کی ہیں۔

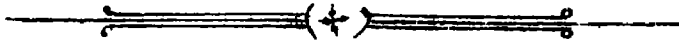
تقریباً ۱۸۲۰ء تک تفرقی مساواتوں کا مضمون اپنی ابتدائی شکل میں یعنے ایک ایسی شکل میں حل معلوم کرنا جس میں معلومہ تفاعلوں (یا اِن کے تکملوں) کی صرف ایک محدود تعداد شامل ہو بہت کچھ اُسی حالت میں تھا جس میں وہ آج ہے۔ اولاً علمائے ریاضی کو یہ اُمید تھی کہ ہر تفرقی مساوات کو اِس طریقہ پر حل کیا جا سکتا ہے لیکن اِن کی کوششیں بے نتیجہ ثابت ہوئیں جس طرح کہ متقدمین پانچویں یا اِس سے اعلیٰ درجہ کی عام جبری مساوات کو حل کرنے میں ناکام ہوئے تھے۔ یہ مضمون اب بدل گیا ہے اور تفاعلوں کے نظریہ سے بہت قریب ہوگیا ہے۔ کوشی نے ۱۸۲۳ء میں یہ ثابت کیا کہ وہ لامتناہی سلسلہ جو ایک تفرقی مساوات سے حاصل ہوتا ہے مستدق ہوتا ہے اور اِس طرح اُس نے حقیقت میں ایک ایسے تفاعل کی تعریف کی جو تفرقی مساوات کو پورا کرتا ہے۔ تفرقی مساواتوں کے مطالعہ کے اِس دوسرے دور کی تحقیقاتوں میں استدقاق کے سوالوں (کوشی نے سب سے پہلے استدقاق کی شرطیں بیان کیں) پر بڑی توجہ کی گئی ہے۔ بدقسمتی سے اِس کی وجہ سے یہ مضمون بہت نظری اور طالب علم کے لیے بہت مشکل ہوجاتا ہے۔ پہلے دور میں مساواتیں نہ صرف خود سادہ تر تھیں بلکہ اِن کا مطالعہ علم حیل اور طبیعات کے سوالوں کے سلسلہ میں کیا جاتا تھا اور حقیقت یہ ہے کہ اِس کام کے آغاز کی وجہ یہی علوم تھے۔

کوشی کی تحقیقاتوں کو برائے اور بوکو (۱۸۵۶ء) نے جاری رکھا اور ایک نیا طریقہ یعنے "متواتر تقربات" کا پکرڈ (۱۸۹۰ء) نے ایجاد کیا۔ فکس (۱۸۶۶ء) اور فرابنیس (۱۸۷۳ء) نے متغیر سروں والی دوسرے اور اعلیٰ رتبہ کی خطی مساواتوں کی تحقیق کی۔ مسلسل گروہ سے

لائی کے نظریہ سے (۱۸۸۴ء سے) بظاہر غیر متعلق طریقوں میں ربط و اتحاد کا انکشاف ہوا۔ شارز، لین، اور گرسے نے اپنے کام کو ترسیمی طریقوں کی امداد سے آسان تر کر دیا اور رواڈیا (۱۹۱۰ء) کے حالیہ مقالہ میں پکرڈ اور پوائنکارے کے نتیجوں کی ترسیمی تعبیر درج ہے۔ رُنجے اور دیگر علما نے عددی تقربات سے بحث کی ہے۔

دیگر تاریخی حوالے کتاب میں جہاں اس کی ضرورت معلوم ہوئی بیان کر دیے گئے ہیں۔ اس سے زیادہ تفصیلی معلومات راوز بال کی کتاب شارٹ ہسٹری آف میتھیمیٹکس میں ملیں گی۔

$\frac{٧٨٦}{٢٩٢}$

(١)

# تفرقی مساواتیں

## پہلا باب

### تمہید اور تعریفات ـ اسقاط ـ ترسیمی تعبیر

۱ ـــ نمونوں

$$\frac{\text{ف}^{٢}\text{ما}}{\text{فلا}^{٢}} = -\text{ف}^{٢}\text{ما} \text{،} \quad \ldots\ldots\ldots (١)$$

$$\frac{\text{ف}^{٣}\text{ما}}{\text{فلا}^{٣}} + ٣\frac{\text{ف}^{٢}\text{ما}}{\text{فلا}^{٢}} + \frac{\text{فما}}{\text{فلا}} - ١٠\text{ما} = \text{قو}^{٣\text{لا}}\,\text{جب}\,٥\text{لا} \text{،} \quad \ldots\ldots\ldots (٢)$$

$$\left[١ + \left(\frac{\text{فما}}{\text{فلا}}\right)^{٢}\right]^{\frac{٣}{٢}} = ٣\frac{\text{ف}^{٢}\text{ما}}{\text{فلا}^{٢}} \text{،} \quad \ldots\ldots (٣)$$

$$\frac{\text{فما}}{\text{فلا}} = \frac{\text{لا}^{\frac{١}{٢}}}{\text{ما}^{\frac{١}{٣}}\,(١ + \text{لا}^{\frac{١}{٣}})} \text{،} \quad \ldots\ldots\ldots (٤)$$

$$\frac{\text{جف}^{٢}\text{ما}}{\text{جف ت}^{٢}} = \text{د}^{٢}\frac{\text{جف}^{٢}\text{ما}}{\text{جف لا}^{٢}} \text{،} \quad \ldots\ldots\ldots (٥)$$

کی مساواتیں جن میں تفرقی سر شامل ہوں **تفرقی مساواتیں** کہلاتی ہیں۔

**۲ —** جبر و مقابلہ، علم ہندسہ، علم الحیل، طبیعیات اور کیمیا کے متعدد مسئلوں سے تفرقی مساواتیں پیدا ہوتی ہیں۔ اِن کی مثالیں اِس کتاب کے مختلف مقاموں پر دی جائیں گی اور ان مثالوں میں استقاط، تماس، انحناء، لفافت، حیلی نظاموں کے اور برقی رؤوں کے اہتزاز، شہتیروں کا خماؤ، حرارت کا ایصال، محلولوں کا نفوذ، کیمیائی تعاملوں کی رفتار وغیرہ پر اطلاق شامل ہوں گے۔

**۳ — تعریفیں** — وہ تفرقی مساواتیں جن میں صرف ایک غیر تابع (مجہول) متغیر[1] شامل ہو مثلاً (۱)، (۲)، (۳) اور (۴) **معمولی تفرقی مساواتیں** کہلاتی ہیں۔

وہ تفرقی مساواتیں جن میں دو یا دو سے زیادہ غیر تابع متغیر اور اِن کے لحاظ سے جزئی تفرقی سر شامل ہوتے ہیں مثلاً (۵) **جزئی تفرقی مساواتیں** کہلاتی ہیں۔

(۲) نمونہ (۱) جیسی مساوات جس میں دوسرا تفرقی سر شامل ہو اور اِس سے اعلیٰ رتبہ کے تفرقی سر شامل نہ ہوں **دوسرے رتبہ کی تفرقی مساوات** کہلاتی ہے۔ مساوات (۴) پہلے رتبہ کی ہے، (۳) اور (۵) دوسرے رتبہ کی ہیں، اور (۲) تیسرے رتبہ کی ہے۔

مساوات کا درجہ وہی ہوتا ہے جو اِس میں شامل ہونیوالے اعلیٰ ترین تفرقی سر کا ہے جبکہ مساوات کو تفرقی سروں کے لحاظ سے منطق اور صحیح بنا لیا گیا ہو۔ چنانچہ مساواتیں (۱)، (۲)، (۴)، اور (۵) پہلے درجہ کی ہیں۔

(۳) کو منطق بنانے کے لیے اِس کا مربع لینا ہوگا۔ چنانچہ

---

[1] مساواتوں (۱)، (۲)، (۳)، (۴) میں لا غیر تابع متغیر اور ما تابع متغیر ہے۔ مساوات (۵) میں لا اور ت دو غیر تابع متغیر اور ما تابع متغیر ہیں۔

اِس کے بعد معلوم ہوگا کہ وہ دوسرے درجہ کی ہے کیونکہ اِس میں

$\left(\frac{\text{فر}^2\text{ ما}}{\text{فر لا}^2}\right)$ کا مُربع شامل ہے ۔

درجہ کی اِس تعریف سے لا یا ما کا منطق یا صحیح شکل میں واقع ہونا ضروری نہیں ہے ۔

دوسری تعریفیں حسب موقع اور ضرورت بیان کیجائیں گی۔

## ۴ ۔ اسقاط کے ذریعہ تفرقی مساواتوں کی ساخت ۔

اب ہم اسقاط کے مسئلہ پر غور کریں گے کیونکہ اِس سے یہ اندازہ ہوگا کہ تفرقی مساوات کا حل کس قسم کا ہوا کرتا ہے ۔

ذیل میں چند مثالیں دیجاتی ہیں جن میں اختیاری مستقلوں کو ساقط کرکے معمولی تفرقی مساواتیں حاصل کی گئی ہیں ۔ آئندہ (چوتھے باب میں) چلکر ہم دیکھیں گے کہ جزئی تفرقی مساواتوں کو اختیاری مستقلوں کے یا اختیاری تفاعلوں کے اسقاط سے کس طرح بنایا جاسکتا ہے ۔

## ۵ ۔ حل طلب مثالیں ۔

(۱) سادہ موسیقی حرکت کی مساوات لا = ا جم (ف ت ـ عہ) پر غور کرو ۔ ہم اختیاری مستقلوں ا اور عہ کو ساقط کرینگے ۔

تفرق کرنے پر، $\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}}$ = ـ ف ا جب (ف ت ـ عہ)

اور $\frac{\text{فر}^2\text{ لا}}{\text{فر ت}^2}$ = ـ ف$^2$ ا جم (ف ت ـ عہ) = ـ ف$^2$ لا

اِس لیے مطلوبہ نتیجہ $\frac{\text{فر}^2\text{ لا}}{\text{فر ت}^2}$ = ـ ف$^2$ لا ہے جو دوسرے رتبہ کی

ایک مساوات ہے۔ اِس کی تعبیر یہ ہے کہ اسراع ایسے بدلتا ہے جیسے مبداء سے فاصلہ۔

(۲) اِس آخری نتیجہ سے ف کو ساقط کرو۔

پھر تفرق کرنے پر، $\frac{\text{فر}^{۳}\text{لا}}{\text{فرت}^{۳}} = -\text{ف}^{۲}\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}$

$$\therefore \quad \frac{\frac{\text{فر}^{۳}\text{لا}}{\text{فرت}^{۳}}}{\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}} = -\text{ف}^{۲} = \frac{\frac{\text{فر}^{۲}\text{لا}}{\text{فرت}^{۲}}}{\text{لا}}$$

، (آخری نتیجہ کی رو سے)

پس ضرب دینے پر، $\text{لا} \times \frac{\text{فر}^{۳}\text{لا}}{\text{فرت}^{۳}} = \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} \times \frac{\text{فر}^{۲}\text{لا}}{\text{فرت}^{۲}}$

جو تیسرے رتبہ کی مساوات ہے۔

(۳) اُن تمام مکافیوں کی تفرقی مساوات حاصل کرو جن کا محور محور لا ہو۔ (۳)

ایسے کسی مکافی کی مساوات کی شکل

$$\text{ما}^{۲} = ۴\,\text{ا}\,(\text{لا} - \text{ھ})$$

ہوگی۔ دو بار تفرق کرنے پر حاصل ہوگا

$$۲\,\text{ما}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = ۴\,\text{ا}$$

یعنی $\text{ما}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = ۲\,\text{ا}$

اور $\text{ما}\,\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}} + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^{۲} = ۰$ جو دوسرے رتبہ کی مساوات ہے۔

## مثالیں

حسب ذیل مساواتوں سے اختیاری مستقلوں کو ساقط کرو:

(۱) $\text{ما} = \text{ا}\,\text{قو}^{\text{۲لا}} + \text{ب}\,\text{قو}^{-\text{۲لا}}$، (۲) $\text{ما} = \text{ا جم ۳لا} + \text{ب جب ۳لا}$،

(۳) $\text{ما} = \text{ا}\,\text{قو}^{\text{ب لا}}$، (۴) $\text{ما} = \text{ا لا} + \text{ا}^{۳}$

(۵) اگر $\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲} = \text{ر}^{۲}$ تو ثابت کرو کہ $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = -\frac{\text{لا}}{\text{ما}}$، نیز اِس نتیجہ کی ہندسی تعبیر بیان کرو۔

(۶) ثابت کرو کہ مبداء میں سے گذرنیوالے کسی خطِ مستقیم کے لیے $\frac{\text{ما}}{\text{لا}} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$۔ اِس کی تعبیر بیان کرو۔

(۷) ثابت کرو کہ خواہ کوئی خطِ مستقیم ہو اُس کے لیے $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}} = ۰$۔ اِس کی تعبیر بیان کرو۔

## ۶ — ن اختیاری مستقلوں کو ساقط کرنے کے لیے (بالعموم) ن ویں رتبہ کی ایک تفرقی مساوات ضروری ہوتی ہے۔

طالب علم دفعہ ۵ کی مثالوں سے اس نتیجہ پر پہنچ چکا ہوگا۔ اگر ہم ایک مساوات کو جس میں ن اختیاری مستقل ہوں ن دفعہ تفرق کریں تو کل (ن + ۱) مساواتیں حاصل ہونگی اور اِن سے ن مستقل مقداروں کو ساقط کیا جا سکتا ہے۔ چونکہ نتیجہ میں ن واں تفرقی سر شامل ہوتا ہے اس لیے اِس کا رتبہ ن ہے[1]۔

---

سلہ یہ استدلال وہی ہے جو عام طور پر دیا جاتا ہے لیکن اعلیٰ ریاضی کے طالب علم کو اِس استدلال میں چند خامیاں نظر آئیں گی۔ یہ بیان کہ کسی (ن + ۱) مساواتوں سے ن مقداروں کو ساقط کیا جا سکتا ہے خواہ اِن مساواتوں کی نوعیت کچھ ہی ہو

(۴) ۔۷ ۔ ن ویں رتبہ کی معمولی تفرقی مساوات کے عام سے عام حل میں ن اختیاری مستقل شامل ہوتے ہیں ۔

یہ غالباً اوپر کے مسئلے کے عکس سے جو یہ ہے کہ ن اختیاری مستقلوں کو ن ویں رتبہ کی ایک تفرقی مساوات سے بالعموم ساقط کیا جا سکتا ہے بالکل واضح نظر آئے لیکن اسکا باقاعدہ ثبوت آسان نہیں ہے۔
تاہم اگر یہ مان لیا جائے[۱] کہ تفرقی مساوات کا حل ایسا ہے کہ

بقیہ صفحہ گذشتہ ۔ بہت عام ہے ۔ ضروری اور کافی شرطوں کا ٹھیک ٹھیک بیان بہت ہی پیچیدہ ہے ۔
بعض اوقات (ن + ۱) سے کم مساواتوں کی ضرورت پڑتی ہے ۔
ایک صریح مثال مساوات ما = (ا + ب) لا کی ہے جہاں دو اختیاری مستقل اس طریقہ پر واقع ہیں کہ وہ فی الحقیقت ایک مستقل مقدار کے مماثل ہیں ۔
دوسری مثال $ما^2 = ۲$ ( ا لا ما + ب $لا^2$ ) ہے جو اسقدر صریح نہیں ہے ۔
یہ مساوات دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے جو مبداء میں سے گذرتے ہیں فرض کرو کہ یہ خطوطِ مستقیم ما = $م_۱$ لا اور ما = $م_۲$ لا ہیں ۔ ان میں سے ہر مساوات سے نتیجۃً $\frac{ما}{لا} = \frac{فر ما}{فر لا}$ حاصل ہوتا ہے جو دوسرے رتبہ کی بجائے پہلے رتبہ کا ہے ۔ ابتدائی مساوات کو تفرق کرکے اور ب کو ساقط کرکے طالب علم اس نتیجہ کو حاصل کر سکتا ہے چنانچہ اس طرح حاصل ہوگا

$$\left(ما - لا \frac{فر ما}{فر لا}\right)(ما - ا لا) = ۰$$

[۱] آئندہ بابوں میں طالب علم کو معلوم ہو جائیگا کہ یہ مفروضہ ہمیشہ جائز نہیں ہے ۔

اس کو لا کی صعودی صحیح قوتوں کے ایک مستدق سلسلہ میں پھیلایا جا سکتا ہے تو یہ آسانی سے معلوم ہو جاتا ہے کہ اختیاری مستقلوں کی تعداد کیوں ن ہوتی ہے۔

مثلاً تیسرے رتبہ کی تفرقی مساوات $\frac{\text{فر}^3\,\text{ما}}{\text{فر لا}^3} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ پر غور کرو۔

مان لو کہ $\text{ما} = \text{ا}_0 + \text{ا}_1\,\text{لا} + \text{ا}_2 \frac{\text{لا}^2}{\lfloor 2} + \dots + \text{ا}_n \frac{\text{لا}^n}{\lfloor n} + \dots$ حد تک

تب تفرقی مساوات میں درج کرنے پر حاصل ہوگا

$$\text{ا}_3 + \text{ا}_4\,\text{لا} + \text{ا}_5 \frac{\text{لا}^2}{\lfloor 2} + \dots + \text{ا}_n \frac{\text{لا}^{n-3}}{\lfloor n-3} = \text{ا}_1 + \text{ا}_2\,\text{لا} + \text{ا}_3 \frac{\text{لا}^2}{\lfloor 2} + \dots + \text{ا}_n \frac{\text{لا}^{n-1}}{\lfloor n-1} + \dots$$

اس لیے

$$\text{ا}_3 = \text{ا}_1,$$
$$\text{ا}_4 = \text{ا}_2,$$
$$\text{ا}_5 = \text{ا}_3 = \text{ا}_1,$$
$$\text{ا}_n = \text{ا}_{n-2} = \text{ا}_{n-4} = \text{وغیرہ}$$

پس

$$\text{ما} = \text{ا}_0 + \text{ا}_1\left(\text{لا} + \frac{\text{لا}^3}{\lfloor 3} + \frac{\text{لا}^5}{\lfloor 5} + \dots\right) + \text{ا}_2\left(\frac{\text{لا}^2}{\lfloor 2} + \frac{\text{لا}^4}{\lfloor 4} + \frac{\text{لا}^6}{\lfloor 6} + \dots\right)$$

$$= \text{ا}_0 + \text{ا}_1\,\text{جبز لا} + \text{ا}_2\,(\text{جمز لا} - 1)$$

جس میں صرف تین اختیاری مستقل $\text{ا}_0$، $\text{ا}_1$، $\text{ا}_2$ شامل ہیں۔

اِسی طرح کا استدلال مساوات

$$\frac{\text{فرن ما}}{\text{فرلان}} = \text{ف}\left(\text{لا، ما، } \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\text{، } \frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}}\text{، ..... ، } \frac{\text{فر}^{\text{ن-۱}}\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{ن-۱}}}\right)$$

کے لیے بھی کیا جا سکتا ہے۔

حرکیات میں تفرقی مساواتیں عموماً دوسرے رتبہ کی ہوتی ہیں مثلاً $\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}} + \text{ف}^{2}\text{ما} = ۰$ جو سادہ موسیقی حرکت کی مساوات ہے۔ ایسا حل معلوم کرنے کے لیے جس میں اختیاری مستقل شامل نہ ہوں، دو شرطوں کی ضرورت ہے مثلاً ما اور $\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}$ کی قیمتیں جبکہ ت = ۰، اِن سے ابتدائی ہٹاؤ اور رفتار معلوم ہوتے ہیں۔

## ۸ — کامل ابتدائی - خاص تکملہ - نادر حل -

تفرقی مساوات کا وہ حل جس میں اختیاری مستقلوں کی پوری تعداد شامل ہو کامل ابتدائی کہلاتا ہے۔

کوئی حل جو کامل ابتدائی سے اِن مستقلوں کو مخصوص قیمتیں دیکر حاصل کیا گیا ہو خاص تکملہ کہلاتا ہے۔

چنانچہ $\frac{\text{فر}^{3}\text{ما}}{\text{فرلا}^{3}} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ کا کامل ابتدائی (۵)

$$\text{ما} = \text{ا}_{1} + \text{ا}_{2}\text{ جبزلا} + \text{ا}_{3}\text{ (جمزلا} - ۱)$$

یا $\text{ما} = \text{ج} + \text{ا}_{2}\text{ جبزلا} + \text{ا}_{3}\text{ جمزلا}$ جہاں $\text{ج} = \text{ا}_{1} - \text{ا}_{3}$

یا $\text{ما} = \text{ج} + \text{ا قو}^{\text{لا}} + \text{ب قو}^{-\text{لا}}$ جہاں $\text{ا} = \frac{1}{2}(\text{ا}_{3} + \text{ا}_{2})$ اور $\text{ب} = \frac{1}{2}(\text{ا}_{3} - \text{ا}_{2})$

ہے۔

اِس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ کامِل ابتدائی کو متعدد مختلف (لیکن حقیقت میں معادل) طریقوں پر اکثر لکھا جا سکتا ہے۔
حسب ذیل خاص تکملے ہیں:

ما = ۴، جبکہ ج = ۴، ا$_1$ = ا$_2$ = ۰ لیا جائے،

ما = ۵ جبز لا، جبکہ ا$_1$ = ۵، ج = ا$_2$ = ۰ لیا جائے،

ما = ۶ جمز لا − ۴، جبکہ ا$_2$ = ۶، ا$_1$ = ۰، ج = −۴ لیا جائے،

ما = ۲ + قو$^{\text{لا}}$ − ۳ قو$^{-\text{لا}}$ جبکہ ج = ۲، ا = ۱، ب = −۳ لیا جائے۔

بیشتر مساواتوں میں کامِل ابتدائی سے ہر حل اختیاری مستقلوں کو مناسب قیمتیں دیکر ماخوذ کیا جا سکتا ہے۔ لیکن بعض مستثنےٰ صورتوں میں ہمیں ایک ایسا حل حاصل ہوتا ہے جو مذکورۂ بالا طریقہ پر ماخوذ نہیں کیا جا سکتا۔ ایسے حل کو نادر حل کہتے ہیں۔ اِن پر چھٹے باب میں بحث کیجائے گی۔

## حل طلب مثالیں

دفعہ ۷ کے طریقہ سے حل کرو:

(۱) $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{ما}$

(۲) $\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر لا}^2} = -\text{ما}$

(۳) ثابت کرو کہ یہ طریقہ $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{1}{\text{لا}}$ کے لیے ناکام رہتا ہے۔

[لوک لا کو میکلارن کے سلسلہ میں نہیں پھیلایا جا سکتا]

(۴) ج کو ساقط کرکے اِس امر کی تصدیق کرو کہ ما = لا $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \frac{1}{\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}}$ کا

کا حلِ ابتدائی ما = ج لا + $\frac{1}{ج}$ ہے - نیز تصدیق کرو کہ اس تفرقی مساوات کا ایک حل ما$^2$ = ۴ لا ہے جس کو کا حلِ ابتدائی سے اخذ نہیں کیا جا سکتا (یعنے یہ حل نادر حل ہے) - ثابت کرو کہ یہ حل ان خطوط کے نظام کا لفاف ہے جو کا حلِ ابتدائی سے تعبیر ہوتے ہیں - ترسیم سے اِس کو واضح کرو -

**۹ - ترسیمی تعبیر** - فرض کرو کہ لا اور ما کا ایک تفاعل ف (لا، ما) ہے جس کی قیمت لا اور ما کی محدود قیمتوں کے ہر زوج کے لیے کاملاً معین اور محدود[1] ہے - اب مساوات

$$\frac{فر\,ما}{فر\,لا} = ف\,(لا،\,ما) \qquad (۶)$$

کے کا حلِ ابتدائی سے منحنیوں کا ایک قبیل تعبیر ہوگا - اِن منحنیوں کے قبیل کی عام شکل کو سرعت کے ساتھ مرتسم کرنے کے طریقے[2] کی چند مثالیں ذیل میں دیجاتی ہیں -

اس قبیل کے منحنیوں کو مساوات کے **ممیز** (Characteristics) کہتے ہیں -

مثال (۱) $\frac{فر\,ما}{فر\,لا} = لا\,(ما - ۱)$

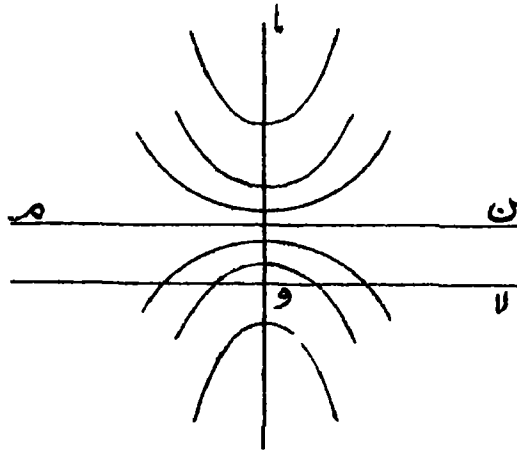
یہاں $\frac{فر^2\,ما}{فر\,لا^2} = ما - ۱ + لا\,\frac{فر\,ما}{فر\,لا} = (لا^2 + ۱)(ما - ۱)$

[1] پس وہ تفاعل جو $\frac{ما}{لا}$ کے مانند ہوں خارج ہو جاتے ہیں کیونکہ لا = ۰ اور ما = ۰ کے لیے وہ غیر متعین ہوتے ہیں -

[2] یہ طریقہ ڈاکٹر ایس - براڈٹسکی (Brodetsky) اور پروفیسر ٹیکو واڈا (Takeo Wada) سے منسوب ہے -

اب ہم جانتے ہیں کہ کسی منحنی کا تقعر اوپر وار ہوتا ہے جبکہ دوسرا تفرقی سر مثبت ہو۔ اِس لئے مثال میں ممیز، ما = ۱ کے اوپر وار مقعر اور ما = ۱ کے نیچے نیچے وار مقعر ہونگے۔ اعظم یا اقل نقطے لا = ۰ پر واقع ہیں کیونکہ وہاں $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = 0$ ۔ وہ ممیز جو ما = ۱ کے قریب ہیں اُن ممیزوں سے جو اِس سے دُور ہیں زیادہ چپٹے ہیں، اور ما = ۱ خود ایک ممیز ہے۔

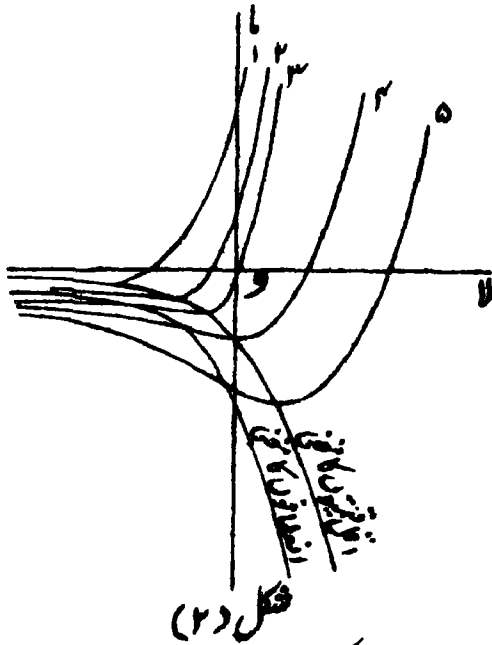
اِن امور سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ منحنیوں کے قبیل کی عام شکل وہ ہے جس کو شکل (۱) میں دکھلایا گیا ہے:

شکل (۱)

مثال (۲) $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{ما} + \text{و}^{\text{لا}}$

یہاں $\frac{\text{فر}^2\ \text{ما}}{\text{فر لا}^2} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{و}^{\text{لا}} = \text{ما} + 2\,\text{و}^{\text{لا}}$

ہم اعظم اور اقل قیمتوں کے منحنی $\text{ما} + \text{و}^{\text{لا}} = 0$ اور انعطافوں کے

منحنی ما + ۲ و لا = ۰ کو مرتسم کرنے سے ابتدا کرتے ہیں۔ اس کے اس ممیز پر غور کرو جو مبدا میں سے گذرتا ہے۔ اس نقطہ پر دونوں تفرقی سر مثبت ہیں، اس لیے جب لا بڑھتا ہے تو ما بھی بڑھتا ہے اور منحنی اوپر وار مقعر ہے۔ اس سے ممیز کا دائیں جانب کا حصہ معلوم ہوتا ہے جس کو شکل (۲) میں ۳ سے ظاہر کیا گیا ہے۔ اگر ہم اس حصہ پر بائیں جانب چلیں تو اقل قیمتوں کے منحنی سے گذرینگے۔ نقطہ تقاطع پر مماس و لا کے متوازی ہے۔ اس کے بعد پھر ہم چڑھینگے اور انعطافوں کے منحنی پر پہنچینگے۔ اس منحنی کو عبور کرنے کے بعد ممیز اوپر وار محدب ہو جاتا ہے اور چڑھنا جاری رکھتا ہے۔ اب شکل سے یہ ظاہر ہے کہ اگر وہ اقل قیمتوں کے منحنی کو مکرر قطع کرے تو مماس و لا کے متوازی نہیں ہو سکتا اور اس لیے ممیز و لا قطع ہی نہیں کرسکتا بلکہ اس کا متقارب بن جاتا ہے۔ (۷)

شکل (۲)

دوسرے ممیزوں کی نوعیت بھی اس کے مشابہ ہے۔

## حل طلب مثالیں

(۱) $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{ما}(\text{۱} - \text{لا})$،

(۲) $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{لا}^{۲}\,\text{ما}$،

اور (۳) $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{ما} + \text{لا}^{۲}$

کے ممیز مرتسم کرو۔

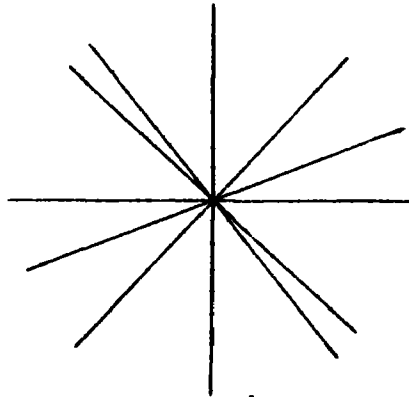
**۱۰ — نادر نقطے** — ایسی تمام مثالوں میں جو گذشتہ دفعہ کی مثالوں کی مانند ہوں مستوی کے ہر نقطہ میں سے گذرتا ہوا ایک اور صرف ایک ممیز حاصل ہوتا ہے۔ دو منحنیوں $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = ۰$ اور $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}} = ۰$ کو مرتسم کرکے ہم بآسانی ایسے نظام کا نقشہ کھینچ سکتے ہیں۔

لیکن اگر ف (لا، ما) ایک یا ایک سے زیادہ نقطوں کے لیے غیر متعین ہو جائے (ایسے نقطوں کو نادر نقطے کہا جاتا ہے) تو ان نقطوں کے قرب میں نظام کا نقشہ کھینچنا اکثر بہت مشکل ہوتا ہے۔ تاہم حسب ذیل مثالوں پر ہندسی طریقہ سے بحث کی جا سکتی ہے۔ عام صورتوں میں پیچیدہ تحلیلی بحث کی ضرورت ہوتی ہے[۱]۔ (۸)

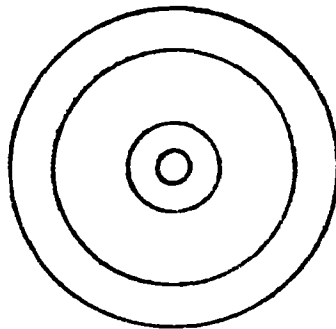
---

[۱] دیکھو پروفیسر ٹیکیو واڈا کا مضمون "ترسیمی حل" رسالہ
Memoirs of the College of Science, Kyoto Imperial University
Vol. II No. 3, July 1917. — میں

مثال (۱)   $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{ما}}{\text{لا}}$

یہاں مبداء ایک نادر نقطہ ہے۔ اِس مساوات کا ہندسی مفہوم یہ ہے کہ سمتی نیم قطر اور مماس وہی میلان رکھتے ہیں اور یہ صرف مبداء میں سے گذرنے والے خطوطِ مستقیم کی صورت میں درست ہے۔

شکل (۳)

اب چونکہ اِن خطوطِ مستقیم کی تعداد لامتناہی ہے اِس لیے اِس صورت میں نادر نقطے میں سے نیمروں کی لامتناہی تعداد گذرتی ہے۔

مثال (۲)   $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = -\frac{\text{لا}}{\text{ما}}$ یعنی $\frac{\text{ما}}{\text{لا}} \times \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = -1$

شکل (۴)

اس کا یہ مطلب ہے کہ سمتی نیم قطر اور مماس کے میلان ایسے ہیں کہ اُن کا حاصل ضرب -۱ ہے یعنی سمتی نیم قطر اور مماس ایک دوسرے پر عمود ہیں۔ اس لیے ممیز کسی نصف قطر کے دائرے ہیں جن کا مرکز مبدا پر ہے۔ (۹)

اس صورت میں نادر نقطہ کو صفر نصف قطر کا ایک دائرہ سمجھا جا سکتا ہے جو اس کے قریب کے ممیزوں کی انتہائی شکل ہے لیکن محدود ابعاد کا کوئی ممیز اس میں سے نہیں گذرتا۔

**مثال (۳)**

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{ما} - \text{ک لا}}{\text{لا} + \text{ک ما}}$$

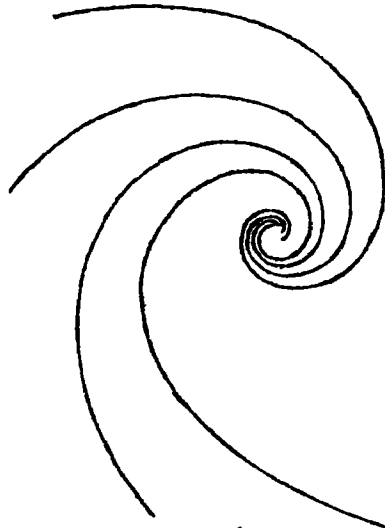
$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{مس سا}$، $\frac{\text{ما}}{\text{لا}} = \text{مس طہ}$ لکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{مس سا} = \frac{\text{مس طہ} - \text{ک}}{1 + \text{ک مس طہ}}$$

یعنی

$$\text{مس سا} + \text{ک مس سا مس طہ} = \text{مس طہ} - \text{ک}$$

شکل (۵)

یعنی $\frac{\text{مس ط} - \text{مس سا}}{1 + \text{مس ط مس سا}} = \text{ک}$

یعنی مس (ط - سا) = ک ، مستقل

اِس لیے ممیز مساوی الزاویہ مرغولے (Spirals) ہیں جنکا نادر نقطہ (مبداء) ماسکہ ہے۔

اِن تین مثالوں میں تین نمونوں کی صورتیں پیش کی گئی ہیں۔ بعض اوقات ممیزوں کی ایک محدود تعداد ایک نادر نقطے میں سے گزرتی ہے لیکن اِس کی مثال اس قدر پیچیدہ ہوگی کہ اِس کا اندراج یہاں مناسب نہیں[1]۔

## پہلے باب پر مختلف مثالیں

(۱۰) ذیل کی مساواتوں سے اختیاری مستقلوں کو ساقط کرو:

۱ — $\text{ما} = \text{ا}\,\text{قو}^{\text{لا}} + \text{ب}\,\text{قو}^{-\text{لا}} + \text{ج}$

۲ — $\text{ما} = \text{ا}\,\text{قو}^{\text{لا}} + \text{ب}\,\text{قو}^{۲\text{لا}} + \text{ج}\,\text{قو}^{۳\text{لا}}$

[ اُن چار مساواتوں سے جو متواتر تفرق سے حاصل ہوتی ہیں ا، ب، ج کو ساقط کرنے کے لیے مقطعہ استعمال کیا جاسکتا ہے ]

۳ — $\text{ما} = \text{قو}^{\text{لا}} (\text{ا جم لا} + \text{ب جب لا})$

۴ — $\text{ما} = \text{ج جمز} \frac{\text{لا}}{\text{ج}}$ ، (زنجیرہ)

ذیل کی مثالوں میں تفرقی مساواتیں معلوم کرو:

[1] دیکھو واڈا کا محولہ بالا مضمون۔

۵ ـــ وہ تمام مکافی جن کے محور، محور ما کے متوازی ہیں۔

۶ ـــ نصف قطر ا کے تمام دائرے۔

۷ ـــ وہ تمام دائرے جو مبدا میں سے گزرتے ہیں۔

۸ ـــ وہ تمام دائرے جن کے نصف قطر یا محل مستوی لا و ما میں خواہ کچھ ہی ہوں۔

[مثال ۶ کا نتیجہ استعمال کیا جا سکتا ہے]

۹ ـــ ثابت کرو کہ ا کو

$$\text{۲ ما} = \text{لا}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{ا لا} \text{ ، } \ldots\ldots\ldots (\text{۱})$$

سے اور ب کو

$$\text{ما} = \text{لا}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - \text{ب لا}^{\text{۲}} \text{ ، } \ldots\ldots\ldots (\text{۲})$$

سے ساقط کیا جائے تو ہر صورت میں ذیل کی تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہے:

$$\text{لا}^{\text{۲}}\frac{\text{فر}^{\text{۲}}\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{۲}}} - \text{۲لا}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{۲ما} = \text{۰} \text{ ، } \ldots\ldots\ldots (\text{۳})$$

[مساوات (۱) کے کامل ابتدائی سے مساوات (۳) پوری ہونی چاہیئے کیونکہ (۳)، (۱) سے ماخذپذیر ہے۔ اس ابتدائی میں ا اور نیز ایک اختیاری مستقل شامل ہوگا۔ پس وہ (۳) کا حل ہے کیونکہ اس میں دو مستقل ہیں اور یہ دونوں مستقل جہاں تک کہ (۳) کا تعلق ہے اختیاری ہیں کیونکہ ا اس مساوات میں شامل نہیں ہے۔ حقیقت میں اس کو (۳) کا کامل ابتدائی ہونا چاہیئے۔ اسی طرح (۲) اور (۳) کے کامل ابتدائی وہی ہیں۔ پس (۱) اور (۲) ایک مشترک کامل ابتدائی رکھتے ہیں۔]

۱۰ ـــ گزشتہ مثال کا طریقہ استعمال کر کے ثابت کرو کہ

$$\text{ما} + \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{۲ ا قو}^{\text{لا}}$$

اور
$$\text{ما} - \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{۲ ب قو}^{-\text{لا}}$$

کے کامل ابتدائی وہی ہیں ۔

۱۱ ـــ مان لو کہ مثال ۹ کی پہلی دو مساواتوں کے کامل ابتدائی ایک ہی ہیں ۔ اِس کو معلوم کرنے کے لیے $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ کی دو قیمتوں کو (لا اور ما کی رقوم میں) مساوی رکھو ۔ نیز تصدیق کرو کہ یہ کامل ابتدائی مثال ۹ کی مساوات (۳) کو پورا کرتا ہے ۔

۱۲ ـــ اسی طرح مثال ۱۰ کی دو مساواتوں کا مشترک کامل ابتدائی معلوم کرو ۔

۱۳ ـــ ثابت کرو کہ وہ تمام منحنی جو تفرقی مساوات

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{۱} + \text{لا} \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^{\text{۲}} + \text{لا}^{\text{۲}} \frac{\text{فر}^{\text{۲}} \text{ما}}{\text{فر لا}^{\text{۲}}} \qquad (\text{۱۱})$$

کو پورا کرتے ہیں محور ما کو زاویہ °۴۵ پر قطع کرتے ہیں ۔

۱۴ ـــ نقطہ (۱، ۲) پر اُن دو منحنیوں کا میلان محور لا کے ساتھ معلوم کرو جو اِس نقطہ میں سے گذرتے ہیں اور مساوات

$$\left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^{\text{۲}} = \text{لا}^{\text{۲}} - \text{۲ لا} + \text{ما}^{\text{۲}}$$

کو پورا کرتے ہیں ۔

۱۵ ـــ ثابت کرو کہ مثال ۱۴ کے منحنیوں میں سے کسی ایک کا نصف قطر انحنا نقطہ (۱، ۲) پر ۴ ہے ۔

۱۶ ـــ ثابت کرو کہ بالعموم دو منحنی جو تفرقی مساوات

$$\text{لا}\left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^{2} - \text{ما}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + 1 = 0$$

کو پورا کرتے ہیں کسی نقطہ میں سے گذرتے ہیں لیکن وہ ایک ایسے مکافی پر کے کسی نقطہ کے لیے ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں جو نظام کے منحنیوں کا لفافہ ہے۔

۱۷ — ایک ایسے نقطہ کا طریق معلوم کرو کہ اس میں سے گذرنے والے دو منحنی جو مثال (۱۲) کی تفرقی مساوات کو پورا کریں (۱) علی القوائم اور (۲) ۴۵° پر متقاطع ہوں۔

$$۱۸ — \quad \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{لا} + \text{قو}^{\text{ما}}$$

کے ممیز (براڈسکی اور واڈا کے طریقہ سے) مرتسم کرو۔

۱۹ — حسب ذیل تفرقی مساواتوں کے حل لا کی صعودی صحیح قوتوں کے سلسلوں میں، (حسب دفعہ ۷) معلوم کرو (ان مثالوں میں $\text{ما}_1$ اور $\text{ما}_2$ علی الترتیب $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ اور $\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر لا}^2}$ کو تعبیر کرتے ہیں):—

(۱) $\text{ما}_2 - \text{لا}\,\text{ما}_1 - \text{ما} = 0$، (۲) $\text{لا}\,\text{ما}_2 + \text{لا}\,\text{ما}_1 + \text{ما} = 0$،

(۳) $\text{لا}^2\,\text{ما}_2 - 2\,\text{لا}\,\text{ما}_1 + 2\,\text{ما} = 0$، (۴) $(1 - \text{لا}^2)\,\text{ما}_2 + 2\,\text{ما} = 0$،

(۵) $(\text{لا} - \text{لا}^2)\,\text{ما}_2 + (1 - 5\,\text{لا})\,\text{ما}_1 - 3\,\text{ما} = 0$

[ جواب:

(۱) $\text{ما} = \text{ا}_1\left(1 + \frac{\text{لا}^2}{2} + \frac{\text{لا}^4}{4\times 2} + \frac{\text{لا}^6}{6\times 4\times 2} + \cdots\right)$

$+ \text{ا}_2\left(\frac{\text{لا}}{1} + \frac{\text{لا}^3}{3\times 1} + \frac{\text{لا}^5}{5\times 3\times 1} \cdots\cdots\right)$

(۲) $\text{ما} = \text{ا}_1\left(\text{لا} - \frac{\text{لا}^2}{1!} + \frac{\text{لا}^3}{2!} - \frac{\text{لا}^4}{3!} + \cdots\right) = \text{ا}_1\,\text{لا}\,\text{قو}^{-\text{لا}}$،

اس میں چونکہ صرف ایک اختیاری مستقل ہے اس لیے وہ کامل ابتدائی نہیں ہے، اس کا ایک دوسرا حل ہے جو اُس شکل کا نہیں ہے جس کو یہاں فرض کیا گیا ہے (دیکھو نواں باب)۔

$$(۳)\quad \text{ما} = \text{ا}_۱\,\text{لا} + \frac{۱}{۲}\,\text{ا}_۲\,\text{لا}^۲$$

$$(۴)\quad \text{ما} = \text{ا}_۰(۱ - \text{لا}^۲) + \text{ا}_۱\left(\text{لا} - \frac{\text{لا}^۳}{۱\times۳} - \frac{\text{لا}^۵}{۳\times۵} - \frac{\text{لا}^۷}{۵\times۷} - \cdots\right)$$

$$(۵)\quad \text{ما} = \text{ا}_۰(۱^۲ + ۲^۲\,\text{لا} + ۳^۲\,\text{لا}^۲ + \cdots)$$ دیکھو دفعہ ۹]

(۱۲)

# دوسرا باب

## پہلے رتبہ اور پہلے درجہ کی مساواتیں

۱۱ — اِس باب میں شکل

$$م + ن \frac{فرما}{فرلا} = ۰$$

کی مساواتوں پر غور کیا جائیگا۔ اِس میں م اور ن دونوں لا اور ما کے تفاعل ہیں۔

اِس مساوات کو اکثر زیادہ متشاکل شکل

$$م فرلا + ن فرما = ۰$$

میں لکھا جاتا ہے[۱]۔

اِس شکل کی عام مساوات کو معلومہ تفاعلوں کی ایک محدود تعداد کی رقوم میں حل کرنا ممکن نہیں ہے لیکن ہم چند خاص نمونوں پر غور کرینگے جن کو حل کیا جا سکتا ہے۔

[۱] تفرقوں فرلا اور فرما کے استعمال کے باقاعدہ جواز کے لیے دیکھو ہارڈی کی کتاب "Pure Mathematics" دفعہ ۱۳۶ [دفعات ۱۵۴ تا ۱۵۵، دوسرے تا چھٹے اڈیشن میں، ۱۵۹ تا ۱۶۰ ساتویں اڈیشن میں]۔

اِن نمونوں کی تقسیم بالعموم حسبِ ذیل کیجاتی ہے:

(ا) ٹھیک مساواتیں،
(ب) وہ مساواتیں جو متغیروں کو جدا کرنے سے حل کیجا سکتی ہیں،
(ج) متجانس مساواتیں
(د) پہلے رتبہ کی خطی مساواتیں۔

اِس باب میں خاص کر وہ طریقے استعمال کئے گئے ہیں جن کو جان برنولی (باشندہ بال ۱۶۶۷ء تا ۱۷۴۸ء) اور اس کے شاگرد یولر (باشندہ بال ۱۷۰۷ء تا ۱۷۸۳ء) نے اختیار کئے تھے۔ جان برنولی اپنے زمانہ کا بڑا عالم و فاضل شخص تھا اور اُس کے شاگرد یولر نے جبر و مقابلہ، علم مثلث، احصاء، استوار حرکیات یا حرکیات، علم ہیئت اور دیگر مضامین میں بڑے زبردست مقالے لکھے ہیں۔

## ۱۲ — ٹھیک مساواتیں[1] —

مثال (۱) جملہ ما فرلا + لا فرما ایک ٹھیک تفرقہ ہے۔
اِس لیے مساوات ما فرلا + لا فرما = ۰
کو جس سے فر (مالا) = ۰ یعنی مالا = ج حاصل ہوتا ہے ٹھیک مساوات کہا جاتا ہے۔

(۱۲) مثال (۲) مساوات مس ما × فرلا + مس لا × فرما = ۰
پر غور کرو۔
یہ اپنی اس شکل میں ٹھیک مساوات نہیں ہے لیکن اگر اِسکو جم لا جم ما سے ضرب دیا جائے تو وہ
جب ما جم لا فرلا + جب لا جم ما فرما = ۰.

---

[1] وہ ضروری اور کافی شرط کہ مر فرلا + ن فرما = ۰ ایک ٹھیک مساوات ہو ضمیمہ ۱ میں بیان کی گئی ہے۔

ہو جاتی ہے جو ٹھیک مساوات ہے۔
اِس کا حل جب ما جب لا = ج ہے۔

**۱۳ — متکمل جزو ضربی** ۔ گذشتہ دفعہ کی آخری مثال میں جم لا جم ما کو متکمل جزو ضربی کہتے ہیں کیونکہ جب دی ہوئی مساوات کو اِس سے ضرب دیا جاتا ہے تو ایک ٹھیک مساوات حاصل ہوتی ہے جس کو فوراً حل کیا جا سکتا ہے۔

مساواتوں کی مخصوص جماعتوں میں متکمل اجزائے ضربی کو متعین کرنے کے لیے بالعموم مختلف قاعدے دئے جاتے ہیں۔ یہ قاعدے اِس باب کے ختم پر متفرق مثالوں میں ملیں گے۔ اِن قاعدوں کو ثابت کرنا دلچسپ ضرور ہے لیکن اِن کے بغیر ہی مثالوں کو زیادہ آسانی کے ساتھ بالعموم حل کیا جا سکتا ہے۔

**۱۴ — متغیر جدائی پذیر** ۔

مثال (۱) مساوات $\frac{\text{فر لا}}{\text{لا}}$ = مس ما فر ما میں دائیں جانب صرف لا اور بائیں جانب صرف ما شامل ہے، اِس لیے متغیر جدا ہیں۔
تکمل کرنے پر حاصل ہوتا ہے

لوک لا = ـ لوک جم ما + ج

یعنی لوک (لا جم ما) = ج

لا جم ما = ق^ج = ا، فرض کرو

مثال (۲) $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ = ۲ لا ما

اِس شکل میں متغیر جدا نہیں ہیں لیکن اِن کو آسانی سے جدا

کیا جا سکتا ہے ۔ فرلا سے ضرب دو اور ما سے تقسیم کرو تو

فرما / ما = ۲ لا فرلا

تکمیل کرنے پر      لوک ما = لا^۲ + ج

چونکہ ج اختیاری ہے اِس لیے اس کو لوک ا کے مساوی رکھا جا سکتا ہے جہاں ا دوسرا اختیاری مستقل ہے چنانچہ بالآخر حاصل ہوتا ہے

ما = ا و^(لا^۲)

## مثالیں

۱ — (۱۲ لا + ۵ ما − ۹) فرلا + (۵ لا + ۲ ما − ۴) فرما = ۰

۲ — {جم لا مس ما + جم (لا + ما)} فرلا + {جب لا قط^۲ ما + جم (لا + ما)} فرما = ۰

۳ — (قط لا مس لا مس ما − و^لا) فرلا + قط لا قط^۲ ما فرما = ۰

۴ — (لا + ما) (فرلا − فرما) = فرلا + فرما

۵ — ما فرلا − لا فرما + ۳ لا^۲ ما^۲ و^(لا^۳) فرلا = ۰

۶ — ما فرلا − لا فرما = ۰

۷ — (جب لا + جم لا) فرما + (جم لا − جب لا) فرلا = ۰

۸ — فرما / فرلا = لا^۲ ما^۲

۹ — ما فرلا − لا فرما = لا ما فرلا

۱۰ — مس لا فرما = مم ما فرلا

(۱۴)

**۱۵ ـ متجانس مساواتیں ۔** پہلے رتبہ اور پہلے درجہ کی متجانس مساوات وہ ہے جس کو شکل

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ف}\left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}}\right)$$

میں لکھا جا سکے ۔

اب اس کا امتحان کرنے کے لیے کہ آیا لا اور ما کا ایک تفاعل بائیں جانب کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے

$$\frac{\text{ما}}{\text{لا}} = \text{و} \quad \text{یا} \quad \text{ما} = \text{و لا}$$

رکھنے سے سہولت پیدا ہوگی ۔

اگر اس ابدال سے نتیجہ کی شکل ف(و) ہو جائے یعنی اگر تمام لا خارج ہو جائیں تو مساوات متجانس ہوگی ۔

مثال (۱) مساوات $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{لا}^2 + \text{ما}^2}{2\,\text{لا}^2}$ اوپر کے ابدال سے

$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{1+\text{و}^2}{2}$ ہو جاتی ہے ۔ یہ مساوات متجانس ہے ۔

مثال (۲) $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{ما}^3}{\text{لا}^2}$ اوپر کے ابدال سے $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{لا و}^3$ ہو جاتی ہے ۔ یہ متجانس نہیں ہے ۔

**۱۶ ـ حل کا طریقہ ۔** چونکہ کسی متجانس مساوات کو اس کی بائیں جانب ما = و لا رکھ کر $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ف(و)}$ میں تحویل کیا جا سکتا ہے اس لیے اس ابدال کا اثر دائیں جانب کے جملہ پر معلوم کرنا فطری بات

ہے۔ واقعہ یہ ہے کہ اس ابدال سے مساوات کو ہمیشہ حل کیا[1] جا سکیگا [دیکھو اس باب کے ختم پر تفرق مثالوں میں مثال ۱۰]۔

مثال (۱) $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲}}{۲\,\text{لا}^{۲}}$

رکھو $\text{ما} = \text{و}\,\text{لا}$

یعنی $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{و} + \text{لا}\frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}}$ (کیونکہ اگر ما، لا کا تفاعل ہے تو و بھی لا کا تفاعل ہے) اس ابدال سے مساوات ہو جاتی ہے

$$\text{و} + \text{لا}\frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}} = \frac{۱ + \text{و}^{۲}}{۲}$$

یعنی $۲\,\text{لا}\,\text{فرو} = (۱ + \text{و}^{۲} - ۲\,\text{و})\,\text{فرلا}$

متغیروں کو جدا کرنے سے $\frac{۲\,\text{فرو}}{(\text{و}-۱)^{۲}} = \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}}$

تکمل کرنے پر $\frac{-۲}{\text{و}-۱} = \text{لوک}\,\text{لا} + \text{ج}$

لیکن $\text{و} = \frac{\text{ما}}{\text{لا}}$ اسلیے $\frac{-۲}{\text{و}-۱} = \frac{-۲}{\frac{\text{ما}}{\text{لا}}-۱} = \frac{-۲\,\text{لا}}{\text{ما}-\text{لا}} = \frac{۲\,\text{لا}}{\text{لا}-\text{ما}}$

پس لا − ما سے ضرب دینے پر

$$۲\,\text{لا} = (\text{لا} - \text{ما})(\text{لوک}\,\text{لا} + \text{ج})$$

مثال (۲)۔ $(\text{لا} + \text{ما})\,\text{فرما} + (\text{لا} - \text{ما})\,\text{فرلا} = ۰$ (۱۵)

[1] "حل" سے ہماری مراد معمولی عمل تکمل میں تحویل کرنا ہے۔ بلا شبہ یہ ممکن ہے کہ ایسے تکملہ کو ہم معمولی ابتدائی تفاعلوں کی رقوم میں بیان نہ کرسکیں۔

اِس سے حاصل ہوتا ہے فرما / فرلا = (ما ـ لا) / (ما + لا)

رکھو ما = ولا اور حسبِ سابق عمل کرو تو

و + لا فرو / فرلا = (و ـ ۱) / (و + ۱)

یعنے لا فرو / فرلا = (و ـ ۱) / (و + ۱) ـ و = ـ (و۲ + ۱) / (و + ۱)

متغیروں کو جدا کرنے سے ـ (و + ۱) فرو / (و۲ + ۱) = فرلا / لا

یعنے ـ وفرو / (و۲ + ۱) ـ فرو / (و۲ + ۱) = فرلا / لا

تکمیل کرنے پر ـ ۱/۲ لوک (و۲ + ۱) ـ مس‾۱ و = لوک لا + ج

یعنے ۲ لوک لا + لوک (و۲ + ۱) + ۲ مس‾۱ و + ۲ج = ۰،

لوک لا۲ (و۲ + ۱) + ۲ مس‾۱ و + ا = ۰، ۲ج = ا رکھنے

سے بالآخر و = ما / لا رکھنے پر لوک (ما۲ + لا۲) + ۲ مس‾۱ ما / لا + ا = ۰

## ۱۷ ـ وہ مساواتیں جو متجانس مساواتوں میں تحویل پذیر ہیں

مثال (۱) مساوات فرما / فرلا = (ما ـ لا + ۱) / (ما + لا + ۵)

متجانس نہیں ہے

یہ مثال گذشتہ دفعہ کی مثال (۲) کے مشابہ ہے صرف اتنا فرق ہے کہ

(ما ـ لا) / (ما + لا) کی بجائے (ما ـ لا + ۱) / (ما + لا + ۵) ہے۔

اب ما ـ لا = ۰ اور ما + لا = ۰ دو خطوط مستقیم کو جو مبدا میں سے گذرتے ہیں تعبیر کرتے ہیں۔

خطوط ما ـ لا + ۱ = ۰ اور ما + لا + ۵ = ۰ کا نقطۂ تقاطع آسانی سے (ـ۲، ـ۳) معلوم ہو جاتا ہے۔

رکھو لا = لا ـ ۲، ما = ما ـ ۳ جس کا یہ مطلب ہے کہ نئے مبدا کو نقطہ (ـ۲، ـ۳) پر لیا گیا ہے اور نئے محور پرانے محوروں کے متوازی ہیں۔

تب ما ـ لا + ۱ = ما ـ لا اور ما + لا + ۵ = ما + لا

نیز فرلا = فرلا اور فرما = فرما

اس لیے مساوات ہو جاتی ہے

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{ما} - \text{لا}}{\text{ما} + \text{لا}}$$

اور گذشتہ دفعہ کے مطابق اس کا حل ہے

$$\text{لوک}\,(\text{ما}^{2} + \text{لا}^{2}) + 2\,\text{مس}^{-1}\frac{\text{ما}}{\text{لا}} + \text{ا} = 0$$

یعنی

$$\text{لوک}\left[(\text{ما}+3)^{2} + (\text{لا}+2)^{2}\right] + 2\,\text{مس}^{-1}\frac{\text{ما}+3}{\text{لا}+2} + \text{ا} = 0$$

مثال (۳) (۱۶)

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{ما} - \text{لا} + 1}{\text{ما} - \text{لا} + 5}$$

اس مثال کو پچھلی مثال کی طرح حل نہیں کیا جا سکتا کیونکہ خطوط ما ـ لا + ۱ = ۰ اور ما ـ لا + ۵ = ۰ متوازی ہیں۔

چونکہ بائیں جانب کا جملہ ما ـ لا کا ایک تفاعل خیال کیا جا سکتا ہے اس لیے رکھو ما ـ لا = ی

یعنی

$$1 - \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{فری}}{\text{فرلا}}$$

تو مساوات ہو جاتی ہے

$$۱ + \frac{فری}{فرلا} = \frac{ی + ۱}{ی + ۵}$$

یعنی

$$\frac{فری}{فرلا} = \frac{-۴}{ی + ۵}$$

متغیروں کو جدا کرنے پر $(ی + ۵)\,فری = -۴\,فرلا$

تکمل کرنے پر $\frac{۱}{۲}ی^۲ + ۵ی = -۴لا + ج$

یعنی $ی^۲ + ۱۰ی + ۸لا = ۲ج$

ی کی بجائے درج کرنے پر $(ما - لا)^۲ + ۱۰(ما - لا) + ۸لا = ۲ج$

یعنی $(ما - لا)^۲ + ۱۰ما - ۲لا = ا$ ($۲ج = ا$ رکھنے سے)

## مثالیں

(۱) $(۲لا - ما)\,فرما = (۲ما - لا)\,فرلا$ [Wales]

(۲) $(لا^۲ - ما^۲)\frac{فرما}{فرلا} = لا\,ما$ [Sheffield]

(۳) $۲\frac{فرما}{فرلا} = \frac{ما}{لا} + \frac{ما^۲}{لا^۲}$ [Math Tripos]

(۴) $لا\frac{فرما}{فرلا} = ما + \sqrt{لا^۲ + ما^۲}$

(۵) $\frac{فرما}{فرلا} = \frac{۲لا + ۹ما - ۲۰}{۶لا + ۲ما - ۱۰}$

(۶) $(۱۲لا + ۲۱ما - ۹)\,فرلا + (۴۷لا + ۴۰ما + ۷)\,فرما = ۰$

(۷) $\frac{فرما}{فرلا} = \frac{۳لا - ۴ما - ۲}{۳لا - ۴ما - ۳}$

(۸) $(لا + ۲ما)(فرلا - فرما) = فرلا + فرما$

## ۱۸ — خطی مساواتیں

مساوات $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{ف ما} = \text{ق}$

کو جس میں ف اور ق صرف لا کے تفاعل ہیں لیکن ما کے تفاعل نہیں ہیں پہلے رتبہ کی خطی مساوات کہتے ہیں۔

اس کی ایک سادہ مثال $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \frac{1}{\text{لا}} \times \text{ما} = \text{لا}^2$ ہے۔

اگر ہم اس کی ہر جانب کو لا سے ضرب دیں تو مساوات ہو جاتی ہے (۱۷)

$$\text{لا} \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{ما} = \text{لا}^3$$

یعنی

$$\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}} (\text{لا ما}) = \text{لا}^3$$

اس لیے تکمل کرنے پر $\text{لا ما} = \frac{1}{4}\text{لا}^4 + \text{ج}$

ہم نے اس مثال کو متکمل جزو ضربی لا کے استعمال سے حل کیا ہے جو دیکھنے سے ہی معلوم ہو جاتا ہے۔

**۱۹** — فرض کرو کہ ہم عام صورت میں متکمل جزو ضربی کو معلوم کرنے کی کوشش کرتے ہیں۔ اگر ایسا جزو ضربی ر ہے تو مساوات

$$\text{ر} \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{ر ف ما} = \text{ر ق}$$

کی دائیں جانب کا جملہ کسی حاصل ضرب کا تفرقی سر ہے اور پہلی رقم $\text{ر} \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ یہ حاصل ضرب ر ما ہونا چاہئے۔

اس لیے رکھو $\text{ر} \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{ر ف ما} = \frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}(\text{ر ما}) = \text{ر} \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{ما} \frac{\text{فر ر}}{\text{فر لا}}$

اِس سے حاصل ہوتا ہے  مر ف ما = ما (فرمر / فرلا)

یعنے  ف فرلا = فرمر / مر

یعنے  ∫ ف فرلا = لوگ مر

مر = قو^(∫ف فرلا)

پس حسب ذیل قاعدہ حاصل ہوتا ہے:

(فرما / فرلا) + ف ما = ق کو حل کرنے کے لیے اِس کی ہر جانب کے جملہ کو قو^(∫ف فرلا) سے جو اِس کا ایک متکمل جزو ضربی ہے ضرب دو ۔

## ۲۰ ۔ مثالیں ۔

(۱) دفعہ ۱۸ میں بیان کردہ سادہ مثال

(فرما / فرلا) + (۱ / لا) × ما = لا^۲

پر غور کرو ۔

یہاں ف = ۱ / لا ، اِس لیے ∫ف فرلا = لوگ لا اور قو^(لوگ لا) = لا

اِس طرح قاعدہ سے وہی متکمل جزو ضربی حاصل ہوتا ہے جس کو ہم نے استعمال کیا تھا ۔

(۲)  (فرما / فرلا) + ۲ لا ما = ۲ قو^(−لا^۲)

یہاں ف = ۲لا ، $\int$ ف فرلا = لا$^{۲}$ اور متکمل جزوضربی قو$^{\text{لا}^{۲}}$ ہے۔

(۱۸) اس سے ضرب دینے پر قو$^{\text{لا}^{۲}}$ $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ + ۲لا قو$^{\text{لا}^{۲}}$ ما = ۲

یعنی $\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}$ (ما قو$^{\text{لا}^{۲}}$) = ۲

تکمل کرنے پر ما قو$^{\text{لا}^{۲}}$ = ۲لا + ج

ما = (۲لا + ج) قو$^{-\text{لا}^{۲}}$

(۳) $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ + ۳ما = قو$^{۲\text{لا}}$

یہاں متکمل جزوضربی قو$^{۳\text{لا}}$ ہے۔

اس سے ضرب دینے پر قو$^{۳\text{لا}}$ $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ + ۳ قو$^{۳\text{لا}}$ ما = قو$^{۵\text{لا}}$

یعنی $\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}$ (ما قو$^{۳\text{لا}}$) = قو$^{۵\text{لا}}$

تکمل کرنے پر ما قو$^{۳\text{لا}}$ = $\frac{۱}{۵}$ قو$^{۵\text{لا}}$ + ج

ما = $\frac{۱}{۵}$ قو$^{۲\text{لا}}$ + ج قو$^{-۳\text{لا}}$

## ۲۱ — وہ مساواتیں جو خطی مساواتوں میں تحویل پذیر ہیں —

مثال (۱)
$$\text{لا}\,\text{ما} - \frac{\text{فر}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}} = \text{ما}^{۳}\,\text{قو}^{-\text{لا}^{۲}}$$

$\text{ما}^{۳}$ سے تقسیم کرو تاکہ بائیں جانب کا جملہ ما سے آزاد ہو چنانچہ

$$\text{لا} \times \frac{۱}{\text{ما}^{۲}} - \frac{۱}{\text{ما}^{۳}}\,\frac{\text{فر}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}} = \text{قو}^{-\text{لا}^{۲}}$$

یعنی
$$\text{لا} \times \frac{۱}{\text{ما}^{۲}} + \frac{۱}{۲}\,\frac{\text{فر}}{\text{فر}\,\text{لا}}\left(\frac{۱}{\text{ما}^{۲}}\right) = \text{قو}^{-\text{لا}^{۲}}$$

رکھو $\frac{۱}{\text{ما}^{۲}} = \text{ی}$ تو
$$۲\,\text{لا}\,\text{ی} + \frac{\text{فر}\,\text{ی}}{\text{فر}\,\text{لا}} = ۲\,\text{قو}^{-\text{لا}^{۲}}$$

یہ مساوات خطی ہے اور فی الحقیقت مثال (۲) کے مشابہ ہے کیونکہ اس میں صرف ما کی بجائے ی ہے۔

پس حل ہے
$$\text{ی} = (۲\,\text{لا} + \text{ج})\,\text{قو}^{-\text{لا}^{۲}}$$

یا
$$\frac{۱}{\text{ما}^{۲}} = (۲\,\text{لا} + \text{ج})\,\text{قو}^{-\text{لا}^{۲}}$$

$$\therefore\quad \text{ما} = \pm \frac{\text{قو}^{\frac{۱}{۲}\text{لا}^{۲}}}{\sqrt{۲\,\text{لا} + \text{ج}}}$$

## یہ مثال برنولی کی مساوات

$$\frac{\text{فر}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}} + \text{ف}\,\text{ما} = \text{ق}\,\text{ما}^{\text{ن}}$$

کی جس میں ف اور ق، لا کے تفاعل ہیں ایک مخصوص صورت ہے۔ جیکب برنولی یا برنولی (باشندہ بال) نے اس مساوات کی سنہ ۱۶۹۵ء میں تحقیق کی تھی۔

(۱۹) مثال (۲)

$$(\text{۲لا} - \text{۱۰ما}^{\text{۳}})\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{ما} = \text{۰}$$

یہ موجودہ شکل میں خطی نہیں ہے لیکن اگر $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}}$ سے ضرب دیں تو

$$\text{۲لا} - \text{۱۰ما}^{\text{۳}} + \text{ما}\frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} = \text{۰}$$

یعنے

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} + \frac{\text{۲لا}}{\text{ما}} = \text{۱۰ما}^{\text{۲}}$$

یہ خطی ہے اگر ما کو غیر تابع متغیر سمجھا جائے۔

حسب سابق عمل کرنے پر شکل جزو ضربی $\text{ما}^{\text{۲}}$ حاصل ہوگا اور حل ہوگا

$$\text{ما}^{\text{۲}}\text{لا} = \text{۲ ما}^{\text{۵}} + \text{ج}$$

یعنے

$$\text{لا} = \text{۲ ما}^{\text{۳}} + \text{ج ما}^{\text{-۲}}$$

## مثالیں ۔

(۱) $(\text{لا}+\text{۱})\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - \text{۳ما} = (\text{لا}+\text{۱})^{\text{۵}}$ [Wales]

(۲) $\text{لاجم لا}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{ما}(\text{لاجب لا} + \text{جم لا}) = \text{۱}$ (Sheffield)

(۳) $\text{لالوک لا}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{ما} = \text{۲لوک لا}$

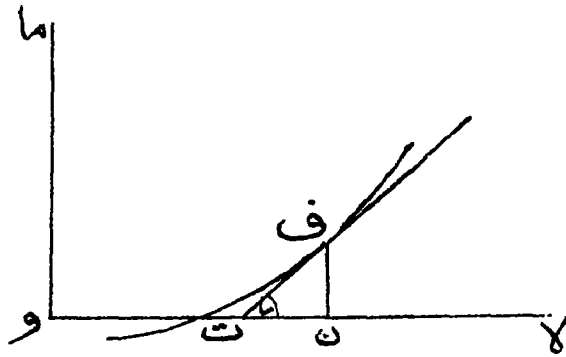
(۴) $\text{لا}^{\text{۲}}\text{ما} - \text{لا}^{\text{۳}}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ما}^{\text{۴}}\text{جم لا}$

(۵) $\text{۲} + \text{ما} \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ما}^{\text{۲}}(\text{لا}-\text{۱})$

(۶) (لا + ۲ ما^۳) فرما/فرلا = ما

(۷) فرلا + لا فرما = تو^ما قط^۲ ما فرما

**۲۲ — ہندسی مسئلے - قائم مرماۃ** - اب ہم چند ہندسی مسئلوں پر جن سے تفرقی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں غور کرینگے۔

مثال (۱) وہ منحنی معلوم کرو جس کا زیر مماس مستقل ہے -

شکل (۶)

زیر مماس ت ن = ف ن مم سا = ما فرلا/فرما

پس ما فرلا/فرما = ک (۱۰)

فرلا = ک فرما/ما

∴ لا + ج = ک لوک ما

∴ ما = ا و^ک/ا ، اختیاری مستقل ج کو ک لوک ا کے

مساوی رکھنے سے۔

مثال (۲)۔ ایسا منحنی معلوم کرو کہ کسی دو نقطوں ف ، ق کے درمیان اس کا طول، ایک ثابت نقطہ و سے ف اور ق کے فاصلوں کے فرق کے متناسب ہو۔

اگر ف کو ثابت سمجھا جائے تو قوس ق ف ∝ و ق منفی ایک مستقل۔

قطبی محددوں کو استعمال کرو چنانچہ و کو قطب اور و ف کو ابتدائی خط لو۔ تب اگر ق کے محدد (ر ، طہ) ہوں تو

س = ک ر ۔ ک ر.

لیکن علم احصاء میں ثابت کیا گیا ہے کہ

$$(\text{فر س})^2 = (\text{ر فر طہ})^2 + (\text{فر ر})^2$$

پس $$\text{ک}^2 (\text{فر ر})^2 = (\text{ر فر طہ})^2 + (\text{فر ر})^2$$

یعنے $$\text{فر طہ} = \pm \sqrt{\text{ک}^2 - \text{ا}}\ \frac{\text{فر ر}}{\text{ر}}$$

$$= \frac{\text{ا}}{\text{د}}\ \frac{\text{فر ر}}{\text{ر}} \text{ ، فرض کرو}$$

∴ ر = ج و^{د طہ} ، مساوی الزاویہ مرغولہ

مثال (۳)۔ نیم کعبی مکافیوں ا ر ما^۲ = لا^۳ کے قبیل کے قائم مرماۃ معلوم کرو جہاں ا متغیر مبدل ہے۔

منحنیوں کے دو قبیلوں کو قائم مرماۃ اسوقت کہا جاتا ہے جبکہ ایک قبیل کا ہر رکن دوسرے قبیل کے ہر رکن کو علی القوائم قطع کرے۔

اول ہم ا کو ساقط کر کے دئے ہوئے قبیل کی تفرقی مساوات حاصل کریں گے۔ چنانچہ

$$ا \, ما^{۲} = لا^{۳}$$

کو تفرق کرنے پر $۲ \, ا \, ما \frac{فرما}{فرلا} = ۳ \, لا^{۲}$

حاصل ہوتا ہے، اس لیے تقسیم سے

$$\frac{۲}{ما} \frac{فرما}{فرلا} = \frac{۳}{لا} ، \quad \ldots\ldots (۱)$$

اب $\frac{فرما}{فرلا} =$ مس سا جہاں سا، محور لا کے ساتھ مماس کا میلان ہے۔ مرماۃ کے لیے سا کی قیمت (فرض کرو سَا) مساوات

$$سا = سَا \pm \frac{۱}{۲} \pi$$

سے حاصل ہوتی ہے یعنے مس سا = ـ مم سَا

یعنے دئے ہوئے قبیل کے لیے $\frac{فرما}{فرلا}$ کی بجائے مرماۃ کے لئے ـ $\frac{فرلا}{فرما}$ رکھنا چاہیئے۔

(۱) میں یہ تبدیلی کرنے سے حاصل ہوگا (۲۱)

$$-\frac{۲}{ما} \frac{فرلا}{فرما} = \frac{۳}{لا}$$

$$\therefore \quad ۲ \, لا \, فرلا + ۳ \, ما \, فرما = ۰$$

$$\therefore \quad ۲ \, لا^{۲} + ۳ \, ما^{۲} = ج$$

جو متشابہ اور متشابہاً واقع ہونے والے ناقصوں کا ایک نظام ہے۔

مثال ۴۔ منحنیوں کا وہ قبیل معلوم کرو جو مرغولوں کے قبیل

ر = ا طہ کو ایک مستقل زاویہ عہ پر قطع کرے۔
حسب سابق ہم ا کو ساقط کرنے سے ابتدا کرتے ہیں۔ چنانچہ اس طرح حاصل ہوتا ہے

$$ر \frac{فر طہ}{فر ر} = طہ$$

اب $\frac{ر فر طہ}{فر ر}$ = مس فہ جہاں فہ وہ زاویہ ہے جو مماس اور سمتی نیم قطر کے درمیان ہے۔ اگر دوسرے قبیل کے لیے یہی زاویہ فَہ ہو تو

$$فَہ = فہ \pm عہ$$

$$\therefore \quad مس فَہ = \frac{مس فہ \pm مس عہ}{1 \mp مس فہ مس عہ} = \frac{طہ + ک}{1 - ک طہ}$$

جبکہ مس فہ کی بجائے حاصل شدہ قیمت رکھی جائے اور ± مس عہ کی بجائے ک لکھا جائے۔

اِس طرح دوسرے قبیل کے لیے

$$\frac{ر فر طہ}{فر ر} = \frac{طہ + ک}{1 - ک طہ}$$

اِس کا حل طالب علم پر مشق کے طور پر چھوڑا جاتا ہے۔

نتیجہ $\quad ر = ج (طہ + ک)^{ک^2 + 1} و^{-ک طہ}$

حاصل ہوگا۔

## حل طلب مثالیں۔

(۱) وہ منحنی معلوم کرو جس کا زیر عماد مستقل ہے۔

(۲) ایک منحنی کے کسی نقطہ ف پر کا مماس محور لا سے ت پر

ملتا ہے ۔ وہ منحنی معلوم کرو جس کے لیے و ف = ف ت، جہاں
و مبدا ہے ۔

(۳) وہ منحنی معلوم کرو جس کے لیے کسی نقطہ پر مماس اور سمتی نیم قطر کا درمیانی زاویہ سمتی زاویہ کا دوچند ہے ۔

(۴) وہ منحنی معلوم کرو جس کے لیے معین کا ظل عماد پر مستقل ہے ۔
منحنیوں کے حسب ذیل قبیلوں کے قائم مرماۃ معلوم کرو:

(۵) $لا^۲ - ما^۲ = ا^۲$ ، (۶) $لا^{\frac{۲}{۳}} + ما^{\frac{۲}{۳}} = ا^{\frac{۲}{۳}}$

(۷) $ف\, لا^۲ + ق\, ما^۲ = ا^۲$ ، (ف اور ق مستقل)

(۸) $ر\, طہ = ا$ (۹) $ر = \frac{ا\, طہ}{۱ + طہ}$

(۱۰) منحنیوں کا وہ قبیل معلوم کرو جو ہم مرکز دائروں کے ایک نظام کو مستقل زاویہ عہ پر قطع کرتے ہیں ۔

(۲۲)

## دوسرے باب پر متفرق مثالیں

(۱) $(۳ ما^۲ - لا) \frac{فرما}{فرلا} = ما$

(۲) $لا \frac{فرما}{فرلا} = ما + ۲ \sqrt{ما^۲ - لا^۲}$

(۳) مس لا جم ما فرما + جب ما فرلا + قو $^{جب لا}$ فرلا = ۰

(۴) $لا^۳ \frac{فرما}{فرلا} + ۳ ما^۲ = لا ما^۲$ [Sheffield]

(۵) $لا^۳ \frac{فرما}{فرلا} = ما^۳ + ما^۲ \sqrt{ما^۲ - لا^۲}$

(۶) ثابت کرو کہ $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = -\frac{\text{د لا + ھ ما + گ}}{\text{ھ لا + ب ما + ف}}$

مخروطیوں کے ایک قبیل کو تعبیر کرتا ہے ۔

(۷) ثابت کرو کہ مساوات $\text{ما فرلا} - \text{۲ لا فرما} = ۰$

مکافیوں کے ایک قبیل کو تعبیر کرتی ہے جن کے محور اور راس پر کے مماس مشترک ہیں ۔

(۸) ثابت کرو کہ مساوات

$$(\text{۴ لا + ۳ ما + ۱})\,\text{فرلا} + (\text{۳ لا + ۲ ما + ۱})\,\text{فرما} = ۰$$

زائدوں کے ایک قبیل کو تعبیر کرتی ہے جن کے متقارب خطوط

$$\text{لا + ما} = ۰ \quad \text{اور} \quad \text{۲ لا + ما + ۱} = ۰$$

ہیں ۔

(۹) اگر $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{۲ ما مس لا} = \text{جب لا}$

اور ما = ۰ جبکہ لا = $\frac{۱}{۳}\pi$ تو ثابت کرو کہ ما کی اعظم قیمت $\frac{۱}{۸}$ ہے ۔

[Math Tripos]

(۱۰) ثابت کرو کہ پہلے رتبہ اور پہلے درجہ کی عام متجانس مساوات

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ف}\left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}}\right)$$

کا حل

$$\text{لوک لا} = \int \frac{\text{فرو}}{\text{ف(و)} - \text{و}} + \text{ج}$$

ہے جہاں $\text{و} = \frac{\text{ما}}{\text{لا}}$

(۱۱) ثابت کرو کہ $\text{ف ما فرلا} + \text{ق لا فرما} + \text{لا}^{\text{م}}\text{ما}^{\text{ن}}(\text{ر ما فرلا} + \text{س لا فرما}) = ۰$

کا ایک متکمل جزو ضربی $\text{لا}^{\text{ھ}}\text{ما}^{\text{ک}}$ ہے اگر

$$\frac{\text{ھ+۱}}{\text{ف}} = \frac{\text{ک+۱}}{\text{ق}} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{ھ+م+۱}}{\text{ر}} = \frac{\text{ک+ن+۱}}{\text{س}}$$

اِس طریقہ کو مساوات

۳ ما فرلا – ۲ لا فرما + لا^۲ ما^-۱ (۱۰ ما فرلا – ۶ لا فرما) = ۰

کے حل کرنے میں استعمال کرو۔

(۱۲) مساوات ∫ (ف(لا ما) + فا(لا ما)) / (ف(لا ما) – فا(لا ما)) · فر(لا ما) / لا ما + لوک (لا / ما) = ج

کو تفرق کر کے تصدیق کرو کہ

ف (لا ما) ما فرلا + فا (لا ما) لا فرما = ۰

کا ایک متکمل جزو ضربی

(۲۳)

۱ / لا ما {ف (لا ما) – فا (لا ما)}

ہے۔

اِس سے مساوات (لا^۲ ما^۲ + لا ما + ۱) ما فرلا – (لا^۲ ما^۲ – لا ما + ۱) لا فرما = ۰

کو حل کرو۔

(۱۳) ثابت کرو کہ اگر مساوات م فرلا + ن فرما = ۰ ٹھیک ہے تو

جف ن / جف لا = جف م / جف ما

[اِس کے عکس کا ثبوت ضمیمہ ۱ میں دیکھو]

(۱۴) تصدیق کرو کہ ٹھیک مساوات کی شرط

(ف فرلا + ق فرما) ہ^{∫ف (لا) فرلا} = ۰

سے پوری ہوتی ہے اگر

جف ف / جف ما = جف ق / جف لا + ق ف (لا)

اِس سے ثابت کرو کہ ف فرلا + ق فرما = ۰ کے لیے ہمیشہ ایک متکمل جزو ضربی معلوم کیا جا سکتا ہے اگر

$$\frac{۱}{ق}\left[\frac{جف\,ف}{جف\,ما} - \frac{جف\,ق}{جف\,لا}\right]$$

صرف لا کا تفاعل ہو۔

اِس طریقہ سے (لا^۲ + لا ما^۲) فرلا + ۲ ما^۳ فرما = ۰

کو حل کرو۔

(۱۵) وہ منحنی معلوم کرو (۱) جس کا قطبی زیر مماس مستقل ہے،
(۲) جس کا قطبی زیر عماد مستقل ہے۔

(۱۶) وہ منحنی معلوم کرو جو مبداء میں سے گذرتا ہے اور جس کے لیے وہ رقبہ جو منحنی، معین، اور محور لا کے درمیان گھرا ہوا ہے معین کے مکعب کا ک گنا ہے۔

(۱۷) ایک منحنی کا عماد ف گ محور لا سے گ پر ملتا ہے۔ اگر مبداء سے گ کا فاصلہ ف کے فصلہ کا دوچند ہو تو ثابت کرو کہ منحنی ایک قائم زائد ہے۔

(۱۸) وہ منحنی معلوم کرو جس کے لیے لا کے محور کا وہ حصہ جو مبداء اور کسی نقطہ پر کے مماس کے درمیان منقطع ہوتا ہے اس نقطہ کے معین کے متناسب ہے۔

(۱۹) منحنیوں کے حسب ذیل قبیلوں کے قائم مراۃ معلوم کرو:

(۱) (لا − ۱)^۲ + ما^۲ + ۲ ا لا = ۰

(۲) ر = ا طہ،

(۳) ر = ا + جم ن طہ

پہلے نتیجہ کی ہندسی تعبیر معلوم کرو۔

(۲۰) ہم ماسکی مخروطیوں

$$\frac{لا^۲}{ا^۲ + ل} + \frac{ما^۲}{ب^۲ + ل} = ۱$$

کے نظام کی تفرقی مساوات معلوم کرو - اِس لیے ثابت کرو کہ یہ نظام خود اپنا آپ قائم مرماۃ ہے -

(۲۱) منحنیوں کا وہ قبیل معلوم کرو جو مکافیوں $ما^2 = ۴ ا لا$ کے قبیل کو ۴۵° پر قطع کرے -

(۲۲) اگر $ع + خ و = ف (لا + خ ما)$ جہاں ع، و، لا، ما تمام حقیقی ہیں تو ثابت کرو کہ قبیل ع = مستقل، و = مستقل، قائم مرماۃ ہیں - (۲۴)

نیز ثابت کرو کہ $\frac{جف^2 ع}{جف لا^2} + \frac{جف^2 ع}{جف ما^2} = ۰ = \frac{جف^2 و}{جف لا^2} + \frac{جف^2 و}{جف ما^2}$

[یہ مسئلہ برق سکونیات میں قوت کے خطوط اور مستقل قوہ کے خطوط یا ماحرکیات میں بہاؤ کے خطوط حاصل کرنے میں بہت کارآمد ہے، ع اور و کو مزدوج تفاعل کہتے ہیں -]

(۲۳) - ریڈیم کے انحطاط کی شرح مابقی مقدار کے متناسب ہے - ثابت کرو کہ کسی وقت ت پر اِس کی مقدار

$$ا = ا_۰ قو^{-ک ت}$$

سے حاصل ہوتی ہے -

(۲۴) اگر $\frac{فرو}{فرت} = ج (۱ - \frac{و^2}{ک^2})$ اور و = ۰ جبکہ ت = ۰ تو ثابت کرو کہ

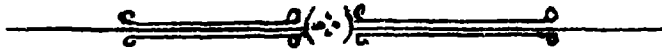
$$و = ک مسز \frac{ج ت}{ک}$$

[اس سے ہوا میں گرتے ہوئے جسم کی رفتار حاصل ہوتی ہے جبکہ ہوا کی مزاحمت کو $و^2$ کے متناسب لیا جائے - جیسے ت بڑھتا جاتا ہے و انتہائی قیمت ک کے قریب آتا جاتا ہے - اِس کے مشابہ ایک مساوات ہے

گیس کی روانیت معلوم ہوتی ہے جبکہ اس کو وقت ت تک روانی اثر کے تحت رکھا گیا ہو۔]

(۲۵) دو مائع ایک برتن میں جوش کھا رہے ہیں ۔ یہ معلوم ہو کہ کسی لمحہ پر بھاپ کی شکل میں ان کی جو مقداریں اُڑ جاتی ہیں ان کی نسبت اُن مقداروں کی نسبت کے متناسب ہے جو ابھی مائع کی حالت میں باقی ہیں ۔ ثابت کرو کہ یہ مقداریں (فرض کرو لا اور ما) شکل ذیل کے ایک رشتہ میں مربوط ہیں :

ما = ج لاک

[ پارٹنگٹن کی "Higher Mathematics for Students of Chemistry" سے یہ مثال لی گئی ہے ۔]

# تیسرا باب

## مستقل سروں والی خطی مساواتیں

۲۳ — اس باب میں ہم ایسی مساواتوں پر غور کریں گے جن کی شکل

$$\text{ب}_{\text{.}} \frac{\text{فر}^{\text{ن}}\,\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{ن}}} + \text{ب}_{\text{۱}} \frac{\text{فر}^{\text{ن-۱}}\,\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{ن-۱}}} + \text{ب}_{\text{۲}} \frac{\text{فر}^{\text{ن-۲}}\,\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{ن-۲}}} + \cdots\cdots$$

$$\text{ب}_{\text{ن-۱}} \frac{\text{فر ما}}{\text{فرلا}} + \text{ب}_{\text{ن}}\,\text{ما} = \text{ف (لا)}، \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

ہوتی ہے جہاں ف (لا)، لا کا ایک تفاعل ہے اور تمام ب مستقل ہیں۔
یہ مساواتیں تمام قسموں کے ارتعاش یعنے حیلی، برقی، یا صوتی ارتعاشوں کے مطالعہ میں بہت اہم ہیں۔ ان کی مثالیں ہم اس باب کے ختم پر مختلف سوالوں کی صورت میں دینگے۔
نیچے جو طریقے درج ہیں یولر اور ڈلمبرٹ[1] سے بالعموم منسوب کئے جاتے ہیں۔ نیز ہم اس شکل کی ہمزاد مساواتوں کے نظاموں پر اور ان

---

[1] جین لی رانڈ ڈلمبرٹ (پیرس، ۱۷۱۷ء تا ۱۷۸۳ء) سب سے زیادہ اس اصول کی وجہ سے مشہور ہے جو علم حرکت میں "ڈلمبرٹ کا اصول" کہلاتا ہے۔ اس اصول کو سیالوں کی حرکت پر استعمال کر کے وہ جزئی تفرقی مساواتوں پر پہنچا تھا۔

مساواتوں پر غور کرینگے جو اِس شکل میں ایک سادہ استحالہ کے ذریعہ تحویل پذیر ہوں ۔

## ۲۴ ۔ سادہ ترین صورت ۔ پہلے رتبہ کی مساواتیں۔

اگر ہم ن = ۱ اور ف (لا) = ۰ لیں تو مساوات (۱) ہو جاتی ہے

$$ب_0 \frac{فر\,ما}{فر\,لا} + ب_1\,ما = 0 \text{ ، } \quad \ldots\ldots (۲)$$

یعنی $$ب_0 \frac{فر\,ما}{ما} + ب_1\,فرلا = 0$$

یا $$ب_0\,لوک\,ما + ب_1\,لا = مستقل$$

اس لیے $$لوک\,ما = -\frac{ب_1\,لا}{ب_0} + مستقل$$

$$= -\frac{ب_1\,لا}{ب_0} + لوک\,ا \quad (فرض\ کرو)$$

$$ما = ا\,و^{-\frac{ب_1 لا}{ب_0}}$$

## ۲۵ ۔ دوسرے رتبہ کی مساواتیں ۔

اگر ہم ن = ۲ اور ف (لا) = ۰ لیں تو مساوات (۱) ہو جاتی ہے

$$ب_0 \frac{فر^2\,ما}{فر\,لا^2} + ب_1 \frac{فر\,ما}{فر\,لا} + ب_2\,ما = 0 \text{ ، } \quad \ldots\ldots (۳)$$

مساوات (۲) کے حل سے یہ اندازہ ہوتا ہے کہ حل $ما = ا\,و^{م\,لا}$ (۲۶) جہاں م کوئی خاص مستقل ہے شاید (۳) کو پورا کر سکے ۔

چنانچہ ما کی اِس قیمت سے مساوات (۳)،

$$ا\,و^{م\,لا}\left(ب_0\,م^2 + ب_1\,م + ب_2\right) = 0$$

میں تحویل ہوتی ہے -

اس طرح اگر م مساوات

$$ب_۰ م^۲ + ب_۱ م + ب_۲ = ۰ ، \quad ........ (۴)$$

کی ایک اصل ہو تو $ما = ا\, قو^{م لا}$ مساوات (۳) کا ایک حل ہے خواہ ا کی قیمت کچھ ہی ہو -

فرض کرو کہ مساوات (۴) کی اصلیں عہ اور بہ ہیں - تب اگر عہ اور بہ غیر مساوی ہیں تو مساوات (۳) کے دو حل ہیں یعنے

$$ما = ا\, قو^{عہ لا} \quad \text{اور} \quad ما = ب\, قو^{بہ لا}$$

اب اگر ہم مساوات (۳) میں $ما = ا\, قو^{عہ لا} + ب\, قو^{بہ لا}$ درج کریں تو حاصل ہوگا

$$ا\, قو^{عہ لا} (ب_۰ عہ^۲ + ب_۱ عہ + ب_۲) + ب\, قو^{بہ لا} (ب_۰ بہ^۲ + ب_۱ بہ + ب_۲) = ۰$$

جو صریحاً درست ہے کیونکہ عہ اور بہ مساوات (۴) کی اصلیں ہیں -

اِس طرح دو حلوں کے حاصل جمع سے ایک تیسرا حل حاصل ہوتا ہے [ یہ اِس واقعہ سے فوراً ظاہر ہے کہ مساوات (۳) خطی ہے ]- چونکہ اِس تیسرے حل میں دو اختیاری مستقل ہیں جن کی تعداد مساوات کے رتبہ کے مساوی ہے اِس لیے ہم اِس حل کو عام حل سمجھینگے -

مساوات (۴) کو "امدادی مساوات" کہتے ہیں -

## مثال -

$$۲ \frac{فر^۲ ما}{فر لا^۲} + ۵ \frac{فر ما}{فر لا} + ۲ ما = ۰$$

کو حل کرنے کے لیے آزمایشی حل $ما = ا\, قو^{م لا}$ فرض کرو -

چنانچہ اِس سے حاصل ہوگا

$$\text{ا}\,\text{قو}^{\text{م لا}}\,(\text{۲م}^{۲} + \text{۵م} + ۲) = ۰$$

یہ م = -۲ یا - $\frac{۱}{۲}$ سے پوری ہوتی ہے۔ اِس لیے عام حل

$$\text{ما} = \text{ا}\,\text{قو}^{-۲\,\text{لا}} + \text{ب}\,\text{قو}^{-\frac{۱}{۲}\,\text{لا}}$$

ہے

## ۲۶ — ترمیم جبکہ امدادی مساوات کی اصلیں خیالی یا ملتف ہوں۔

جب امدادی مساوات (۴) کی اصلیں شکل ف + خ ق، ف - خ ق کی ہوتی ہیں جہاں $\text{خ}^{۲} = -۱$ تو حل

$$\text{ما} = \text{ا}\,\text{قو}^{(\text{ف} + \text{خ ق})\,\text{لا}} + \text{ب}\,\text{قو}^{(\text{ف} - \text{خ ق})\,\text{لا}}$$

میں ترمیم کرنا مناسب ہے تاکہ اُس میں خیالی مقداریں شامل نہ ہونے پائیں۔ اِس کے لیے ہم مثلوں

$$\text{قو}^{\text{خ ق لا}} = \text{جم ق لا} + \text{خ جب ق لا}،$$

$$\text{قو}^{-\text{خ ق لا}} = \text{جم ق لا} - \text{خ جب ق لا}$$

کا (جو کسی علم مثلث تحلیلی کی کتاب میں مل سکتے ہیں) استعمال کرتے ہیں۔ چنانچہ مساوات (۵) ہو جاتی ہے

$$\text{ما} = \text{قو}^{\text{ف لا}}\left\{\text{ا}\,(\text{جم ق لا} + \text{خ جب ق لا}) + \text{ب}\,(\text{جم ق لا} - \text{خ جب ق لا})\right\}$$

$$= \text{قو}^{\text{ف لا}}\left\{\text{ع جم ق لا} + \text{ف جب ق لا}\right\}،$$

ا + ب کی بجائے

ع اور خ (ا - ب) کی بجائے ف رکھنے سے۔

ع اور ف بالکل ویسے ہی اختیاری مستقل ہیں جیسے ا اور ب ہیں۔ پہلی نظر میں شائد یہ معلوم ہو کہ ف کو خیالی ہونا چاہیئے لیکن اس کا ایسا ہونا ضروری نہیں ہے۔ مثلاً اگر ا = ۱ + ۲ خ، ب = ۱ - ۲ خ تو ع = ۲ اور ف = -۴

(۲۷)

مثال - $\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{2}} - ۶\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + ۱۳\,\text{ما} = ۰$

امدادی مساوات $\text{م}^{2} - ۶\,\text{م} + ۱۳ = ۰$ ہے جس کی اصلیں $\text{م} = ۳ \pm ۲\,\text{خ}$ ہیں،

حل کو $\text{ما} = \text{ا}\,\text{قو}^{(۳+۲\text{خ})\text{لا}} + \text{ب}\,\text{قو}^{(۳-۲\text{خ})\text{لا}}$ لکھا جا سکتا ہے یا

$$\text{ما} = \text{ج}\,\text{قو}^{۳\text{لا}}\,\text{جم}\,(۲\,\text{لا} - \text{عہ})$$

جہاں $\text{ج جم عہ} = \text{ع}$ اور $\text{ج جب عہ} = \text{ف}$

اس لئے $\text{ج} = \sqrt{\text{ع}^{2} + \text{ف}^{2}}$ اور $\text{مس عہ} = \frac{\text{ع}}{\text{ف}}$

## ۲۷ ۔ مساوی اصلوں کی صورت۔

جب امدادی مساوات میں مساوی اصلیں عہ = بہ ہوں تو حل

$$\text{ما} = \text{ا}\,\text{قو}^{\text{عہ لا}} + \text{ب}\,\text{قو}^{\text{بہ لا}}$$

حل $\text{ما} = (\text{ا} + \text{ب})\,\text{قو}^{\text{عہ لا}}$

میں تحویل ہوتا ہے۔

اب دو اختیاری مستقلوں کا مجموعہ ا + ب فی الحقیقت صرف ایک اختیاری مستقل ہے۔ اس لیے اس حل کو عام ترین حل نہیں کہا جا سکتا۔

ہم آیندہ [دفعہ ۳۴] ثابت کرینگے کہ عام حل

$$\text{ما} = (\text{ا} + \text{ب لا})\,\text{و}^{\text{ع لا}}$$

ہے۔

## ۲۸ - دو سے اعلیٰ ترتیبوں کی مساواتوں پر توسیع۔

دفعات ۲۵ اور ۲۶ کے طریقے مساوات (۱) پر اطلاق پذیر ہیں خواہ ن کی قیمت کچھ ہی ہو بشرطیکہ ف (لا) = ۰ ۔

مثال (۱)
$$\frac{\text{فر}^{3}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{3}} - ۶\,\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{2}} + ۱۱\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} - ۶\,\text{ما} = ۰$$

امدادی مساوات $\text{م}^{3} - ۶\,\text{م}^{2} + ۱۱\,\text{م} - ۶ = ۰$ ہے جس کی اصلیں

م = ۱، ۲ یا ۳ ہیں۔

اس لیے
$$\text{ما} = \text{ا}\,\text{و}^{\text{لا}} + \text{ب}\,\text{و}^{\text{۲لا}} + \text{ج}\,\text{و}^{\text{۳لا}}$$

مثال (۲)
$$\frac{\text{فر}^{3}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{3}} - ۸\,\text{ما} = ۰$$

امدادی مساوات $\text{م}^{3} - ۸ = ۰$ ہے یعنی

$$(\text{م} - ۲)(\text{م}^{2} + ۲\,\text{م} + ۴) = ۰$$

$$\therefore \quad \text{م} = ۲\text{، یا } -۱ \pm \text{خ}\sqrt{۳}$$

$$\therefore \quad \text{ما} = \text{ا}\,\text{و}^{\text{۲لا}} + \text{و}^{-\text{لا}}\,(\text{ع جم لا}\sqrt{۳} + \text{ف جب لا}\sqrt{۳})$$

$$\text{یا} \quad \text{ما} = \text{ا}\,\text{و}^{\text{۲لا}} + \text{ج}\,\text{و}^{-\text{لا}}\,\text{جم}(\text{لا}\sqrt{۳} - \text{عہ})$$

### حل طلب مثالیں

(۸،

حل کرو:

(۱) $\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2} + ۴\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + ۳\,\text{ما} = ۰$، (۲) $\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2} + ۴\,\text{ما} = ۰$،

(۳) $\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2} + ۷\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + ۱۲\,\text{ما} = ۰$، (۴) $\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2} - ۴\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + ۵\,\text{ما} = ۰$،

(۵) $\frac{\text{فر}^2\text{س}}{\text{فرت}^2} + ۴\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} + ۱۳\,\text{س} = ۰$، (۶) $\frac{\text{فر}^2\text{س}}{\text{فرت}^2} + ۴\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} = ۰$،

(۷) $\frac{\text{فر}^3\text{ما}}{\text{فرلا}^3} + ۲\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2} - \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - ۲\,\text{ما} = ۰$

(۸) مثال (۷) کا حل کیا ہو جائیگا اگر ابتدائی شرطیں

$\text{ما} = ۱$، $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = ۰$ جبکہ $\text{لا} = ۰$

ہوں یا اگر ما محدود رہے جبکہ $\text{لا} = +\infty$

حل کرو

(۹) $\frac{\text{فر}^4\text{ما}}{\text{فرلا}^4} + ۱۳\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2} + ۳۶\,\text{ما} = ۰$، (۱۰) $\frac{\text{فر}^4\text{ما}}{\text{فرلا}^4} - ۱۳\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2} + ۳۶\,\text{ما} = ۰$،

(۱۱) $\frac{\text{فر}^3\text{ما}}{\text{فرلا}^3} + ۸\,\text{ما} = ۰$، (۱۲) $\frac{\text{فر}^6\text{ما}}{\text{فرلا}^6} - ۶۴\,\text{ما} = ۰$،

(۱۳) $\text{ل}\frac{\text{فر}^2\text{طہ}}{\text{فرت}^2} + \text{ج}\,\text{طہ} = ۰$، اگر یہ دیا گیا ہو کہ $\text{طہ} = \text{عہ}$ اور $\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}} = ۰$ جبکہ $\text{ت} = ۰$

[یہ تقریبی مساوات طول ل کے ایک ایسے سادہ رقاص کے چھوٹے اہتزازوں کے لیے ہے جس کی حرکت سکون کے محل سے جس کا میلان افق کے ساتھ عہ تھا شروع ہوئی تھی]

(۱۴) وہ شرط معلوم کرو کہ

$\text{م}\frac{\text{فر}^2\text{س}}{\text{فرت}^2} + \text{ک}\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} + \text{ج}\,\text{س} = ۰$

کے حل میں مثلثی رقمیں شامل ہوں ۔

[یہ مساوات کمیت م کے ایک ذرہ کی حرکت کی ہے جبکہ ذرہ اپنے خط حرکت کے ایک ثابت نقطہ کی جانب ایک قوت سے جو اس نقطہ سے اس کے فاصلہ کا ج گنا ہے جذب ہوتا ہے اور رگڑ کی ایک مزاحمت سے جو اس کی رفتار کا ک گنا ہے قصر پاتا ہے ۔ مطلوبہ شرط سے یہ ظاہر ہے کہ حرکت اہتزازی ہونی چاہیئے مثلاً سُر کا دو شاخہ جو ہوا میں مرتعش ہو جہاں لچک کی قوت جو اس کو توازن کے محل کی طرف مسترد کرنے کا میلان رکھتی ہے ہٹاؤ کے متناسب ہے اور ہوا کی مزاحمت رفتار کے متناسب ہے ۔]

(۱۵) ثابت کرو کہ اگر ک اسقدر چھوٹا ہو کہ $\frac{ک^2}{م ج}$ قابل نظر انداز ہے تو مثال (۱۴) کی مساوات کا حل اس حل کا تقریباً $و^{\frac{-ک ت}{2 م}}$ گنا ہے جو حاصل ہوتا اگر ک صفر ہوتا ۔

[اس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ خفیف قصر سے تعدد میں عملاً کوئی تبدیلی نہیں ہوتی لیکن متواتر ارتعاشوں کا حیط ایک سلسلہ ہندسیہ میں گھٹتا ہے ]

(۱۶) $ل \frac{فر^2 ق}{فر ت^2} + ر \frac{فر ق}{فر ت} + \frac{ق}{ج} = ۰$ کو حل کرو اگر یہ دیا گیا ہو کہ $ق = ق_۰$ اور $\frac{فر ق}{فر ت} = ۰$ جبکہ $ت = ۰$ ۔ اور یہ کہ $ج ر^2 < ۴ ل$ ۔ (۲۹)

[ق وہ بار ہے جو وقت ت پر گنجائش ج کے ایک لیڈنی مرتبان کے ایک کوٹ پر ہوتا ہے جب کہ مرتبان کے کوٹ وقت ت = ۰ پر ایک تار سے جس کی مزاحمت ر اور ذاتی امالہ کی قدر

ل سے مربوط کئے گئے ہوں۔]

## ۲۹۔ متمم تفاعل اور خاص تکملہ۔

اب تک ہم نے صرف ایسی مثالوں پر بحث کی ہے جن میں مساوات (۱) کا تفاعل ف (لا) صفر کے مساوی تھا۔ اب ہم اُس رشتہ کو بیان کریں گے جو اِس مساوات کے اُس حل میں جبکہ ف (لا) صفر کے مساوی نہ ہو اور اُس حل میں جو ف (لا) کو صفر کے مساوی رکھنے سے حاصل ہوتا ہے پایا جاتا ہے۔ ہم ایک سادہ مثال سے ابتدا کرتے ہیں چنانچہ مساوات

$$۲\frac{فر^۲ ما}{فر لا^۲} + ۵\frac{فر ما}{فر لا} + ۲ ما = ۵ + ۲ لا$$

پر غور کرو۔

یہ ظاہر ہے کہ اِس کا ایک حل ما = لا ہے۔ ایسا کوئی حل جس میں اختیاری مستقل شامل نہ ہوں **خاص تکملہ** کہلاتا ہے۔

اب اگر ہم ما = لا + و لکھیں تو تفرقی مساوات ہو جاتی ہے

$$۲\frac{فر^۲ و}{فر لا^۲} + ۵\left(۱ + \frac{فر و}{فر لا}\right) + ۲(لا + و) = ۵ + ۲ لا$$

یعنی

$$۲\frac{فر^۲ و}{فر لا^۲} + ۵\frac{فر و}{فر لا} + ۲ و = ۰$$

جس سے

$$و = ا\,قو^{-۲ لا} + ب\,قو^{-\frac{۱}{۲} لا}$$

$$\therefore \quad ما = لا + ا\,قو^{-۲ لا} + ب\,قو^{-\frac{۱}{۲} لا}$$

وہ رقمیں جن میں اختیاری مستقل شامل ہوں متمم تفاعل کہلاتی ہیں۔

اِس کی تعمیم آسانی سے کیجاسکتی ہے - چنانچہ اگر

$$\text{ب}_\cdot \frac{\text{فر}^{\text{ن}}\,\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{ن}}} + \text{ب}_1 \frac{\text{فر}^{\text{ن}-1}\,\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{ن}-1}} + \cdots\cdots + \text{ب}_{\text{ن}-1} \frac{\text{فر ما}}{\text{فرلا}} + \text{ب}_{\text{ن}}\,\text{ما}$$

$$= \text{ف}(\text{لا})\text{،} \quad \cdots\cdots (6)$$

کا ایک خاص تکملہ ما = ع ہو تو

$$\text{ب}_\cdot \frac{\text{فر}^{\text{ن}}\,\text{ع}}{\text{فرلا}^{\text{ن}}} + \text{ب}_1 \frac{\text{فر}^{\text{ن}-1}\,\text{ع}}{\text{فرلا}^{\text{ن}-1}} + \cdots\cdots + \text{ب}_{\text{ن}-1} \frac{\text{فر ع}}{\text{فرلا}} + \text{ب}_{\text{ن}}\,\text{ع}$$

$$= \text{ف}(\text{لا})\text{،} \quad \cdots (7)$$

اب مساوات (۶) میں ما = ع + و رکھو اور مساوات (۷) کو تفریق کرو تو

$$\text{ب}_\cdot \frac{\text{فر}^{\text{ن}}\,\text{و}}{\text{فرلا}^{\text{ن}}} + \text{ب}_1 \frac{\text{فر}^{\text{ن}-1}\,\text{و}}{\text{فرلا}^{\text{ن}-1}} + \cdots\cdots + \text{ب}_{\text{ن}-1} \frac{\text{فر و}}{\text{فرلا}}$$

$$+ \text{ب}_{\text{ن}}\,\text{و} = 0\text{،} \quad \cdots\cdots (8)$$

اگر (۸) کا حل و = فا(لا) ہو جس میں ن اختیاری مستقل شامل ہوں تو (۶) کا عام حل

$$\text{ما} = \text{ع} + \text{فا}(\text{لا})$$

ہے اور فا(لا) متمم تفاعل ہے -

پس معلوم ہوا کہ مستقل سروں والی ایک خطی تفرقی مساوات کا عام حل ایک خاص تکملہ اور متمم تفاعل کا حاصل جمع ہوتا ہے جہاں متمم تفاعل اُس مساوات کا حل ہے جو دی ہوئی تفرقی مساوات میں لا کے تفاعل کی بجائے صفر رکھنے سے حاصل ہوتی ہے -

## حل طلب مثالیں -

مثالوں (۱) تا (۳) میں اس امر کی تصدیق کرو کہ دئے ہوئے تفاعل ان کے ساتھ لکھی ہوئی مساواتوں کے خاص تکملے ہیں۔ نیز عام حل معلوم کرو:

(۱) $\text{قو}^{\text{لا}}$ ، $\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}} - ۲\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + ۲\,\text{ما} = \text{قو}^{\text{لا}}$

(۲) ۳ ، $\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}} - ۱۲\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + ۱۲\,\text{ما} = ۳۶$

(۳) ۲ جب ۳لا ، $\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}} + ۴\,\text{ما} = -۱۰\,\text{جب ۳لا}$

حسب ذیل مثالوں میں مستقلوں کی وہ قیمتیں معلوم کرو جن کے لیے دئے ہوئے تفاعل ان کے ساتھ لکھی ہوئی مساواتوں کے خاص تکملے ہو جائیں:

(۴) $\text{ا قو}^{\text{ب لا}}$ ، $\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}} + ۱۳\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + ۴۲\,\text{ما} = ۱۱۲\,\text{قو}^{\text{لا}}$

(۵) $\text{ا قو}^{\text{ب ت}}$ ، $\frac{\text{فر}^{2}\text{س}}{\text{فرت}^{2}} + ۹\,\text{س} = ۶۰\,\text{قو}^{\text{ت}}$

(۶) ا جب پ لا ، $\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}} + \text{ما} = ۱۲\,\text{جب ۲لا}$

(۷) ا جب پ لا + ب جم پ لا ، $\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}} + ۴\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + ۳\,\text{ما} = ۸\,\text{جم لا}$
$-۶\,\text{جب لا}$

(۸) ا ، $\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}} + ۵\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + ۶\,\text{ما} = ۱۲$

حسب ذیل مساواتوں کے خاص تکملے آزمائش سے معلوم کرو:

(۹) $\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}} + ۲\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + ۵\,\text{ما} = ۸۰\,\text{قو}^{\text{۳لا}}$

(۱۰) $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}}$ + ۲ $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ + ۳۷ ما = ۳۰۰ قو^۷ لا

(۱۱) $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}}$ + ۸ $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ + ۲۵ ما = ۵۰

## ۳۰ ۔ عامل عف اور جبر و مقابلہ کے اساسی قانون

جب خاص تکملہ اوپر کے طریقوں سے معلوم نہ ہو سکے تو بعض دیگر طریقے جن میں عامل عف شامل ہوتا ہے استعمال کئے جاتے ہیں۔

عامل عف سے $\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}$ مراد ہے ۔ یہ عامل متمم تفاعل کی شکل کو جبکہ امدادی تفاعل کی اصلیں مساوی ہوں متعین کرنے میں بھی کارآمد ہے۔

عف^۲ ، $\frac{\text{فر}^{۲}}{\text{فر لا}^{۲}}$ کی بجائے اور عف^۳ ، $\frac{\text{فر}^{۳}}{\text{فر لا}^{۳}}$ کی بجائے

استعمال کیا جائے گا، علیٰ ہذا القیاس ۔

(۳۱) اب جملہ ۲ $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}}$ + ۵ $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ + ۲ ما کو شکل

۲ عف^۲ ما + ۵ عف ما + ۲ ما

میں لکھا جا سکتا ہے یا شکل

( ۲ عف^۲ + ۵ عف + ۲ ) ما

میں ۔ ہم اس کو اجزائے ضربی کی شکل

( ۲ عف + ۱ ) ( عف + ۲ ) ما

میں بھی لکھ سکتے ہیں، ہم نے یہاں عف کے جملہ کے اجزائے ضربی یہ سمجھ کر معلوم کئے ہیں گویا کہ عف ایک معمولی جبریہ مقدار رہے ۔ کیا یہ جائز ہے؟

وہ عمل جو معمولی جبر و مقابلہ میں کئے جاتے ہیں تین قانونوں پر

مبنی ہیں :

۱۔ قانون تقسیمی، م (ا + ب) = م ا + م ب

۲۔ قانون تبدیلی، ا ب = ب ا

۳۔ قانون قوت نما، $ا^{م} \times ا^{ن} = ا^{م+ن}$

اب عف اِن میں سے پہلے اور تیسرے قانونوں کو پورا کرتا ہے کیونکہ

عف (ع + و) = عف ع + عف و

اور $عف^{م} \times عف^{ن} ع = عف^{م+ن} ع$ (م اور ن مثبت صحیح اعداد)

اب رہا دوسرا قانون تو اس کے متعلق عف (ج ع) = ج (عف ع) درست ہے اگر ج ایک مستقل ہے لیکن درست نہیں اگر ج متغیر ہے۔ نیز

$عف^{م} (عف^{ن} ع) = عف^{ن} (عف^{م} ع)$، (م اور ن مثبت صحیح اعداد)

پس ہم دیکھتے ہیں کہ عف جبر و مقابلہ کے اساسی قانونوں کو پورا کرتا ہے، صرف وہ قانون تبدیلی کو متغیروں کی صورت میں پورا نہیں کرتا۔ آئندہ ہم لکھینگے

$$فا(عف) \equiv ب عف^{ن} + ب_{۱} عف^{ن-۱} + ب_{۲} عف^{ن-۲} + \ldots\ldots$$

$$+ ب_{ن-۱} عف + ب_{ن}$$

جہاں تمام ب مستقل ہیں اور ن ایک مثبت صحیح عدد ہے۔ ہم اس کو اجزائے ضربی میں تحلیل کر سکتے ہیں یا کوئی اور عمل جو جبر و مقابلہ کے

اساسی قانونوں پر منحصر ہوں استعمال میں لا سکتے ہیں ایسی مثال کے لئے جس میں عاملوں کے لیے قانون قوت نما درست نہیں رہتا جبکہ عف کی منفی قوتیں واقع ہوتی ہیں دیکھو دفعہ ۳۷ کی مثال (۳) -

**۳۱ -** فا(عف) قو^{ا لا} = قو^{ا لا} فا(ا)

چونکہ عف قو^{ا لا} = ا قو^{ا لا}

عف^۲ قو^{ا لا} = ا^۲ قو^{ا لا}

اور علیٰ ہذا اس لیے

فا(عف) قو^{ا لا} = (ب عف^ن + ب₁ عف^{ن-۱} + ..... + ب_{ن-۱} عف + ب_ن) قو^{ا لا}

= (ب ا^ن + ب₁ ا^{ن-۱} + ..... + ب_{ن-۱} ا + ب_ن) قو^{ا لا}

= قو^{ا لا} فا(ا)

(۳۲) **۳۲ -** فا(عف) {قو^{ا لا} و} = قو^{ا لا} فا(عف + ا) و جہاں و، لا کا کوئی تفاعل ہے -

حاصل ضرب کے ن ویں تفرقی سر کے لئے لیب نیز کا جو مسئلہ ہے اُس کی رُو سے

عف^ن {قو^{ا لا} و} = (عف^ن قو^{ا لا}) و + ن (عف^{ن-۱} قو^{ا لا}) (عف و)

+ ۱/۲ ن (ن-۱) (عف^{ن-۲} قو^{ا لا}) (عف^۲ و) + .......

+ قو^{ا لا} (عف^ن و)

= ا$^{ن}$ قو$^{الا}$ و + ن ا$^{ن-۱}$ قو$^{الا}$ عف و + $\frac{۱}{۲}$ ن(ن-۱) ا$^{ن-۲}$ قو$^{الا}$ عف$^{۲}$ و +

....... + قو$^{الا}$ عف$^{ن}$ و

= قو$^{الا}$ (ا$^{ن}$ + ن ا$^{ن-۱}$ عف + $\frac{۱}{۲}$ ن (ن-۱) ا$^{ن-۲}$ عف$^{۲}$ + .....

... + عف$^{ن}$) و

= قو$^{الا}$ (عف + ا)$^{ن}$ و

اسی طرح عف$^{ن-۱}${قو$^{الا}$ و} = قو$^{الا}$ (عف + ا)$^{ن-۱}$ و، علیٰ ہذا القیاس

اس لیے فا(عف){قو$^{الا}$ و} = (ب عف$^{ن}$ + ب$_{۱}$ عف$^{ن-۱}$ + ...

..... + ب$_{ن-۱}$ عف + ب$_{ن}$){قو$^{الا}$ و}

= قو$^{الا}${ب (عف + ا)$^{ن}$ + ب$_{۱}$ (عف + ا)$^{ن-۱}$ + .....

..... + ب$_{ن-۱}$ (عف + ا) + ب$_{ن}$} و

= قو$^{الا}$ فا (عف + ا) و

## ۳۳ - فا(عف$^{۲}$) جم الا = فا(- ا$^{۲}$) جم الا

چونکہ عف$^{۲}$ جم الا = - ا$^{۲}$ جم الا

عف$^{۴}$ جم الا = (- ا$^{۲}$)$^{۲}$ جم الا

. . . . . . . . . . . . . . . .

اِس لیے فا(عف$^{۲}$) جم الا = (ب عف$^{۲ن}$ + ب$_{۱}$ عف$^{۲ن-۲}$ + .....

..... + ب$_{ن-۱}$ عف$^{۲}$ + ب$_{ن}$) جم الا

$$= \{ ب_۰ (-ا^۲)^ن + ب_۱ (-ا^۲)^{ن-۱} + \dots + ب_{ن-۱} (-ا^۲) + ب_ن \} جم ا لا$$

$$= فا (-ا^۲) جم ا لا$$

اسی طرح $فا (عف^۲) جب ا لا = فا (-ا^۲) جب ا لا$

## ۳۴ ۔ متمم تفاعل جبکہ امدادی مساوات کی اصلیں مساوی ہوں ۔

جب امدادی مساوات کی اصلیں عہ اور عہ مساوی ہوتی ہیں تو اس کو شکل

$$م^۲ - ۲ م عہ + عہ^۲ = ۰$$

میں لکھا جا سکتا ہے ۔ تب ابتدائی تفرقی مساوات

$$\frac{فر^۲ ما}{فر لا^۲} - ۲ عہ \frac{فر ما}{فر لا} + عہ^۲ ما = ۰$$

یعنے $(عف^۲ - ۲ عہ عف + عہ^۲) ما = ۰$

$$(عف - عہ)^۲ ما = ۰ \quad \dots\dots\dots\dots (۹)$$

ہو گی ۔

ہم پہلے معلوم کر چکے ہیں کہ $ما = ا قو^{عہ لا}$ ایک حل ہے ۔ عام حل معلوم کرنے کے لیے $ما = قو^{عہ لا} و$ رکھو جہاں و ، لا کا ایک تفاعل ہے ۔

دفعہ ۳۲ کی رُو سے

$$(عف - عہ)^۲ \{ قو^{عہ لا} و \} = قو^{عہ لا} (عف - عہ + عہ)^۲ و = قو^{عہ لا} عف^۲ و$$

پس مساوات (۹) ہو جاتی ہے

$$\text{عف}^2 \, \text{و} = 0$$

یعنی $\text{و} = \text{ا} + \text{ب}\,\text{لا}$

اس لیے $\text{ما} = \text{ۏ}^{\text{ع}\,\text{لا}} (\text{ا} + \text{ب}\,\text{لا})$

اسی طرح مساوات $(\text{عف} - \text{عہ})^{\text{پ}}\, \text{ما} = 0$ (۳۳)

مساوات $\text{عف}^{\text{پ}}\, \text{و} = 0$

میں تحویل ہوتی ہے اور اس سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{و} = (\text{ا}_1 + \text{ا}_2\,\text{لا} + \text{ا}_3\,\text{لا}^2 + \cdots + \text{ا}_{\text{پ}}\,\text{لا}^{\text{پ}-1})$$

اور $\text{ما} = \text{ۏ}^{\text{ع}\,\text{لا}} (\text{ا}_1 + \text{ا}_2\,\text{لا} + \text{ا}_3\,\text{لا}^2 + \cdots + \text{ا}_{\text{پ}}\,\text{لا}^{\text{پ}-1})$

جب متعدد مساوی اصلیں ہوں مثلاً

$$(\text{عف} - \text{عہ})^{\text{پ}} (\text{عف} - \text{بہ})^{\text{ق}} (\text{عف} - \text{جہ})^{\text{ر}}\, \text{ما} = 0، \quad \ldots (10)$$

تو چونکہ عاملوں پر قانون تبدیلی جاری کیا جاسکتا ہے اس لیے ہم اس مساوات کو شکل

$$(\text{عف} - \text{بہ})^{\text{ق}} (\text{عف} - \text{جہ})^{\text{ر}} \{(\text{عف} - \text{عہ})^{\text{پ}}\, \text{ما}\} = 0$$

میں لکھ سکتے ہیں اور یہ مساوات، سادہ تر مساوات

$$(\text{عف} - \text{عہ})^{\text{پ}}\, \text{ما} = 0، \quad \ldots (11)$$

کے کسی حل سے پوری ہوتی ہے۔

اسی طرح مساوات (۱۰)

$$(\text{عف} - \text{بہ})^{\text{ق}}\, \text{ما} = 0، \quad \ldots (12)$$

یا

$$(\text{عف} - \text{جہ})^{\text{ر}}\, \text{ما} = 0، \quad \ldots (13)$$

کے کسی حل سے پوری ہوتی ہے۔

مساوات (۱۰) کا عام حل مساواتوں (۱۱)، (۱۲)، اور (۱۳) کے عام حلوں کا مجموعہ ہے اور اس میں (پ + ق + ر) اختیاری مستقل شامل ہوں گے۔

**مثال (۱)** حل کرو (عف$^{4}$ - ۸ عف$^{2}$ + ۱۶) ما = ۰

یعنی (عف$^{2}$ - ۴)$^{2}$ ما = ۰

امدادی مساوات (م$^{2}$ - ۴)$^{2}$ = ۰ ہے

جس کی اصلیں م = ۲ (دو مرتبہ)، یا م = -۲ (دو مرتبہ) ہیں۔
اس لیے قاعدہ کی رو سے حل ہے

ما = (ا + ب لا) قو$^{\text{۲لا}}$ + (ع + ف لا) قو$^{\text{-۲لا}}$

**مثال (۲)** حل کرو (عف$^{2}$ + ۱)$^{2}$ ما = ۰

امدادی مساوات (م$^{2}$ + ۱)$^{2}$ = ۰ ہے

∴ م = خ (دو مرتبہ) یا م = -خ (دو مرتبہ)

∴ ما = (ا + ب لا) قو$^{\text{خلا}}$ + (ع + ف لا) قو$^{\text{-خلا}}$

یا ما = (پ + ق لا) جم لا + (ر + س لا) جب لا

## حل طلب مثالیں۔

(۱) (عف$^{4}$ + ۲ عف$^{3}$ + عف$^{2}$) ما = ۰،

(۲) (عف$^{6}$ + ۳ عف$^{4}$ + ۳ عف$^{2}$ + ۱) ما = ۰

(۳) (عف$^{4}$ - ۲ عف$^{3}$ + ۲ عف$^{2}$ - ۲ عف + ۱) ما = ۰،

(۴) (۴ عف$^{5}$ - ۳ عف$^{3}$ - عف$^{2}$) ما = ۰

(۵) ثابت کرو کہ

فا(عف$^{2}$)(پ جمز ا لا + ق جبز ا لا) = ف(ا$^{2}$)(پ جمز ا لا + ق جبز ا لا)

(۶) ثابت کرو کہ (عف - ا)$^{ن}$ (قو$^{لا}$ جب ب لا) = ب$^{ن}$ قو$^{لا}$ جب ب لا

## ۳۵ ـ خاص تکملہ کو معلوم کرنے کے لیے لامختصر طریقے جبکہ فا (لا) = قو$^{لا}$ ۔

حسب ذیل طریقے عامل عف کو اس طرح استعمال کرنے پر مبنی ہیں گویا کہ وہ ایک معمولی جبریہ مقدار ہے ۔ اول ہم کسی جبریہ عمل کو جو مناسب معلوم ہوا اختیار کریں گے اور جب اِس کی تکمیل سے نتیجہ حاصل ہو جائے تو اِس نتیجہ کی تصدیق راست تفرق کے عمل سے کیجائے گی ۔ ترقیم

$$\frac{1}{\text{فا (عف)}}\ \text{ف (لا)}$$

کو مساوات فا (عف) ما = ف (لا)

کے خاص تکملہ کے لیے استعمال کیا جائے گا ۔

(۱) اگر ف (لا) = قو$^{لا}$ تو دفعہ ۳۱ کے نتیجہ

$$\text{فا (عف)}\ \text{قو}^{\text{لا}} = \text{قو}^{\text{لا}}\ \text{فا (ا)}$$

سے یہ اندازہ ہوتا ہے کہ $\frac{1}{\text{فا (عف)}}$ قو$^{لا}$ کی ایک قیمت $\frac{1}{\text{فا (ا)}}$ قو$^{لا}$ ہوسکتی ہے جبتک کہ فا (ا) ≠ ۰ ۔

اِس کی تصدیق بآسانی ہو جاتی ہے کیونکہ

$$\text{فا (عف)} \left\{ \frac{1}{\text{فا (ا)}}\ \text{قو}^{\text{لا}} \right\} = \frac{\text{قو}^{\text{لا}}\ \text{فا (ا)}}{\text{فا (ا)}} \text{، بموجب دفعہ ۳۱}$$

$$= \text{قو}^{\text{لا}}$$

(۲) اگر فا (ا) = ۰ تو (عف - ا) کو فا (عف) کا ایک جزو ضربی ہونا چاہیئے۔

فرض کرو کہ فا (عف) = (عف - ا)^ب فہ (عف) جہاں فہ (ا) ≠ ۰

اب دفعہ ۳۲ کے نتیجہ

$$\text{فا}(\text{عف})\left\{\text{قو}^{\text{ال}}\,\text{و}\right\} = \text{قو}^{\text{ال}}\,\text{فا}(\text{عف} + \text{ا})\,\text{و}$$

سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اگر و = ۱ تو

$$\frac{1}{\text{فا}(\text{عف})}\,\text{قو}^{\text{ال}} = \frac{1}{(\text{عف}-\text{ا})^{\text{ب}}\,\text{فہ}(\text{عف})}\,\text{قو}^{\text{ال}} = \frac{1}{(\text{عف}-\text{ا})^{\text{ب}}}\left\{\frac{\text{قو}^{\text{ال}} \times 1}{\text{فہ}(\text{ا})}\right\}$$

$$= \frac{\text{قو}^{\text{ال}}}{\text{فہ}(\text{ا})}\,\frac{1}{\text{عف}^{\text{ب}}} \times 1 = \frac{\text{قو}^{\text{ال}}}{\text{فہ}(\text{ا})} \times \frac{\text{لا}^{\text{ب}}}{\text{ب}!}$$

درست ہو سکتا ہے جبکہ ہم یہ صریح مفروضہ اختیار کریں کہ $\frac{1}{\text{عف}}$ وہ عامل ہے جو عف کا مقلوب ہے یعنے وہ عامل جو لا کے لحاظ سے تکمل کرتا ہے، اسی طرح $\frac{1}{\text{عف}^{\text{ب}}}$، لا کے لحاظ سے ب مرتبہ تکمل کرتا ہے۔

نیز اس نتیجہ کی جو آزمائشی طریقہ سے حاصل ہوا ہے آسانی سے تصدیق ہو سکتی ہے کیونکہ

$$\text{فا}(\text{عف})\left\{\frac{\text{قو}^{\text{ال}}}{\text{فہ}(\text{ا})}\,\frac{\text{لا}^{\text{ب}}}{\text{ب}!}\right\} = (\text{عف}-\text{ا})^{\text{ب}}\,\text{فہ}(\text{عف})\left\{\frac{\text{قو}^{\text{ال}}}{\text{فہ}(\text{ا})}\,\frac{\text{لا}^{\text{ب}}}{\text{ب}!}\right\}$$

$$= \text{فہ}(\text{عف})\left[(\text{عف}-\text{ا})^{\text{ب}}\left\{\frac{\text{قو}^{\text{ال}}}{\text{فہ}(\text{ا})}\,\frac{\text{لا}^{\text{ب}}}{\text{ب}!}\right\}\right]$$

= فہ(عف) [ قو$^{ا لا}$ / فہ(ا) عف$^{ب}$ لا$^{ب}$ / اب ] حسب دفعہ ۳۲

= فہ(عف) [ قو$^{ا لا}$ / فہ(ا) × ۱ ]

= قو$^{ا لا}$ حسب دفعہ ۳۱

(۳۵) عددی مثالوں کو حل کرنے میں آزمائشی طریقوں کی بار بار تصدیق کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔

مثال (۱) (عف + ۳)$^{۲}$ ما = ۵۰ قو$^{۲لا}$

خاص تکملہ

۱ / (عف + ۳)$^{۲}$ × ۵۰ قو$^{۲لا}$ = ۵۰ قو$^{۲لا}$ / (۲ + ۳)$^{۲}$ = ۲ قو$^{۲لا}$

ہے۔ متمم تفاعل کو جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے

ما = ۲ قو$^{۲لا}$ + (ا + ب لا) قو$^{-۳لا}$

مثال (۲) (عف - ۲)$^{۲}$ ما = ۵۰ قو$^{۲لا}$

اگر ۱ / (عف - ۲)$^{۲}$ × ۵۰ قو$^{۲لا}$ میں عف کی بجائے ۲ درج کیا جائے تو نتیجہ لا تناہی حاصل ہوتا ہے۔ لیکن دوسرا طریقہ استعمال کرنے سے

۱ / (عف - ۲)$^{۲}$ × ۵۰ قو$^{۲لا}$ = ۵۰ قو$^{۲لا}$ ۱ / عف$^{۲}$ × ۱ = ۵۰ قو$^{۲لا}$ × ۱/۲ لا$^{۲}$

= ۲۵ لا$^{۲}$ قو$^{۲لا}$

متمم تفاعل جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے

ما = ۲۵ لا$^{۲}$ قو$^{۲لا}$ + (ا + ب لا) قو$^{۲لا}$

# حل طلب مثالیں۔

حل کرو:

(۱) (عف$^۲$ + ۶عف + ۲۵) ما = ۱۰۴ قو$^{۳لا}$

(۲) (عف$^۲$ + ۲ ب عف + ب$^۲$ + ق$^۲$) ما = قو$^{الا}$

(۳) (عف$^۲$ - ۹) ما = ۵۴ قو$^{۳لا}$ (۴) (عف$^۳$ - عف) ما = قو$^{لا}$ + قو$^{-لا}$

(۵) (عف$^۲$ - ب$^۲$) ما = اجنزب لا (۶) (عف$^۳$ + ۴ عف$^۲$ + ۴ عف) ما = ۸ قو$^{۲لا}$

## ۳۶ - خاص تکملہ جبکہ ف (لا) = جم الا

دفعہ ۳۳ کی رو سے

ف (عف$^۲$) جم الا = ف (- ا$^۲$) جم الا

اس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ ہم خاص تکملہ کو اس طرح حاصل کر سکتے ہیں کہ جہاں جہاں عف$^۲$ واقع ہے اس کی بجائے - ا$^۲$ درج کریں۔

مثال (۱) (عف$^۲$ + ۳ عف + ۲) ما = جم ۲ لا

$$\frac{۱}{عف^۲ + ۳ عف + ۲} \text{جم ۲ لا} = \frac{۱}{- ۴ + ۳ عف + ۲} \text{جم ۲ لا} = \frac{۱}{۳ عف - ۲} \text{جم ۲ لا}$$

نسب نما میں عف$^۲$ لانے کے لیے نسب نما اور شمار کنندہ کو ۳ عف + ۲ سے ضرب دو جیسا کہ اہم مقداروں کی صورت میں کیا جاتا ہے تو حاصل ہوگا

$$\frac{۱}{۳ عف - ۲} = \frac{۳ عف + ۲}{۹ عف^۲ - ۴}$$

جس سے

(۳ عف + ۲) / (−۳۶ − ۴) جم ۲ لا = − ۱/۴۰ (۳ عف جم ۲ لا + ۲ جم ۲ لا)

= − ۱/۴۰ (−۶ جب ۲ لا + ۲ جم ۲ لا)

= ۱/۲۰ (۳ جب ۲ لا − جم ۲ لا)

مثال (۲) (عف^۳ + ۶ عف^۲ + ۱۱ عف + ۶) ما = ۲ جب ۳ لا     (۳۶)

۱ / (عف^۳ + ۶ عف^۲ + ۱۱ عف + ۶) ۲ جب ۳ لا = ۲ / (−۹ عف − ۵۴ + ۱۱ عف + ۶) جب ۳ لا

= ۱ / (عف − ۲۴) جب ۳ لا

= (عف + ۲۴) / (عف^۲ − ۵۷۶) جب ۳ لا

= − ۱/۵۸۵ (۳ جم ۳ لا + ۲۴ جب ۳ لا)

= − ۱/۱۹۵ (جم ۳ لا + ۸ جب ۳ لا)

اب ہم راست تفرق کے عمل سے یہ بتلا سکتے ہیں کہ حاصل شدہ نتیجے درست ہیں۔

اگر اس طریقہ کو

[فہ (عف^۲) + عف قہ (عف^۲)] ما = ب جم ا لا + ج جب ا لا

پر استعمال کیا جائے جہاں ب اور ج مستقل ہیں تو حاصل ہوگا

فہ (−ا^۲) (ب جم ا لا + ج جب ا لا) + ا قہ (−ا^۲) (ب جب ا لا − ج جم ا لا)

{فہ (−ا^۲)}^۲ + ا^۲ {قہ (−ا^۲)}^۲

یہ بتلانا بہت آسان ہے کہ جملۂ بالا فی الحقیقت ایک خاص تکملہ ہے بشرطیکہ نسب نما معدوم نہ ہو۔ اِس "مستثنےٰ" صورت پر آیندہ بحث کی جائے گی (دفعہ ۳۸)۔

# حل طلب مثالیں

حل کرو:

(۱) (خف + ۱) ما = ۱۰ جب ۲ لا′

(۲) (عف$^{۲}$ − ۵ عف + ۶) ما = ۱۰۰ جب ۴ لا

(۳) (عف$^{۲}$ + ۸ عف + ۲۵) ما = ۴۸ جم لا − ۱۶ جب لا،

(۴) (عف$^{۲}$ + ۲ عف + ۱۰۴) ما = جب ۲۰ لا + ۴۰ جم ۲۰ لا

(۵) ثابت کرو کہ $\frac{\text{ف}^{۲}\text{س}}{\text{فت}^{۲}}$ + ۲ک $\frac{\text{فس}}{\text{فت}}$ + ب$^{۲}$س = ل جم ج ت

کے خاص تکملہ کو شکل پ جم (ج ت − صہ)

میں لکھا جاسکتا ہے جہاں پ = $\frac{\text{ل}}{\{(\text{ب}^{۲} - \text{ج}^{۲})^{۲} + ۴\text{ک}^{۲}\text{ج}^{۲}\}^{\frac{1}{2}}}$ اور

مس صہ = $\frac{۲\text{کج}}{\text{ب}^{۲} - \text{ج}^{۲}}$

پس ثابت کرو کہ اگر ج متغیر ہو اور ک، ب اور ل مستقل ہوں تو پ بڑے سے بڑا ہوگا جبکہ ک بہت چھوٹا ہو اور ج = $\sqrt{\text{ب}^{۲} - ۲\text{ک}^{۲}}$ تقریباً۔ اِس صورت میں صہ = $\frac{\pi}{۲}$ تقریباً اور پ = $\frac{\text{ل}}{۲\text{ک ب}}$ تقریباً۔

[ یہ تفرقی مساوات ایک مُرتعش نظام کے لیے ہے جس میں ایک قوت سے جو رفتار کے متناسب ہے قصر ہوتا ہے اور جو ایک بیرونی

دَوری قوت کے زیرِ عمل ہے ۔ خاص تکملہ سے قسری ارتعاش حاصل ہوتے ہیں اور متمم تفاعل سے وہ آزاد ارتعاش جن کا قصر جلد عمل میں آجاتا ہے [دیکھو مثال ۱۵ دفعہ ۲۸ کے بعد] ۔ اِن قسری ارتعاشوں کا حیطہ بڑے سے بڑا ہو گا اگر بیرونی قوت کا دَور $\frac{۲\pi}{ج}$ آزاد ارتعاشوں کے دَور [جو $\frac{۲\pi}{\sqrt{ب^۲-ک^۲}} = \frac{۲\pi}{ب}$ تقریباً ہے] کے تقریباً مساوی ہو اور تب (۳۷)

صد جو بیرونی قوت اور جو ب کے درمیان ہیئت کا فرق ہے تقریباً $\frac{\pi}{۲}$ ہوتا ہے ۔ یہ گمک کا اہم مظہر ہے جس کے اطلاق آواز، تعمیرات اور بے تار تیلغراف میں بہت اہم ہیں ۔]

## ۳۷ ـــ خاص تکملہ جبکہ ف (لا) = لا^م جہاں م ایک مثبت صحیح عدد ہے ۔

اِس صورت میں آزمائشی طریقہ، $\frac{۱}{فا(عف)}$ کو عف کی صعودی قوتوں کے ایک سلسلہ میں پھیلانا ہے ۔

مثال (۱)
$$\frac{۱}{عف^۲+۴} لا^۲ = \frac{۱}{۴}(۱+\frac{۱}{۴}عف^۲)^{-۱} لا^۲$$

$$= \frac{۱}{۴}(۱-\frac{۱}{۴}عف^۲+\frac{۱}{۱۶}عف^۴ \ldots) لا^۲$$

$$= \frac{۱}{۴}(لا^۲-\frac{۱}{۲})$$

پس متمم تفاعل کو جمع کرنے سے

$$(عف^۲+۴)\, ما = لا^۲$$

کا حل
$$ما = \frac{۱}{۴}(لا^۲-\frac{۱}{۲}) + ا\ جم ۲لا + ب\ جب ۲لا$$ ہے ۔

مثال (۲)

$$\frac{1}{\text{عف}^2 - ۴\text{عف} + ۳}\,\text{لا}^3 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{۱-\text{عف}} - \frac{1}{۳-\text{عف}}\right)\text{لا}^3$$ ، جزئی کسروں میں

$$= \frac{1}{2}\left\{(۱+\text{عف}+\text{عف}^2+\text{عف}^3+\cdots) - \frac{1}{3}\left(۱ + \frac{\text{عف}}{۳} + \frac{\text{عف}^2}{۹} + \frac{\text{عف}^3}{۲۷} + \cdots\right)\right\}\text{لا}^3$$

$$= \left\{\frac{1}{3} + \frac{4}{9}\text{عف} + \frac{13}{27}\text{عف}^2 + \frac{40}{81}\text{عف}^3 + \frac{121}{243}\text{عف}^4 + \cdots\right\}\text{لا}^3$$

$$= \frac{1}{3}\text{لا}^3 + \frac{4}{3}\text{لا}^2 + \frac{26}{9}\text{لا} + \frac{80}{27}$$

متمم تفاعل جمع کرنے پر

$(\text{عف}^2 - ۴\text{عف} + ۳)\,\text{ا} = \text{لا}^3$ کا حل $\text{ا} = \frac{1}{3}\text{لا}^3 + \frac{4}{3}\text{لا}^2 + \frac{26}{9}\text{لا} + \frac{80}{27} + \text{ا}\,\text{و}^{\text{لا}} + \text{ب}\,\text{و}^{۳\text{لا}}$ ہے۔

مثال (۳) $\frac{1}{\text{عف}^2(\text{عف}^2+۴)}\,۹۶\,\text{لا}^2 = ۹۶ \times \frac{1}{\text{عف}^2}\left\{\frac{1}{\text{عف}^2+۴}\,\text{لا}^2\right\}$

$= ۹۶ \times \frac{1}{\text{عف}^2} \times \frac{1}{4}\left(\text{لا}^2 - \frac{1}{2}\right)$ مثال (۱) سے

$$= ۹۶ \times \frac{1}{4}\left(\frac{\text{لا}^4}{12} - \frac{\text{لا}^2}{4}\right)$$

$$= ۲\,\text{لا}^4 - ۶\,\text{لا}^2$$

اس لیے $\text{عف}^2(\text{عف}^2+۴)\,\text{ا} = ۹۶\,\text{لا}^2$ کا حل

$$\text{ما} = 2\,\text{لا}^4 - 6\,\text{لا}^2 + \text{آ جم}\,2\,\text{لا} + \text{ب جب}\,2\,\text{لا} + \text{ع} + \text{غ}\,\text{لا}$$

ہونا چاہئے۔

## متبادل طریقہ

$$\frac{1}{\text{عف}^2(\text{عف}^2+4)} \times 96\,\text{لا}^2 = \frac{96}{\text{عف}^2} \times \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4}\text{عف}^2 + \frac{1}{16}\text{عف}^4 - \dots\right)\text{لا}^2$$

$$= \left(24\,\text{عف}^{-2} - 6 + \frac{3}{2}\text{عف}^2 - \dots\right)\text{لا}^2$$

$$= 2\,\text{لا}^4 - 6\,\text{لا}^2 + 3$$

(۳۸) اِس میں ایک زائد رقم ۳ ہے لیکن یہ رقم اوپر کے حل کے متمم تفاعل میں شامل ہے۔

وہ طریقہ[1] درست ہے جس کو ہم نے مثالوں (۱) اور (۲) میں جنھیں عف، تفاعل فا (عف) میں جزو ضربی کے طور پر شریک نہیں ہے اختیار کیا ہے۔ اِس کی وجہ حسب ذیل ہے۔ فرض کرو کہ پھیلاؤ معمولی طویل تقسیم کے ذریعہ حاصل کئے جا چکے ہیں۔ یہ امر ہمیشہ ممکن ہے اگرچہ جزئی کسروں کا استعمال عملاً زیادہ سہولت بخش ہو سکتا ہے۔ اگر تقسیم کا عمل جاری رکھا جائے یہاں تک کہ خارج قسمت میں عف^م آجائے تو باقی میں عف^{م+۱} جزو ضربی کے طور پر شریک رہے گا۔ فرض کرو کہ باقی

$\text{فہ}(\text{عف}) \times \text{عف}^{\text{م}+1}$ ہے۔ تب

$$\frac{1}{\text{فا}(\text{عف})} = \text{ج}_0 + \text{ج}_1\text{عف} + \text{ج}_2\text{عف}^2 + \dots + \text{ج}_\text{م}\,\text{عف}^\text{م} + \frac{\text{فہ}(\text{عف}) \times \text{عف}^{\text{م}+1}}{\text{فا}(\text{عف})}, \qquad \dots\dots (1)$$

[1] اِس دفعہ کا مابقی حصہ مطالعہ اول میں ترک کیا جا سکتا ہے۔

یہ ایک جبریہ تماثلہ مساوات ہے اور اس لیے

$$1 = \text{فا(عف)}\{\text{ج}_\cdot + \text{ج}_1\text{عف} + \text{ج}_2\text{عف}^2 + \dots + \text{ج}_\text{م}\text{عف}^\text{م}\}$$

$$+ \text{ف}_1(\text{عف}) \times \text{عف}^{\text{م}+1} , \quad \dots (2)$$

مساوات (۲) درست ہے اگر عف ایک جبریہ مقدار ہو۔ یہ مساوات شکل میں سادہ ہے اور صرف معمولی جبریہ قانونوں کے تابع ہے جن کے متعلق ہم ثابت کر چکے ہیں کہ وہ عامل عف پر اطلاق پذیر ہیں۔ ہمیں ان مشکلوں سے واسطہ نہیں پڑتا جو عف کے تفاعلوں سے تقسیم کرنے کی صورت میں پیش آتی ہیں۔ اس لیے مساوات (۲) اس وقت بھی درست ہے جبکہ مساوات کی ہر جانب کو ایک عامل متصور کیا جائے۔ لاٗ پر عمل کرنے سے

$$\text{لا}^\text{م} = \text{فا(عف)}\{(\text{ج}_\cdot + \text{ج}_1\text{عف} + \text{ج}_2\text{عف}^2 + \dots + \text{ج}_\text{م}\text{عف}^\text{م})\text{لا}^\text{م}\}' \dots (3)$$

کیونکہ $\text{عف}^{\text{م}+1}\text{لا}^\text{م} = 0$ ۔ اس سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ مساوات (۱) کے بائیں جانب پھیلاؤ سے فا(عف) ما = لاٗ کا خاص تکملہ حاصل ہوتا ہے اگر باقی کو نظر انداز کیا جائے۔

یہ دیکھنا دلچسپ ہے کہ یہ طریقہ اُس وقت بھی درست رہتا ہے جبکہ پھیلاؤ عف کی جبریہ قیمتوں کے لیے متسع ہو۔

مثال (۳) کی مانند صورتوں میں پہلے طریقہ کی تصدیق کرنیکے لیے ہمیں یہ ثابت کرنا ہے کہ

$$\frac{1}{\text{عف}^\text{ر}} \times \{(\text{ج}_\cdot + \text{ج}_1\text{عف} + \text{ج}_2\text{عف}^2 + \dots + \text{ج}_\text{م}\text{عف}^\text{م})\text{لا}^\text{م}\}$$

$$\text{یعنی} \quad (\text{ج}_\cdot\text{عف}^{-\text{ر}} + \text{ج}_1\text{عف}^{-\text{ر}+1} + \text{ج}_2\text{عف}^{-\text{ر}+2} + \dots + \text{ج}_\text{م}\text{عف}^{-\text{ر}+\text{م}})\text{لا}^\text{م}$$

{ فا(عف) × عفʳ } ما = لاᵐ کا ایک خاص تکملہ ہے یعنی یہ کہ

{ فا(عف) × عفʳ } { (ج عفʳ + ج₁ عفʳ⁺¹ + ج₂ عفʳ⁺² + ..... + جₘ عفʳ⁺ᵐ) لاᵐ } = لاᵐ ... (۴)

اب { فا(عف) × عفʳ } ء = فا(عف) { عفʳ ء }

نیز عفʳ { (جس عفʳ⁺س) لاᵐ } = (جس عفس) لاᵐ

اس لیے مساوات (۴) کی دائیں جانب کا جملہ ہو جاتا ہے

فا(عف) { (ج + ج₁ عف + ج₂ عف² + ... + جₘ عفᵐ) لاᵐ } = لاᵐ بموجب (۳)

اور یہی ثابت کرنا تھا۔

متبادل طریقہ میں ہمیں خاص تکملہ میں ر زائد رقمیں ملیں گی، فرض کرو کہ یہ رقمیں

جₘ₊₁ عفʳ⁺ᵐ⁺¹ + .... + جₘ₊ᵣ عفᵐ⁺ʳ) لاᵐ

ہیں۔ ان میں ایسی رقمیں شریک ہیں جن میں لا کی (ر-۱) ویں اور اس سے کمتر قوتیں آتی ہیں۔ لیکن یہ سب کی سب متمم تفاعل میں واقع ہوتی ہیں۔ اس لیے پہلے طریقہ کو ترجیح حاصل ہے۔

(۳۹) یہ یاد رہے کہ اگر عف⁻¹ ء، ء کے تکملہ کی سادہ ترین شکل کو تعبیر کرے اور اس میں کوئی اختیاری مستقل نہ آئے تو

عف⁻¹ (عف × ۱) = عف⁻¹ × ۰ = ۰

لیکن عف (عف⁻¹ × ۱) = عف × لا = ۱

اس لیے عف (عف⁻¹ × ۱) ≠ عف⁻¹ (عف × ۱)

اسی طرح عف$^{م}$ (عف$^{-م}$ × لا$^{ن}$) ≠ عف$^{-م}$ (عف$^{م}$ × لا$^{ن}$) اگر م > ن

پس جب عف کی منفی قوتیں زیر بحث ہوتی ہیں تو جبر و مقابلہ کے قانون ہمیشہ پورے نہیں ہوتے ۔ اِس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ مثال (۳) میں اختیار کردہ دو مختلف طریقوں سے کیوں مختلف نتیجے حاصل ہوتے ہیں ۔

## حل طلب مثالیں ۔

حل کرو :

(۱) (عف + ۱) ما = لا$^{۳}$ ،   (۲) (عف$^{۲}$ + ۲عف) ما = ۲۴ لا ،

(۳) (عف$^{۲}$ - ۶عف + ۹) ما = ۵۴ لا + ۱۸ ،

(۴) (عف$^{۴}$ - ۶عف$^{۳}$ + ۹ عف$^{۲}$) ما = ۵۴ لا + ۱۸ ،

(۵) (عف$^{۲}$ - عف - ۲) ما = ۴۴ - ۷۶ لا - ۴۸ لا$^{۲}$ ،

(۶) (عف$^{۳}$ - عف$^{۲}$ - ۲عف) ما = ۴۴ - ۷۶ لا - ۴۸ لا$^{۲}$ ،

## ۳۸ ۔ خاص تکملے دوسری سادہ صورتوں میں ۔

اب ہم سادہ صورتوں میں خاص تکملوں کو محسوب کرنے کی چند ایسی نمونہ کی مثالیں درج کرتے ہیں جن پر گذشتہ دفعوں میں بحث نہیں ہوئی ہے ۔

**مثال (۱)** (عف$^{۲}$ + ۴) ما = جب ۲ لا

یہاں ہم $\frac{۱}{عف^{۲} + ۴}$ جب ۲ لا کی قیمت کو عف$^{۲}$ کی بجائے - ۲$^{۲}$ لکھکر معلوم نہیں کر سکتے کیونکہ اِس اندراج سے نسب نما صفر کے مساوی ہو جاتا ہے ۔

لیکن و$^{۲خلا}$ کا خیالی حصہ خ جب ۲ لا ہے اور

۱/(عف^۲ + ۴) قو^{۲خ لا} = قو^{۲خ لا} ۱/((عف + ۲خ)^۲ + ۴) × ۱، حسب دفعہ ۳۵

= قو^{۲خ لا} ۱/(عف (عف + ۴خ)) × ۱

= قو^{۲خ لا} ۱/(۴خ × عف) (۱ + عف/۴خ)^{-۱} × ۱

= قو^{۲خ لا} ۱/(۴خ عف) {(۱ − عف/۴خ + عف^۲/(۴^۲ خ^۲) − ...) × ۱} ......(۱)

= قو^{۲خ لا} ۱/(۴خ عف) × ۱ = قو^{۲خ لا} لا/۴خ

= − ۱/۴ خ لا (جم ۲لا + خ جب ۲لا)

[یا ۱/(عف^۲ + ۴) قو^{۲خ لا} = ۱/(عف − ۲خ) (۱/(عف + ۲خ) قو^{۲خ لا})

= ۱/(عف − ۲خ) (۱/۴خ قو^{۲خ لا}) = قو^{۲خ لا} ۱/عف × ۱/۴خ = قو^{۲خ لا} لا/۴خ]

اِس لیے خیالی حصہ الگ کرنے پر

۱/(عف^۲ + ۴) جب ۲لا = − ۱/۴ لا جم ۲لا

متمم تفاعل جمع کرنے سے حل حاصل ہوتا ہے

ما = ا جم ۲لا + ب جب ۲لا − ۱/۴ لا جم ۲لا

**مثال (۲)۔** (عف^۲ − ۵عف + ۶) ما = قو^{۲لا} لا^۳

۱/(عف^۲ − ۵عف + ۶) قو^{۲لا} لا^۳ = (۱/(عف − ۲) − ۱/(عف − ۳)) قو^{۲لا} لا^۳

= قو^۲لا (- ۱/عف - ۱/(۱-عف)) لا^۳

= قو^۲لا (- ۱/عف - ۱ - عف - عف^۲ - عف^۳ - عف^۴ ...) لا^۳

= قو^۲لا (- ۱/۴ لا^۴ - لا^۳ - ۳ لا^۲ - ۶ لا - ۶)

تتمہ تفاعل جمع کرنے پر حاصل ہوتا ہے

ما = ا قو^۳لا - قو^۲لا (۱/۴ لا^۴ + لا^۳ + ۳ لا^۲ + ۶ لا - ب)

جس میں رقم ب قو^۲لا میں - ۶ قو^۲لا شامل ہے۔

مثال (۳) (عف^۲ - ۶ عف + ۱۳) ما = ۸ قو^۳لا جب ۲ لا

۱/(عف^۲ - ۶ عف + ۱۳) × ۸ قو^۳لا جب ۲ لا = ۸ قو^۳لا ۱/{(عف + ۳)^۲ - ۶(عف + ۳) + ۱۳} جب ۲ لا

= ۸ قو^۳لا ۱/(عف^۲ + ۴) جب ۲ لا

= ۸ قو^۳لا (- ۱/۴ لا جم ۲ لا)، دیکھو مثال (۱)

= - ۲ لا قو^۳لا جم ۲ لا

تتمہ تفاعل جمع کرنے پر

ما = قو^۳لا (ا جم ۲ لا + ب جب ۲ لا - ۲ لا جم ۲ لا)

یہ طریقے تقریباً ایسے تمام خاص تکملوں کی قیمت معلوم کرنے کے لئے کافی ہیں جن سے طالب علم کو واسطہ پڑ سکتا ہے۔ دیگر تمام صورتوں میں

اُس طریقہ پر غور کیا جا سکتا ہے جس کو اِس باب کے ختم پر مثالوں (۳۳) اور (۳۴) میں واضح کیا گیا ہے۔

## حل طلب مثالیں۔

حل کرو:

(۱) (عف$^{۲}$ + ۱) ما = ۴ جم لا ، (۲) (عف - ۱) ما = (لا + ۳) قو$^{۲ لا}$

(۳) (عف$^{۳}$ - ۳ عف - ۲) ما = ۵۴۰ لا$^{۳}$ قو$^{- لا}$ ،

(۴) (عف$^{۲}$ + ۲ عف + ۲) ما = ۲ قو$^{لا}$ جب لا

(۵) (عف$^{۲}$ + ۱)$^{۲}$ ما = ۲۴ لا جم لا ،

(۶) (عف$^{۵}$ - عف) ما = ۱۲ قو$^{لا}$ + ۸ جب لا - ۲ لا

(۷) (عف$^{۲}$ - ۶ عف + ۲۵) ما = ۲ قو$^{۳ لا}$ جم ۴ لا + ۸ قو$^{۳ لا}$ (۱ - ۲ لا) جب ۴ لا

## ۳۹ - متجانس خطی مساوات۔

یہ نام شکل

(ب. لا$^{ن}$ عف$^{ن}$ + ب$_{۱}$ لا$^{ن-۱}$ عف$^{ن-۱}$ + .... + ب$_{ن}$) ما = ف (لا)

کی مساوات کو دیا جاتا ہے۔

اِس میں اگر ہم لا = قو$^{ت}$ رکھیں تو وہ اُس نمونہ میں تحویل ہو جاتی ہے جس پر پہلے غور کیا جا چکا ہے۔

مثال۔ (لا$^{۳}$ عف$^{۳}$ + ۳ لا$^{۲}$ عف$^{۲}$ + لا عف) ما = ۲۴ لا$^{۲}$ (۴۱)

رکھو لا = قو$^{ت}$

فرلا / فرت = قو$^{ت}$ = لا

اس لیے $\text{عف} = \frac{\text{فر}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{فرت}}{\text{فرلا}}\,\frac{\text{فر}}{\text{فرت}} = \frac{1}{\text{لا}}\,\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}$

$$\text{عف}^2 = \text{عف}\left(\frac{1}{\text{لا}}\,\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\right) = -\frac{1}{\text{لا}^2}\,\frac{\text{فر}}{\text{فرت}} + \frac{1}{\text{لا}}\,\text{عف}\,\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}$$

$$= \frac{1}{\text{لا}^2}\left(-\frac{\text{فر}}{\text{فرت}} + \frac{\text{فر}^2}{\text{فرت}^2}\right)$$

$$\text{عف}^3 = \text{عف}\,\frac{1}{\text{لا}^2}\left(-\frac{\text{فر}}{\text{فرت}} + \frac{\text{فر}^2}{\text{فرت}^2}\right)$$

$$= -\frac{2}{\text{لا}^3}\left(-\frac{\text{فر}}{\text{فرت}} + \frac{\text{فر}^2}{\text{فرت}^2}\right) + \frac{1}{\text{لا}^2}\,\text{عف}\left(-\frac{\text{فر}}{\text{فرت}} + \frac{\text{فر}^2}{\text{فرت}^2}\right)$$

$$= -\frac{2}{\text{لا}^3}\left(-\frac{\text{فر}}{\text{فرت}} + \frac{\text{فر}^2}{\text{فرت}^2}\right) + \frac{1}{\text{لا}^3}\left(-\frac{\text{فر}^2}{\text{فرت}^2} + \frac{\text{فر}^3}{\text{فرت}^3}\right)$$

$$= \frac{1}{\text{لا}^3}\left(2\,\frac{\text{فر}}{\text{فرت}} - 3\,\frac{\text{فر}^2}{\text{فرت}^2} + \frac{\text{فر}^3}{\text{فرت}^3}\right)$$

اس طرح دی ہوئی تفرقی مساوات $\frac{\text{فر}^3\,\text{ما}}{\text{فرت}^3} = 24\,\text{قو}^{2\text{ت}}$ میں تحویل ہوتی ہے اور اس سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ما} = \text{ا} + \text{ب}\,\text{ت} + \text{ج}\,\text{ت}^2 + 3\,\text{قو}^{2\text{ت}}$$

$$= \text{ا} + \text{ب}\,\text{لوک لا} + \text{ج}\,(\text{لوک لا})^2 + 3\,\text{لا}^2$$

دوسرا طریقہ اس باب کے ختم پر متفرق مثالوں ۲۸ تا ۳۰ میں بیان کیا گیا ہے —

مساوات

$$\text{ب}_0(\text{ا}+\text{ب لا})^{\text{ن}}\,\text{عف}^{\text{ن}}\,\text{ما} + \text{ب}_1(\text{ا}+\text{ب لا})^{\text{ن}-1}\,\text{عف}^{\text{ن}-1}\,\text{ما} + \dots + \text{ب}_{\text{ن}}\,\text{ما} = \text{ف}(\text{لا})$$

کو متجانس خطی شکل میں ی = ا + ب لا رکھ کر تحویل کیا جا سکتا ہے جس سے حاصل ہوگا

$$\text{عف ما} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر ی}} \; \frac{\text{فر ی}}{\text{فر لا}} = \text{ب} \; \frac{\text{فر ما}}{\text{فر ی}}$$

## حل طلب مثالیں۔

(۱) $\text{لا}^{۲} \frac{\text{فر}^{۲} \text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}} - ۲ \text{لا} \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + ۲ \text{ما} = ۴ \text{لا}^{۳}$

(۲) $\text{لا}^{۲} \frac{\text{فر}^{۲} \text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}} + ۹ \text{لا} \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + ۲۵ \text{ما} = ۵۰$

(۳) $\text{لا}^{۳} \frac{\text{فر}^{۳} \text{ما}}{\text{فر لا}^{۳}} + ۳ \text{لا}^{۲} \frac{\text{فر}^{۲} \text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}} + \text{لا} \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + ۸ \text{ما} = ۶۵ \text{جم} (\text{لوک لا})$

(۴) $\text{لا}^{۴} \frac{\text{فر}^{۴} \text{ما}}{\text{فر لا}^{۴}} + ۲ \text{لا}^{۳} \frac{\text{فر}^{۳} \text{ما}}{\text{فر لا}^{۳}} + \text{لا}^{۲} \frac{\text{فر}^{۲} \text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}} - \text{لا} \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{ما} = \text{لوک لا}$

(۵) $(۱ + ۲ \text{لا})^{۲} \frac{\text{فر}^{۲} \text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}} - ۶ (۱ + ۲ \text{لا}) \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + ۱۶ \text{ما} = ۸ (۱ + ۲ \text{لا})^{۲}$

(۶) $(۱ + \text{لا})^{۲} \frac{\text{فر}^{۲} \text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}} + (۱ + \text{لا}) \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{ما} = ۴ \text{جم لوک} (۱ + \text{لا})$

## ۴۰ - مستقل سروں والی ہمزاد خطی مساواتیں - (۴۲)

طریقہ کی وضاحت ایک مثال کے ذریعہ کی جائے گی - یہاں دو تابع متغیر ما اور ی اور ایک غیر تابع متغیر لا ہے - عف حسب سابق $\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}$ کی بجائے استعمال کیا جائیگا -

$$(۵ \text{عف} + ۴) \text{ما} - (۲ \text{عف} + ۱) \text{ی} = \text{قو}^{-\text{لا}} \quad \ldots\ldots (۱)$$

(عف + ۸) ما - ۳ ی = ۵ قو^لا ، ...... (۲)

پر غور کرو -

ی کو اُسی طرح ساقط کرو جس طرح جبرو مقابلہ کی ہمزاد خطی مساواتوں میں کیا جاتا ہے - اِس کے لیے مساوات (۱) کو ۳ سے ضرب دو اور مساوات (۲) پر (۲ عف + ۱) سے عمل کرو -

نتیجوں کو تفریق کرنے پر

{۳ (۵ عف + ۴) - (۲ عف + ۱) (عف + ۸)} ما = ۳ قو^لا - (۲ عف + ۱) ۵ قو^لا

یعنے (- ۲ عف^۲ - ۲ عف + ۴) ما = ۸ قو^لا

یا (عف^۲ + عف - ۲) ما = - ۴ قو^لا

اِس کو معمولی طریقہ پر حل کرنے سے

ما = ۲ قو^لا + ا قو^لا + ب قو^{-۲لا}

اِس مخصوص مثال میں ی حاصل کرنے کا آسان ترین طریقہ یہ ہے کہ مساوات (۲) کو استعمال کیا جائے جس میں ی کا کوئی تفرقی سر شامل نہیں ہے - (۲) میں ما کی بجائے اندراج کرنے سے

۱۴ قو^لا + ۹ ا قو^لا + ۶ ب قو^{-۲لا} - ۳ ی = ۵ قو^لا

∴ ی = ۳ قو^لا + ۳ ا قو^لا + ۲ ب قو^{-۲لا}

لیکن اگر مساواتوں سے اس قدر آسان طریقہ پر ی معلوم نہ ہو سکے تو ہم ما کو ساقط کر سکتے ہیں چنانچہ اوپر کی صورت میں ما ساقط کرنے پر

{- (عف + ۸) (۲ عف + ۱) + ۳ (۵ عف + ۴)} ی

= (عف + ۸) قو^لا - (۵ عف + ۴) ۵ قو^لا

یعنے (-۲ عف^۲ - ۲ عف + ۴) ی = ۱۲ قو^لا

∴ ی = ۲ قو^لا + ع قو^لا + ف قو^۲لا

چار مستقل ا، ب، ع اور ف میں ربط معلوم کرنیکے لیے ابتدائی مساواتوں میں سے کسی ایک میں اندراج کرو، فرض کرو کہ مساوات (۲) میں اندراج کیا گیا ہے تو

(عف + ۸) (۲ قو^لا + ا قو^لا + ب قو^۲لا) - ۳ (۲ قو^لا + ع قو^لا + ف قو^۲لا)
= ۵ قو^لا

∴ ع = ۳ ا اور ف = ۲ ب

∴ ی = ۲ قو^لا + ع قو^لا + ف قو^۲لا = ۲ قو^لا + ۳ ا قو^لا + ۲ ب قو^۲لا حسب سابق

## حل طلب مثالیں

(۱) عف ما - ی = ۰
(عف - ۱) ما - (عف + ۱) ی = ۰

(۲) (عف - ۱۷) ما + (۲ عف - ۸) ی = ۰
(۱۳ عف - ۵۳) ما - ۲ ی = ۰

(۳) (۲ عف^۲ - عف + ۹) ما - (عف^۲ + عف + ۳) ی = ۰
(۲ عف^۲ + عف + ۷) ما - (عف^۲ - عف + ۵) ی = ۰

(۴) (عف + ۱) ما = ی + قو^لا
(عف + ۱) ی = ما + قو^لا

(۴۳)

(۵) (عف^۲ + ۵) ما - ۴ ی = -۳۶ جم ۷ لا
ما + عف^۲ ی = ۹۹ جم ۷ لا

(۶) (۲عف + ۱) ما + (عف + ۳۲) ی = ۹۱ قو$^{-لا}$ + ۱۴۷ جب ۲لا

ما - (عف - ۸) ی = ۲۹ قو$^{لا}$ + ۴۷ جب ۲لا + ۲۳ جم ۲لا + ۱۳۵ جم ۲لا

# تیسرے باب پر متفرق مثالیں

حل کرو:

(۱) (عف - ۱)$^{۳}$ ما = ۱۶ قو$^{۳لا}$

(۲) (۴عف$^{۲}$ + ۱۲عف + ۹) ما = ۱۴۴ لا قو$^{\frac{۳}{۲}لا}$

(۳) (عف$^{۴}$ + ۶عف$^{۳}$ + ۱۱عف$^{۲}$ + ۶عف) ما = ۲۰ قو$^{-۲لا}$ جب لا

(۴) (عف$^{۳}$ - عف$^{۲}$ + ۴عف - ۴) ما = ۶۸ قو$^{لا}$ جب ۲لا

(۵) (عف$^{۴}$ - ۶عف$^{۲}$ - ۸عف - ۳) ما = ۲۵۶ (لا + ۱) قو$^{۳لا}$

(۶) (عف$^{۴}$ - ۸عف$^{۲}$ - ۹) ما = ۵۰ جبز ۲لا

(۷) (عف$^{۴}$ - ۲عف$^{۲}$ + ۱) ما = ۴۰ جمز لا

(۸) (عف - ۲)$^{۲}$ ما = ۸ (لا$^{۲}$ + قو$^{۲لا}$ + جب ۲لا)

(۹) (عف - ۲)$^{۲}$ ما = ۸ لا$^{۲}$ قو$^{۲لا}$ جب ۲لا

(۱۰) (عف$^{۲}$ + ۱) ما = ۳ جم$^{۲}$ لا + ۲ جب$^{۳}$ لا

(۱۱) (عف$^{۴}$ + ۱۰عف$^{۲}$ + ۹) ما = ۹۶ جب ۲لا جم لا

(۱۲) (عف - ا)$^{ن}$ ما = ا$^{لا}$، ن مثبت صحیح عدد ہے

(۱۳) $\frac{فر^{۲}ما}{فرلا^{۲}} + \frac{۱}{لا}\,\frac{فرما}{فرلا} = \frac{۱۲ لوک لا}{لا^{۲}}$

(۱۴) $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}} + \frac{۲}{\text{لا}}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = ۱۰$

(۱۵) $\frac{\text{فر}^{۳}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۳}} = \frac{۶\,\text{ما}}{\text{لا}^{۳}}$

(۱۶) $(\text{لا}+۱)^{۲}\,\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}} + (\text{لا}+۱)\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = (۲\text{لا}+۳)(۲\text{لا}+۴)$

(۱۷) $\frac{\text{فر}^{۲}\text{لا}}{\text{فرت}^{۲}} - ۴\,\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} + ۴\,\text{لا} = \text{ما}$ ،

$\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرت}^{۲}} + ۴\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} + ۴\,\text{ما} = ۲۵\,\text{لا} + ۱۶\,\text{قو}^{\text{ت}}$

(۱۸) $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = ۲\,\text{ما}$ ، $\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} = ۲\,\text{ی}$ ، $\frac{\text{فری}}{\text{فرت}} = ۲\,\text{لا}$

(۱۹) $\text{ت}\,\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} + \text{ما} = ۰$ ، $\text{ت}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} + \text{لا} = ۰$

(۲۰) $\text{ت}^{۲}\,\frac{\text{فر}^{۲}\text{لا}}{\text{فرت}^{۲}} + \text{ت}\,\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} + ۲\,\text{ما} = ۰$ ،

$\text{ت}^{۲}\,\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرت}^{۲}} + \text{ت}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} - ۲\,\text{لا} = ۰$

(۲۱) ثابت کرو کہ $(\text{عف}^{۲\text{ن}+۱} - ۱)\,\text{ما} = ۰$ کا حل $\text{ا}\,\text{قو}^{\text{لا}}$ اور شکل

$\text{قو}^{\text{ج لا}}\,(\text{ب}_{\text{ر}}\,\text{جم س لا} + \text{ج}_{\text{ر}}\,\text{جب س لا})$

کی رقموں کے ن زوجوں پر مشتمل ہے جہاں

$\text{ج} = \text{جم}\,\frac{۲\,\text{ر}\,\pi}{۲\text{ن}+۱}$ اور $\text{س} = \text{جب}\,\frac{۲\,\text{ر}\,\pi}{۲\text{ن}+۱}$

اور ر علی الترتیب قیمتیں ۱، ۲، ۳، .... ن اختیار کرتا ہے۔

(۲۲) اگر (عف - ا) ء = ۰،
(عف - ا) و = ۰،
اور (عف - ا) ما = ۰
تو ء، و، اور ما کو علی الترتیب معلوم کرو اور (عف - ا)$^{۳}$ ما = ۰ کو حل کرو۔

(۲۳) ثابت کرو کہ

(عف - ا)(عف - ا - ھ)(عف - ا - ۲ھ) ما = ۰

کے حل کو ا قو$^{لا}$ + ب قو$^{لا}$ (قو$^{ھ لا}$ - ۱) / ھ + ج قو$^{لا}$ (قو$^{۲ھ لا}$ - ۲ قو$^{ھ لا}$ + ۱) / ھ$^{۲}$

لکھا جا سکتا ہے۔

اس لیے (عف - ا)$^{۳}$ ما = ۰ کا حل اخذ کرو۔

[ یہ طریقہ ڈلمبرٹ سے منسوب ہے۔ اعلیٰ ریاضی کے طالب علم کو فوراً یہ محسوس ہو گا کہ یہ حل بغیر مزید بحث کے قابل اطمینان نہیں ہے - یہ واضح ہے کہ دوسری تفرقی مساوات پہلی مساوات کی انتہا ہے لیکن یہ واضح نہیں ہے کہ دوسری مساوات کا حل پہلی مساوات کے حل کی انتہا بھی ہے۔ ]

(۲۴) اگر (عف - ا)$^{۳}$ قو$^{م لا}$ کو ی سے تعبیر کیا جائے تو ثابت کرو کہ

ی، جف ی / جف م، اور جف$^{۲}$ ی / جف م$^{۲}$ سب معدوم ہوتے ہیں جبکہ م = ا۔

پس ثابت کرو کہ قو$^{لا}$، لا قو$^{لا}$، اور لا$^{۲}$ قو$^{لا}$ سب (عف - ا)$^{۳}$ ما = ۰ کے حل ہیں۔

[ دیکھو کہ عامل (عف - ا)$^{۳}$ اور جف / جف م تبدیلی پذیر ہیں ]

(۲۵) ثابت کرو کہ (عف$^{۲}$ + ا$^{۲}$) ما = جم (ا + ھ) لا

کا ایک حل

$$\frac{\text{جم ا لا} - \text{جم (ا + ھ) لا}}{(\text{ا} + \text{ھ})^2 - \text{ا}^2}$$

ہے۔

پس (عف² + ا²) ما = جم ا لا کا خاص تکملہ اخذ کرو۔

[اِس پر وہی اعتراض وارد ہوتا ہے جو مثال (۲۳) کی صورت میں ہوا تھا]

(۲۶) ثابت کرو کہ اگر و ، لا کا ایک تفاعل ہو اور فا (عف) سے وہی معمولی مفہوم لیا جائے تو

(اَ) عف^ن [لا و] = لا عف^ن و + ن عف^(ن-۱) و

(بَ) فا (عف) [لا و] = لا فا (عف) و + فاَ (عف) و

(جَ) $\frac{1}{\text{فا (عف)}}$ [لا و] = {لا - $\frac{1}{\text{فا (عف)}}$ × فاَ (عف)} $\frac{1}{\text{فا (عف)}}$ و

(دَ) $\frac{1}{\text{فا (عف)}}$ [لا^ن و] = {لا - $\frac{1}{\text{فا (عف)}}$ × فاَ (عف)}^ن $\frac{1}{\text{فا (عف)}}$ و

اِن ضابطوں کو استعمال کرنے کی سفارش نہیں کی جاتی کیونکہ غلط نتیجے حاصل ہو سکتے ہیں اگر اعمال کی ترتیب میں کافی احتیاط نہ کی جائے۔

(۲۷) (اَ) (عف - ۱) ما = لا قو^(۲ لا)

اور (بَ) (عف + ۱) ما = لا² جم لا

کے خاص تکملے پچھلی مثال کے نتیجوں (جَ) اور (دَ) کو استعمال کرکے حاصل کرو۔

(۲۸) ثابت کرو کہ

$$\text{لا}^{\text{ن}} \frac{\text{فر}^{\text{ن}}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{\text{ن}}} = \text{ط}(\text{ط} - ۱)(\text{ط} - ۲) \ldots (\text{ط} - \text{ن} + ۱)\,\text{ما}$$

جہاں ط کو لا $\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}$ کی بجائے لکھا گیا ہے۔

(۲۹) ثابت کرو کہ

(اَ) فا(طہ) لا^م = لا^م فا(م)

(بَ) ۱/فا(طہ) لا^م = لا^م/فا(م)، بشرطیکہ فا(م) ≠ ۰

(جَ) ۱/فا(طہ) [لا^م و] = لا^م ۱/فا(طہ+م) و

جہاں و، لا کا ایک تفاعل ہے۔

(۴۵) (۳۰) پچھلی مثال کے نتیجوں کو استعمال کر کے ثابت کرو کہ

لا² فر²ما/فرلا² − ۴لا فرما/فرلا + ۶ ما = لا⁵

کا حل ۱/۶ لا⁵ + ا لا^ا + ب لا^ب

ہے جہاں ا اور ب، م(م−۱) − ۴م + ۶ = ۰ کی اصلیں ہیں یعنے ۲ اور ۳۔

(۳۱) اگر یہ دیا گیا ہو کہ (عف − ۱) ما = قو^{۲لا}

تو ثابت کرو کہ (عف − ۱) (عف − ۲) ما = ۰۔

دوسری تفرقی مساوات کا عام حل (جس میں دو نامعلوم مستقل شریک ہوں) لکھ کر اور پہلی مساوات میں اندراج کر کے اِن مستقلوں میں سے ایک کی قیمت معلوم کرو اور اس طرح پہلی مساوات کا حل حاصل کرو۔

(۳۲) پچھلی مثال کے طریقہ سے فر²ما/فرلا² + ب² ما = جب الا کو حل کرو۔

(۳۳) اگر ع۱ سے قو^{الا} ∫ ع قو^{−الا} فرلا،

ع۲ سے قو^{بلا} ∫ ع قو^{بلا} فرلا،

وغیرہ

تعبیر کئے جائیں تو ثابت کرو کہ فا(عف) ما = ۶ کے حل کو جہاں فا(عف) ان اجزائے ضربی (عف - ا) (عف - ب) .... کا حاصل ضرب ہے

ما = ۶ن

لکھا جا سکتا ہے۔

یہ درست ہے اگر فا(عف) کے اجزائے ضربی سب کے سب مختلف نہ بھی ہوں۔

پس (عف - ا) (عف - ب) ما = قو^لا لوک لا کو حل کرو۔

(۳۴) $\frac{1}{\text{فا(عف)}}$ کو جزئی کسور میں رکھ کر ثابت کرو کہ فا(عف) ما = ۶ کے حل کو شکل

$$\sum \frac{1}{\text{فا}'(\text{ا})} \text{قو}^{\text{الا}} \int ۶ \, \text{قو}^{-\text{الا}} \, \text{فرلا}$$

میں بیان کیا جا سکتا ہے بشرطیکہ فا(عف) کے اجزائے ضربی سب کے سب مختلف ہوں۔

[اگر فا(عف) کے اجزائے ضربی مختلف نہ ہوں تو تکملوں کے عمل تکرار پائیں گے]

اس مثال اور گذشتہ مثال کے طریقوں سے کسی خطی مساوات کو جس کے سر مستقل ہوں نظری طور پر حل کیا جا سکتا ہے۔ لیکن جب تک کہ ۶ ان سادہ تفاعلوں (قوت نماؤں، جیوب اور جیوب التمام، اور کثیر الارقام کے حاصل ضرب) میں سے ایک نہ ہو جن پر اس کتاب میں بحث کی گئی ہے اسوقت تک نحولہ بالا حل میں ایک ایسے غیر محدود عمل تکمل سے واسطہ پڑیگا جس کی تکمیل نہیں ہو سکے گی۔

اگر ۶ = ف(لا) تو قو^الا $\int$ ۶ قو^-الا فرلا کو شکل

$$\int^{\text{لا}} \text{ف}(\text{ت}) \, \text{قو}^{\text{ا}(\text{لا}-\text{ت})} \, \text{فرت}$$

یوں لکھا جا سکتا ہے جہاں زیریں حد ک ایک اختیاری مستقل ہے۔

(۴۶) (۳۵) (آ) اس کی تصدیق کرو کہ

$$\frac{\text{فر}^2 \text{ما}}{\text{فر لا}^2} + \text{ب}^2 \text{ما} = \text{ف (لا)}$$

کا خاص تکملہ $\text{ما} = \frac{1}{\text{ب}} \int_{\text{ک}}^{\text{لا}} \text{ف (ت) جب ب (لا - ت) فرت}$

ہے۔

[یاد رہے کہ اگر ا اور ب، لا کے تفاعل ہوں تو

$$\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}} \int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{فا (لا، ت) فرت} = \text{فا (لا، ب)} \frac{\text{فر ب}}{\text{فر لا}} - \text{فا (لا، ا)} \frac{\text{فر ا}}{\text{فر لا}}$$

$$+ \int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \frac{\text{فر فا (لا، ت)}}{\text{فر لا}} \text{فرت} \,]$$

(ب) اس خاص تکملہ کو پچھلی مثال، کا نتیجہ استعمال کر کے حاصل کرو۔

(ج) پس حل کرو $(\text{عف}^2 + 1)\, \text{ما} = \text{قم لا}$

(د) ثابت کرو کہ اس طریقہ سے

$$(\text{عف}^2 + 1)\, \text{ما} = \text{ف (لا)}$$

کا حل بھی حاصل ہوگا (ایسی شکل میں جس میں عمل تکمل کی علامتیں داخل نہیں ہونگی) اگر ف (لا)، تفاعلوں مس لا، قم لا، قط لا میں سے کوئی ایک ہو۔

(۳۶) ۔ ثابت کرو کہ $\frac{\text{فر}^2 \text{ما}}{\text{فرت}^2} + \text{ب}^2 \text{ما} = \text{ک جم ب ت}$ کا خاص

تکملہ ایک اہتزاز کو تعبیر کرتا ہے جس کا حیطہ لا انتہا بڑھتا جاتا ہے۔

[یہ گمک کا مظہر ہے جس کا ذکر پہلے آچکا ہے [دیکھو مثال ۵ دفعہ ۳۶]۔ بلا شبہ اس نمونہ کی طبیعی مساواتیں صرف تقریبی ہوتی ہیں، اس لیے یہ نہیں مان لینا چاہئے کہ اہتزاز فی الواقع لا متناہی ہو جاتا ہے۔ تاہم وہ اِسقدر بڑا ہو سکتا ہے کہ خطرہ سے خالی نہ ہو۔ یہی وجہ ہے کہ

فوج جب پُل پر سے گذرتی ہے تو اُس کو بے قاعدہ ہو کر قدم رکھنے کی ہدایت کیجاتی ہے تاکہ اِن کے قدم پُل کی ساخت کے فطری اہتزاز کے ساتھ ہمسُر نہ ہونے پائیں]

(۳۷) ثابت کرو کہ

$$\frac{فر^2 ما}{فر لا^2} + 2ہ \frac{فر ما}{فر لا} + (ہ^2 + ب^2) ما = ک قو^{ہت} جم ب ت$$

کا خاص تکملہ متغیر حیطہ $\frac{ک}{2ب}$ ت $قو^{ہت}$ کے اہتزاز کو تعبیر کرتا ہے۔

اِس حیطہ کی اعظم قیمت معلوم کرو اور ثابت کرو کہ وہ بہت بڑا ہوتا ہے اگر ہ بہت چھوٹا ہو۔ لامتناہی وقت کے بعد اِس حیطہ کی کیا قیمت ہوگی؟

[ یہ ایک نظام کے قسری ارتعاش کو تعبیر کرتا ہے جبکہ نظام قاسر فاعلیت کے ساتھ ہمسُر ہو اور دونوں میں تقصایر رگڑ کی وجہ سے ہو۔ نتیجہ سے یہ ظاہر ہے کہ اگر رگڑ خفیف ہے تو قسری ارتعاش جلد بڑے ہو جاتے ہیں اگرچہ پچھلی مثال کی طرح لامتناہی نہیں ہو جاتے۔ بعض صورتوں میں اِس سے استفادہ کیا جاتا ہے۔ اگر بے تار تیلیغراف کے موصولی آلے ہرٹیزی امواج کے ساتھ ہمسُر میں نہ ہوں تو اثرات اسقدر ضعیف ہوں گے کہ اُن کو شناخت کرنا مشکل ہوگا۔]

(۳۸) حل کرو $\frac{فر^4 ما}{فر لا^4} - ن^4 ما = ۰$ (۴۷)

[ اس سے ایک پتلے انتصابی دُھرے کے، جو تیز گردش میں ہو، کسی حصہ کا جانبی ہٹاؤ معلوم ہوتا ہے، لا زیر بحث حصہ کا انتصابی ارتفاع ہے ]

(۳۹) اگر پچھلی مثال میں

$$\frac{فر ما}{فر لا} = ما = ۰ \text{ جبکہ } لا = ۰ \text{ اور } لا = ل$$

تو ثابت کرو کہ

ما = ع (جم ن لا - جمزن لا) + ف (جب ن لا - جبزن لا)

اور جم ن ل جمزن ل = ا

[اِس کا یہ مطلب ہے کہ ڈُہرا دو نقطوں پر سہارا گیا ہے جن میں سے ایک دوسرے کے اوپر ل ارتفاع پر ہے اور ڈُہرا اِن نقطوں پر انتصابی رہنے پر مجبور ہے۔ آخری مساوات سے ن معلوم ہوگا جبکہ ل معلوم ہو]

(۴۰) ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{فر}^3\,\text{ما}}{\text{فر لا}^3} + 3\,\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر لا}^2} + 4\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + 2\,\text{ما} = 0$$

کا متمم تفاعل ناقابل قدر ہو جاتا ہے جبکہ لا کافی طور پر بڑا ہو، لیکن

$$\frac{\text{فر}^3\,\text{ما}}{\text{فر لا}^3} - \frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر لا}^2} + 2\,\text{ما} = 0$$

کا متمم تفاعل لا انتہا بڑھتے ہوئے حیطہ کے ساتھ اہتزاز کرتا ہے۔

[اِس نمونہ کی مساوات بھاپ ٹربان کے حاکم کی زاویائی رفتار کے لیے تقریباً درست ہوتی ہے۔ پہلی مساوات گردش کی ایک قائم حرکت کے متناظر ہے اور دوسری جوئیندگی یا غیر قائم حرکت کے۔ دیکھو Perry's "Steam Engine" کا ضمیمہ]

(۴۱) ثابت کرو کہ ہمزاد مساواتوں

$$\text{م}\,\frac{\text{فر}^2\,\text{لا}}{\text{فر ت}^2} = \text{و ز} - \text{ھ ز}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر ت}}$$

$$\text{م}\,\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر ت}^2} = \text{ھ ز}\,\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}}$$

کا عام حل جہاں م، و، ھ اور ز مستقل ہیں

لا = ا + ب جم (س ت - ع)،

$$\text{ما} = \frac{\text{و}}{\text{ھ}}\,\text{ت} + \text{ج} + \text{ب}\ \text{جب}\,(\text{سہ}\,\text{ت} - \text{عہ})$$

ہے جہاں $\text{سہ} = \frac{\text{ھ}\,\text{ز}}{\text{م}}$ اور ا، ب، ج، عہ اختیاری مستقل ہیں۔

اگر یہ دیا جائے کہ $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} = \text{لا} = \text{ما} = ۰$ جبکہ $\text{ت} = ۰$ تو ثابت کرو کہ یہ حل

$$\text{لا} = \frac{\text{و}}{\text{سہ}\,\text{ھ}}\,(۱ - \text{جم}\ \text{سہ}\,\text{ت})،$$

$$\text{ما} = \frac{\text{و}}{\text{سہ}\,\text{ھ}}\,(\text{سہ}\,\text{ت} - \text{جب}\ \text{سہ}\,\text{ت})،$$ (خط مدویری کی مساواتیں)

میں تحویل ہوتا ہے۔

(۴۸)

[ اِن مساواتوں سے کمیت م اور بار ز کے ایک ایسے جُسیمہ کا راستہ معلوم ہوتا ہے جو ایک بالا نفشئی نور سے منور جست کی منفی طور پر بارشدہ چادر سے سطح کے متوازی مقناطیسی میدان ھ کے تحت دفع ہوتا ہو۔ و، بار کی ہوئی سطح کی وجہ سے برقی حدت ہے۔ تجربہ سے لا کی بڑی سے بڑی قیمت معلوم کرکے سرجے۔ جے تھامسن نے $\frac{۲\,\text{و}}{\text{سہ}\,\text{ھ}}$ کی قیمت معلوم کی اور اس سے نسبت $\frac{\text{م}}{\text{ز}}$ محسوب کی جا سکتی ہے جبکہ و اور ھ معلوم ہوں۔ دیکھو (Phil. Mag.) جلد ۴۸ صفحہ ۵۴۷ سنہ ۱۸۹۹ ]

(۴۲) اگر ہمزاد مساواتیں

$$\text{ل}_۱\,\frac{\text{فر}^۲\text{ع}_۱}{\text{فرت}^۲} + \text{م}\,\frac{\text{فر}^۲\text{ع}_۲}{\text{فرت}^۲} + \frac{\text{ع}_۱}{\text{ج}_۱} = \text{ن}_۱\,\text{ب}\ \text{جم}\ \text{ب}\,\text{ت}،$$

$$\text{ل}_۲\,\frac{\text{فر}^۲\text{ع}_۲}{\text{فرت}^۲} + \text{م}\,\frac{\text{فر}^۲\text{ع}_۱}{\text{فرت}^۲} + \frac{\text{ع}_۲}{\text{ج}_۲} = ۰$$

دی گئی ہوں جہاں $ل_۱$، $ل_۲$، م، $ج_۱$، $ج_۲$، ن اور ب مستقل ہیں
تو ثابت کرو کہ $ع_۱$ کی شکل

$$ا_۱ جم\ ب ت + ا_۱ جم\ (م ت - عہ) + ب_۱ جم\ (ن ت - بہ)$$

اور $ع_۲$ کی شکل

$$ا_۲ جم\ ب ت + ا_۲ جم\ (م ت - عہ) + ب_۲ جم\ (ن ت - بہ)$$

ہے جہاں

$$ا_۱ = \frac{ع}{ک} ب ج_۱ (۱ - ب^۲ ج_۲ ل_۲)$$

$$ا_۲ = \frac{ع م}{ک} ب^۳ ج_۱ ج_۲$$

ک جملہ $(ل_۱ ل_۲ - م^۲) ج_۱ ج_۲ ب^۴ - (ل_۱ ج_۱ + ل_۲ ج_۲) ب^۲ + ۱$ کو تعبیر کرتا ہے، م اور ن خاص محدود مستقل ہیں، $ا_۱$، $ب_۱$، عہ اور بہ اختیاری مستقل ہیں، $ا_۲$ کو $ا_۱$ کی رقوم میں اور $ب_۲$ کو $ب_۱$ کی رقوم میں بیان کیا جا سکتا ہے۔

نیز ثابت کرو کہ م اور ن حقیقی ہیں اگر $ل_۱$، $ل_۲$، م، $ج_۱$ اور $ج_۲$ حقیقی اور مثبت ہوں، اور $ل_۱ ل_۲ > م^۲$

[ان مساواتوں سے ایک مبدل میں ابتدائی اور ثانوی رَوئیں $ع_۱$ اور $ع_۲$ معلوم ہوتی ہیں جبکہ دَوروں میں گنجائش $ج_۱$ اور $ج_۲$ کے کثیفے ہوں۔ $ل_۱$ اور $ل_۲$ ذاتی امالہ کی قدریں ہیں اور م باہمی امالہ کی قدر ہے۔ مزاحمتوں کو (جو بالعموم بہت خفیف ہوتی ہیں) نظر انداز کیا گیا ہے۔

ر جب ب ت ابتدائی رَو کی عاملہ قوت محرکہ برق ہے]

## ہمزاد مساواتوں کے لیے متبادل طریقے - مثال ۲

صفحہ (۹۷) میں ما معلوم کر لینے کے بعد ہم ی کو بغیر عمل تکمل کے اس طرح معلوم کر سکتے ہیں کہ دی ہوئی مساواتوں پر علی الترتیب عف اور (عف + ۲) سے عمل کریں اور تفریق کریں - اگر عف میں کوئی دو کثیر رقمی ف (عف) اور فا (عف) دئے گئے ہوں اور ان میں کوئی مشترک جزو ضربی جس میں عف ہو موجود نہ ہو تو ہم دوسرے ایسے کثیر رقمی فہ (عف) اور سا (عف) معلوم کر سکتے ہیں کہ

فہ (عف) ف (عف) - سا (عف) فا (عف) = ۱

(دیکھو اسمتھ کا جبر و مقابلہ دفعہ ۱۰۰)

سادہ صورتوں میں ہم فہ (عف) اور سا (عف) کو صرف معائنہ سے ہی معلوم کر سکتے ہیں -

ہم مثال ۳ کی دی ہوئی مساواتوں کی بجائے اِن کا مجموعہ اور فرق رکھ سکتے ہیں - اِسی طرح مثال ۴ میں عمل کرکے ہم ما+ی اور ما-ی کو نئے متغیروں کے طور پر لے سکتے ہیں -

# چوتھا باب

## سادہ تفرقی مساواتیں

**۴۱** — اِس باب میں حسبِ ذیل امور پر غور کیا جائے گا: جزئی تفرقی مساواتیں کس طرح پیدا ہوتی ہیں، سادہ خاص حل کس طرح حاصل کئے جا سکتے ہیں، اور اِن خاص حلوں کے لامتناہی سلسلوں کے ذریعہ زیادہ دقیق اور مشکل حل کس طرح معلوم کئے جا سکتے ہیں۔ نیز فوریر کے سلسلہ کا استعمال سمجھایا جائیگا جس سے ایسے دقیق اور مشکل حل دی ہوئی شرطوں کو پورا کر سکیں گے۔

اِس باب میں جن مساواتوں پر غور کیا گیا ہے اُن میں وہ مساواتیں شامل ہیں جو حرارت کے ایصال، ڈوریوں کے ارتعاش، برقی سکونیات، تجاذب، ٹیلیفون، برقی مقناطیسی موجوں، اور محللوں کے نفوذ کے مسئلوں میں وقوع پذیر ہوتی ہیں۔

زیادہ تر یولر، ڈلمبرٹ، اور لگرانج [۱] کے طریقے استعمال کئے گئے ہیں۔

[۱] جوزف لوئی لگرانج (باشندہ ٹیورن ۱۷۳۶ء تا ۱۸۱۳ء) اٹھارویں صدی میں سب سے بڑا ریاضی داں گذرا ہے۔ اُس نے ریاضی کی ہر شاخ میں بڑے بڑے اضافے کئے۔ تغیرات کے علم الاحصا کی بنیاد اُس نے ڈالی اور جزئی تفرقی مساواتوں کے مضمون میں بڑی توسیع کی۔ نیز نظری علم الحیل اور صغاری احصاد کو بڑی ترقی دی۔

## ۴۲ ۔ اختیاری تفاعلوں کا اسقاط ۔

پہلے باب میں ہم یہ بتلا چکے ہیں کہ اختیاری مستقلوں کے اسقاط سے معمولی تفرقی مساواتیں کس طرح بنائی جاتی ہیں۔ جزئی تفرقی مساواتوں کو اختیاری تفاعلوں کے اسقاط سے اکثر بنایا جا سکتا ہے۔

مثال (۱) ما = ف(لا - ا ت) + فا(لا + ا ت)' .... (۱)

سے اختیاری تفاعلوں ف اور فا کو ساقط کرو۔

$$\frac{\text{جف ما}}{\text{جف لا}} = \text{فَ (لا - ا ت) + فاَ (لا + ا ت)}$$

اور $$\frac{\text{جف}^2\text{ ما}}{\text{جف لا}^2} = \text{فً (لا - ا ت) + فاً (لا + ا ت)}' \;...(۲)$$

اسی طرح $$\frac{\text{جف ما}}{\text{جف ت}} = -\text{ا فَ (لا - ا ت) + ا فاَ (لا + ا ت)}$$

اور $$\frac{\text{جف}^2\text{ ما}}{\text{جف ت}^2} = \text{ا}^2\text{ فً (لا - ا ت) + ا}^2\text{ فاً (لا + ا ت)}$$

(۵۰)

(۲) اور (۳) سے

$$\frac{\text{جف}^2\text{ ما}}{\text{جف لا}^2} = \frac{1}{\text{ا}^2}\,\frac{\text{جف}^2\text{ ما}}{\text{جف ت}^2}, \;\ldots\ldots (۴)$$

یہ دوسرے رتبہ کی جزئی تفرقی مساوات ہے[۱]۔

مثال (۲) ی = ف $\left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}}\right)$

---

[۱] یہ مساوات ایک تنی ہوئی ڈوری کے عرضی ارتعاشوں کے لئے صادق آتی ہے۔ اِس کا عام ترین حل مساوات (۱) ہے جو دو موجوں کو تعبیر کرتی ہے جو رفتار ا سے حرکت کر رہی ہیں جن میں سے ایک دائیں جانب اور دوسری بائیں جانب۔

سے اختیاری تفاعل ف کو ساقط کرو۔

$$\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} = -\frac{\text{ما}}{\text{لا}^2}\ \text{فَ}\left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}}\right)$$

اور

$$\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}} = -\frac{1}{\text{لا}}\ \text{فَ}\left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}}\right)$$

اس لیے $\text{لا}\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} + \text{ما}\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}} = 0$

# حل طلب مثالیں

حسب ذیل مساواتوں سے اختیاری تفاعلوں کو ساقط کرو:

(۱) $\text{ی} = \text{ف}(\text{لا} + \text{ا ما})$

(۲) $\text{ی} = \text{ف}(\text{لا} + \text{خ ما}) + \text{فا}(\text{لا} - \text{خ ما})$، جہاں $\text{خ}^2 = -1$

(۳) $\text{ی} = \text{ف}(\text{لا جم عہ} + \text{ما جب عہ} - \text{ا ت}) + \text{فا}(\text{لا جم عہ} + \text{ما جب عہ} + \text{ا ت})$

(۴) $\text{ی} = \text{ف}(\text{لا}^2 - \text{ما}^2)$،

(۵) $\text{ی} = \text{نو}^{\text{ا لا} + \text{ب ما}}\ \text{ف}(\text{ا لا} - \text{ب ما})$

(۶) $\text{ی} = \text{لا}^{\text{ن}}\ \text{ف}\left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}}\right)$

# ۴۳ ـــ اختیاری مستقلوں کا اسقاط۔

ہم پہلے باب میں دیکھ چکے ہیں کہ اختیاری مستقلوں کو معمولی تفرقی مساواتوں کے ذریعہ کس طرح ساقط کیا جا سکتا ہے۔ یہ جزئی تفرقی مساواتوں کے ذریعہ بھی کیا جا سکتا ہے۔

مثال (۱) $\text{ی} = \text{ا نو}^{\text{ب ت}}\ \text{جب ب لا}$

سے ا اور ب کو ساقط کرو۔

$$\because \quad \frac{\text{جف}^2 \text{ی}}{\text{جف لا}^2} = -\text{ب}^2 \text{ ا و}^{\text{ب ت}} \text{ جب ب لا}$$

$$\text{اور} \quad \frac{\text{جف}^2 \text{ی}}{\text{جف ت}^2} = \text{ب}^2 \text{ ا و}^{\text{ب ت}} \text{ جب ب لا}$$

$$\text{اس لیے} \quad \frac{\text{جف}^2 \text{ی}}{\text{جف لا}^2} + \frac{\text{جف}^2 \text{ی}}{\text{جف ت}^2} = 0$$

مثال (۲) $\text{ی} = \text{ا}(\text{لا} + \text{ما}) + \text{ب}(\text{لا} - \text{ما}) + \text{ا ب ت} + \text{ج}$

سے ا، ب، اور ج کو ساقط کرو۔

$$\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} = \text{ا} + \text{ب}،$$

$$\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}} = \text{ا} - \text{ب}،$$

$$\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ت}} = \text{ا ب}$$

$$\text{لیکن} \quad (\text{ا} + \text{ب})^2 - (\text{ا} - \text{ب})^2 = 4\text{ا ب} \qquad (51)$$

$$\text{اس لیے} \quad \left(\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}}\right)^2 - \left(\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}}\right)^2 = 4\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ت}}$$

## حل طلب مثالیں

حسب ذیل مساواتوں سے اختیاری مستقلوں کو ساقط کرو:

(۱) $\text{ی} = \text{ا و}^{\text{ب}^2 \text{ت}} \text{ جم ب لا}$

(۲) $\text{ی} = \text{ا و}^{-\text{ت}} \text{ جم ق لا جب ر ما}$، جہاں $\text{ب}^2 = \text{ق}^2 + \text{ر}^2$

(۳)  ی = ا لا + (ا - ا) ما + ب

(۴)  ی = ا لا + ب ما + ا^۲ + ب^۲

(۵)  ی = (لا - ا)^۲ + (ما - ب)^۲

(۶)  ا ی + ب = ا^۲ لا + ما

## ۴۴ ـــ جزئی تفرقی مساواتوں میں خاص مشکلیں۔

ہم پہلے باب میں یہ بیان کر چکے ہیں کہ ن ویں رتبہ کی ہر معمولی تفرقی مساوات کے متعلق یہ سمجھا جا سکتا ہے کہ وہ ایک ایسے حل سے ماخوذ ہوتی ہے جس میں ن اختیاری مستقل ہوتے ہیں[1]۔ اِس سے شائد یہ فرض کر لیا جائے کہ ن ویں رتبہ کی ہر جزئی تفرقی مساوات بھی اُسی طرح ایک حل سے جس میں ن اختیاری تفاعل شامل ہوں اخذ پذیر ہے۔ لیکن یہ صحیح نہیں ہے۔ عام طور پر یہ ناممکن ہے کہ ن اختیاری تفاعلوں کے حاصل اسقاط کو ن ویں رتبہ کی ایک جزئی تفرقی مساوات کے طور پر بیان کیا جائے۔ اِس سے اعلیٰ تر رتبہ کی مساوات مطلوب ہوتی ہے اور نتیجہ یگانہ نہیں ہوتا[2]۔ اِس باب میں صرف خاص حلوں کو معلوم کرنے پر اکتفا کیا جائیگا۔

---

[1] آئندہ (چھٹا باب) یہ تبلایا جائیگا کہ بعض مستثنےٰ صورتوں میں معمولی تفرقی مساوات کے نادر حل ہوتے ہیں جو اُس حل کے علاوہ ہوتے ہیں جس میں اختیاری مستقل ہوا کرتے ہیں۔ یہ نادر حل معمولی حل سے اِن مستقلوں کو مخصوص قیمتیں دیکر اخذ نہیں کئے جا سکتے اور وہ بالکل مختلف شکل کے ہوتے ہیں۔

[2] دیکھو ایڈورڈ کی کتاب Differential Calculus دفعات ۵۱۲ اور ۵۱۳ یا ولیمسن کی کتاب Differential Calculus دفعہ ۳۱۷۔

اِن کے ذریعہ ہم اُن مسئلوں کو حل کرسکیں گے جو طبیعاتی سوالوں میں بالعموم وقوع پذیر ہوتے ہیں[۴۳]۔ ہمیں اِس امر کا اعتراف ہے کہ ہم عام ترین حل معلوم کرنے کے ناقابل ہیں لیکن ہماری اِس ناقابلیت کا بدل کچھ اِس خیال سے ہوجاتا ہے کہ اُن صورتوں میں جنھیں عام ترین حل معلوم کیے جاچکے ہیں یہ انتہائی مشکل ہے کہ اُن کو کسی مخصوص مسئلہ پر استعمال کیا جائے[۴۴]

(۵۲)

## ۴۵ ــ سادہ خاص حل۔

**مثال (۱)** مساوات $\frac{\text{جف}^2\,\text{ی}}{\text{جف لا}^2} = \frac{1}{\text{ا}^2}\,\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ت}}$

---

[۴۳] عالم طبیعات ممکن ہے یہ سمجھ لے کہ ہر ایسے مسئلہ کا ایک حل ہوتا ہے اور مزید برین ایسا حل یگانہ ہوتا ہے لیکن نظری ریاضیات میں اِن میں سے پہلے واقعہ کا ثابت کرنا بہت مشکل ہے، اِس کا ثبوت حال ہی میں تکملی مساواتوں کے نظریہ کی مدد سے دیا گیا ہے [ دیکھو ہیوڈ اور فریشا کی کتاب
(L' Equation de Fredholm et ses applications à la Physique Mathematique)

[۴۴] مثلاً وہیٹکر نے یہ ثابت کیا ہے کہ لاپلاس کی مساوات

$$\frac{\text{جف}^2\,\text{و}}{\text{جف لا}^2} + \frac{\text{جف}^2\,\text{و}}{\text{جف م}^2} + \frac{\text{جف}^2\,\text{و}}{\text{جف ی}^2} = 0$$

کا حل $\text{و} = \int_0^{2\pi} \text{ف}(\text{لا جم ت} + \text{م جب ت} + \text{خ ری ت})\,\text{فرت}$ ہے۔

لیکن اگر ہم ایسا حل معلوم کرنا چاہیں جو ایک دی ہوئی سطح پر بعض خاص شرطوں کو پورا کرے تو ہم بالعموم وہ حل استعمال کرتے ہیں جو ایک لامتناہی سلسلہ کی شکل میں ہوتا ہے۔

پر غور کرو (اِس سے حرارت کا ایصال ایک بُعد میں معلوم ہوتا ہے)۔ یہ مساوات خطی ہے۔ اب معمولی خطی مساواتوں کی بحث میں ہم نے قوت نماؤں کو بہت مفید پایا ہے۔ چنانچہ مساوات بالا کا آزمائشی حل $\text{ی} = \text{و}^{\text{م لا} + \text{ن ت}}$ ہے۔ تفرقی مساوات میں درج کرنے پر

$$\text{م}^{2}\,\text{و}^{\text{م لا} + \text{ن ت}} = \frac{1}{\text{ا}^{2}}\,\text{ن}\,\text{و}^{\text{م لا} + \text{ن ت}}$$

حاصل ہوتا ہے جو درُست ہے اگر $\text{ن} = \text{م}^{2}\,\text{ا}^{2}$

پس $\text{و}^{\text{م لا} + \text{م}^{2}\text{ا}^{2}\text{ت}}$ ایک حل ہے۔

م کی علامت بدلنے پر $\text{و}^{-\text{م لا} + \text{م}^{2}\text{ا}^{2}\text{ت}}$ بھی ایک حل ہے۔

**مثال (۲)**:- اوپر کی مساوات کا وہ حل معلوم کرو جو معدوم ہو جبکہ $\text{ت} = +\infty$۔

پچھلے حل میں ت، $\text{و}^{\text{م}^{2}\text{ا}^{2}\text{ت}}$ میں واقع ہے۔ یہ ت کے ساتھ بڑھتا ہے کیونکہ $\text{م}^{2}\,\text{ا}^{2}$ مثبت ہے اگر م اور ا حقیقی ہوں۔ $\text{و}^{\text{م}^{2}\text{ا}^{2}\text{ت}}$ کو گھٹانے کے لئے $\text{م} = \text{خ پ}$ رکھو تو $\text{م}^{2}\,\text{ا}^{2} = -\text{پ}^{2}\,\text{ا}^{2}$ چنانچہ اِس سے حل $\text{و}^{\text{خ پ لا} - \text{پ}^{2}\text{ا}^{2}\text{ت}}$ حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح $\text{و}^{-\text{خ پ لا} - \text{پ}^{2}\text{ا}^{2}\text{ت}}$ بھی ایک حل ہے۔

پس چونکہ تفرقی مساوات خطی ہے اِسلیے $\text{و}^{-\text{پ}^{2}\text{ا}^{2}\text{ت}}\left(\text{ا}\,\text{و}^{\text{خ پ لا}} + \text{ب}\,\text{و}^{-\text{خ پ لا}}\right)$ ایک حل ہے جس کی بجائے ہم حسب معمول

$$\text{و}^{-\text{پ}^{2}\text{ا}^{2}\text{ت}}\left(\text{ع جم پ لا} + \text{ف جب پ لا}\right)$$

رکھتے ہیں -

مثال (۳): $\frac{جف^2 ی}{جف لا^2} + \frac{جف^2 ی}{جف ما^2} = ۰$ کا وہ حل معلوم کرو جو معدوم ہو جبکہ ما = + ∞ اور نیز جبکہ لا = ۰ -

ی = $قو^{م لا + ن ما}$ رکھنے سے $(م^2 + ن^2)\, قو^{م لا + ن ما} = ۰$ حاصل ہوتا ہے، اِس لیے $م^2 + ن^2 = ۰$.

وہ شرط جبکہ ما = + ∞ اِس امر کی متقاضی ہے کہ ن حقیقی اور منفی ہو، فرض کرو ن = - پ، تب

م = ± خ پ

اِس لیے $قو^{-پ ما} (ا\, قو^{خ پ لا} + ب\, قو^{-خ پ لا})$ ایک حل ہے

یعنے $قو^{-پ ما}$ (ع جم پ لا + ف جب پ لا) ایک حل ہے

لیکن ی = ۰ اگر لا = ۰، اس لیے ع = ۰

اس لیے مطلوبہ حل ف $قو^{-پ ما}$ جب پ لا ہے -

## حل طلب مثالیں

(۱) $\frac{جف^2 ما}{جف لا^2} = \frac{جف^2 ما}{جف ت^2}$، اگر یہ دیا گیا ہو کہ ما = ۰ جبکہ لا = + ∞ اور نیز جبکہ ت = + ∞ -

(۲) $\frac{جف^2 ی}{جف لا^2} = \frac{۱}{لا^2} \frac{جف}{جف ما^2}$ ما اگر یہ دیا گیا ہو کہ ی (لا یا ما کی کسی حقیقی قیمتوں کے لیے) کبھی بھی لامتناہی نہیں ہوتا اور یہ کہ ی = ۰ جبکہ لا = ۰ یا ما = ۰

(۳) $\frac{\text{جف ن}}{\text{جف لا}} + \text{ل} \frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}} = ۰$ ، اگر یہ دیا گیا ہو کہ ی کبھی بھی لامتناہی نہیں ہوتا اور یہ کہ $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} = ۰$ جبکہ لا = ما = ۰ .

(۴) $\frac{\text{جف}^{۲} \text{و}}{\text{جف لا}^{۲}} + \frac{\text{جف}^{۲} \text{و}}{\text{جف ما}^{۲}} + \frac{\text{جف}^{۲} \text{و}}{\text{جف ی}^{۲}} = ۰$ ، اگر یہ دیا گیا ہو کہ و = ۰ جبکہ لا = + ∞ ، جبکہ ما = − ∞ ، اور نیز جبکہ ی = ۰ .

(۵) $\frac{\text{جف}^{۲} \text{و}}{\text{جف لا}^{۲}} = \frac{\text{جف}^{۲} \text{و}}{\text{جف ما جف ی}}$ اگر یہ دیا گیا ہو کہ و کبھی بھی لامتناہی نہیں ہوتا اور یہ کہ و = ج اور $\frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}} = \frac{\text{جف و}}{\text{جف ی}} = ۰$ جبکہ لا = ما = ی = ۰ .

(۶) $\frac{\text{جف}^{۲} \text{و}}{\text{جف لا}^{۲}} + \frac{\text{جف}^{۲} \text{و}}{\text{جف ما}^{۲}} = \frac{\text{جف و}}{\text{جف ت}}$ اگر یہ دیا گیا ہو کہ و = ۰ جبکہ ت = + ∞ ، جبکہ لا = ۰ ، یا ل ، اور جبکہ ما = ۰ یا ل

## ۴۶ ۔ زیادہ پیچیدہ ابتدائی اور حدودی شرطیں[1] ۔

دفعہ ۴۵ کی مثال (۳) میں

$$\frac{\text{جف}^{۲} \text{ی}}{\text{جف لا}^{۲}} + \frac{\text{جف}^{۲} \text{ی}}{\text{جف ما}^{۲}} = ۰$$

کا ایک حل ف ق $\text{پ}^{\text{ما}}$ جب پ لا حاصل ہوا ہے جو اِن شرطوں کو پورا کرتا ہے کہ

[1] چونکہ ت سے بالعموم وقت تعبیر ہوتا ہے اور لا اور ما سے قائم محدد اِس لیے وہ شرط کہ ی = ۰ جبکہ ت = ۰ ابتدائی شرط کہلاتی ہے اور وہ شرط کہ ی = ۰ اگر لا = ۰ یا ما = لا حدودی شرط کہلاتی ہے ۔

ی = ۰ اگر ما = + ∞ یا اگر لا = ۰
اب فرض کرو کہ ہم دو زائد شرطیں عائد کرتے ہیں[1] مثلاً لاً ی = ۰ اگر لا = ل، اور ی = ل لا - لا^۲ اگر ما = ۰، لا کی اُن تمام قیمتوں کے لئے جو صفر اور ل کے درمیان ہیں۔
پہلی شرط سے حاصل ہوتا ہے جب پ ل = ۰
یعنے پ ل = ن π جہاں ن کوئی صحیح عدد ہے۔
سہولت کے مدنظر ہم اول ل = π لیں گے جس سے پ = ن حاصل ہوتا ہے یعنی ایک صحیح عدد۔
دوسری شرط سے ف جب پ لا = π لا - لا^۲، لا کی اُن تمام قیمتوں کے لئے جو صفر اور π کے درمیان ہیں۔ یہ ناممکن ہے۔
تاہم اس حل کی بجائے جس میں صرف ایک رقم ہے ہم حسب ذیل حل لے سکتے ہیں:

$$ف_۱ \, قو^{ما} \, جب \, لا + ف_۲ \, قو^{۲ما} \, جب \, ۲لا + ف_۳ \, قو^{۳ما} \, جب \, ۳لا + \ldots\ldots$$

کیونکہ مساوات خطی ہے (اگر یہ واضح نہ ہو تو دیکھو تیسرا باب دفعہ ۲۵)، پ کو قیمتیں ۱، ۲، ۳، .... دیگئی ہیں اور نتیجوں کو جمع کیا گیا ہے۔
ما = ۰ رکھنے اور کُل جملہ کو π لا - لا^۲ کے مساوی رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$ف_۱ \, جب \, لا + ف_۲ \, جب \, ۲ \, لا + ف_۳ \, جب \, ۳ \, لا + \ldots\ldots$$
$$= \pi \, لا - لا^۲، \quad \text{صفر اور } \pi \text{ کے درمیان لا کی تمام}$$

قیمتوں کے لیے۔

---

[1] یہ مسئلہ دھات کی ایک نیم لامتناہی مستطیلی پٹی میں حرارت کی ایکساں تقسیم کا ہے جبکہ لامتناہی اضلاع صفر درجہ حرارت پر اور قاعدہ (ل لا - لا^۲) حرارت پر رکھے گئے ہوں جہاں ل مستطیلی پٹی کا عرض ہے۔

ممکن ہے طالب علم یہ خیال کرے کہ یہ مساوات اتنی ہی ناممکن ہے جتنی دوسری لیکن یہ ایک اہم واقعہ ہے کہ ہم ف کی ایسی قیمتیں منتخب کر سکتے ہیں کہ وہ درست ہو جائے۔

یہ ایک زیادہ عام مسئلہ کی جس کو اب ہم بیان کریں گے ایک مخصوص صورت ہے۔

(۵۴) **۴۷ — فوریر کے نیم سعت سلسلے** — لا کا ہر وہ تفاعل جو بعض خاص شرطوں کو پورا کرے شکل

ف (لا) = ا$_1$ جب لا + ا$_2$ جب ۲ لا + ا$_3$ جب ۳ لا + .... لا تناہی تک

کے ایک مستدق سلسلہ میں، صفر اور π کے درمیان لا کی تمام قیمتوں کے لیے (لیکن ضروری نہیں کہ انتہائی قیمتوں لا = ۰ اور لا = π کے لیے) پھیلایا جا سکتا ہے۔

اس کو فوریر[۱] کا نیم سعت جیبی سلسلہ کہا جاتا ہے۔

اوپر جن شرطوں کا اشارہ کیا گیا ہے وہ ہر طبیعی سوال میں عملاً پوری ہوتی ہیں[۲]۔

اسی طرح اُن ہی شرطوں کے تحت ف (لا) کو نیم سعت جیب التمامی سلسلہ

ب$_0$ + ب$_1$ جم لا + ب$_2$ جم ۲ لا + ب$_3$ جم ۳ لا + .... لا تناہی تک

میں پھیلایا جا سکتا ہے۔

---

[۱] جوزف فوریر (۱۷۶۸ء تا ۱۸۳۰ء) "La Theorie analytique de la chaleur" کے مصنف کی حیثیت میں بہت معروف ہے۔ اُس کا متذکرہ صدر سلسلہ حرارت کے ایصال کے مسئلوں کو حل کرنے میں پیدا ہوا۔

[۲] یہ کافی ہے کہ ف (لا)، واحد قیمتی، محدود، اور مسلسل ہو اور لا = ۰ اور لا = π کے درمیان اس کی اعظم اور اقل قیمتوں کی تعداد محدود ہو۔ لیکن یہ شرطیں ضروری نہیں ہیں۔ ضروری اور کافی شرطوں کا سیٹ اب تک منکشف نہیں ہوا۔

ان سلسلوں کو اُن سلسلوں کے مقابلہ میں جو صفر اور $۲\pi$ کے درمیان صادق آتے ہیں اور جن میں جیب اور جیب التمام دونوں رقمیں شامل ہوتی ہیں نیم سعت سلسلے کہتے ہیں۔

ان سلسلوں کے ثبوت بہت طویل اور مشکل ہیں[1]۔ لیکن یہ تسلیم کرلینے کے بعد کہ یہ پھیلاؤ ممکن ہیں سروں کی قیمتیں معلوم کرنا آسان ہے۔

جیبی سلسلہ کو جب ن لا سے ضرب دو اور رقم بہ رقم تکمل کرو[2] تو حاصل ہوگا۔

$$\int_{0}^{\pi} \text{ف (لا) جب ن لا فرلا}$$

$$= \text{ا}_{1}\int_{0}^{\pi} \text{جب لا جب ن لا فرلا} + \text{ا}_{2}\int_{0}^{\pi} \text{جب ۲ لا جب ن لا فرلا} + \cdots\cdots$$

وہ رقم جس میں اُن جزو ضربی ہے

$$\text{ا}_{\text{ن}}\int_{0}^{\pi} \text{جب}^{2}\,\text{ن لا فرلا}$$

$$= \frac{\text{ا}_{\text{ن}}}{۲}\int_{0}^{\pi} (۱ - \text{جم ۲ ن لا}) \text{ فرلا}$$

$$= \frac{\text{ا}_{\text{ن}}}{۲}\left[\text{لا} - \frac{۱}{۲\text{ن}}\text{جب ۲ ن لا}\right]_{0}^{\pi}$$

$$= \frac{۱}{۲}\,\text{ا}_{\text{ن}}\,\pi$$

ہے۔

وہ رقم جس میں کوئی دوسرا سر مثلاً $\text{ا}_{\text{ر}}$ شامل ہے (۵۵)

---

[1] فوریر کے سلسلوں پر پوری بحث حسب ذیل کتابوں میں ملے گی

(1) Hobson's "Theory of Functions". (2) Carslaw's "Fourier's series and Integrals"

[2] یہ فرض کر لینا کہ ایسا کرنا جائز ہے بحث طلب ہے۔

$$ب_ر \int_0^\pi \text{جب } ر\text{لا جب ن لا فرلا}$$

$$= \frac{ب_ر}{۲} \int_0^\pi \{\text{جم}(ن - ر)\text{لا} - \text{جم}(ن + ر)\text{لا}\}\text{ فرلا}$$

$$= \frac{ب_ر}{۲} \left[\frac{\text{جب}(ن - ر)\text{لا}}{ن - ر} - \frac{\text{جب}(ن + ر)\text{لا}}{ن + ر}\right]_0^\pi = ۰$$

ہے۔

اِس لیے بائیں جانب کی تمام رقمیں بجز ایک کے معدوم ہوتی ہیں۔

اِس طرح $\int_0^\pi \text{ف (لا) جب ن لا فرلا} = \frac{۱}{۲} ب_ن \pi$

یا $ب_ن = \frac{۲}{\pi} \int_0^\pi \text{ف (لا) جب ن لا فرلا}$

اِسی طرح یہ ثابت کرنا آسان ہے کہ اگر، صفر اور $\pi$ کے درمیان لا کی قیمتوں کے لیے،

$$\text{ف (لا)} = ب_۰ + ب_۱ \text{ جم لا} + ب_۲ \text{ جم ۲ لا} + \dots\dots$$

تو $ب_۰ = \frac{۱}{\pi} \int_0^\pi \text{ف (لا) فرلا}$

اور $ب_ن = \frac{۲}{\pi} \int_0^\pi \text{ف (لا) جم ن لا فرلا}$

ن کی صفر کے سوا دوسری قیمتوں کے لیے۔

## ۴۸ — فوریر کے سلسلوں پر مثالیں۔

(۱) $\pi$ لا - لا$^۲$ کو ایک نیم سعت جیبی سلسلہ میں جو لا = ۰ اور لا = $\pi$ کے درمیان درست ہو پھیلاؤ۔

اُس ضابطہ کو جو پچھلے دفعہ میں ثابت ہو چکا ہے دُہرانے کی

ضرورت نہیں ہے۔

فرض کرو $\pi\,\text{لا} - \text{لا}^2 = \text{ب}_1\,\text{جب لا} + \text{ب}_2\,\text{جب ۲ لا} + \text{ب}_3\,\text{جب ۳ لا} + \ldots$

جب ن لا سے ضرب دو اور صفر تا $\pi$ تکمل کرو تو

$\int_0^\pi (\pi\,\text{لا} - \text{لا}^2)\,\text{جب ن لا فرلا} = \text{ب}_\text{ن} \int_0^\pi \text{جب}^2\,\text{ن لا فرلا} = \frac{\pi}{2}\,\text{ب}_\text{ن}$ ،

حسب سابق

اب تکمل بالحصص سے

$$\int_0^\pi (\pi\,\text{لا} - \text{لا}^2)\,\text{جب ن لا فرلا}$$

$$= \left[-\frac{1}{\text{ن}}(\pi\,\text{لا} - \text{لا}^2)\,\text{جم ن لا}\right]_0^\pi + \frac{1}{\text{ن}}\int_0^\pi (\pi - 2\,\text{لا})\,\text{جم ن لا فرلا}$$

$$= 0 + \left[\frac{1}{\text{ن}^2}(\pi - 2\,\text{لا})\,\text{جب ن لا}\right]_0^\pi + \frac{2}{\text{ن}^2}\int_0^\pi \text{جب ن لا فرلا}$$

$= 0 - \frac{2}{\text{ن}^3}\left[\text{جم ن لا}\right]_0^\pi = \frac{4}{\text{ن}^3}$ اگر ن طاق ہے یا

$=$ اگر ن جفت ہے

اس طرح $\text{ب}_\text{ن} = \frac{8}{\pi\,\text{ن}^3}$ اگر ن طاق ہے یا

$= 0$ اگر ن جفت ہے

اِس لیے آخرالامر $\pi\,\text{لا} - \text{لا}^2 = \frac{8}{\pi}\left(\text{جب لا} + \frac{1}{27}\,\text{جب ۳ لا} + \frac{1}{125}\,\text{جب ۵ لا} + \ldots\right)$

(۲) ف (لا) کو ایک نیم سعت سلسلہ میں جو لا = ۰ سے لا = $\pi$ تک درست ہو پھیلاؤ

جہاں ف (لا) = م لا ، لا = ۰ اور لا = $\frac{\pi}{2}$ کے درمیان

اور ف (لا) = م (π − لا)، لا = $\frac{\pi}{2}$ اور لا = π کے درمیان

اِس صورت میں ف (لا) سعت کے مختلف حصوں میں مختلف تحلیلی جملوں سے حاصل ہوتا ہے[1] صرف جدت تکملوں کی قیمتیں معلوم کرنے میں ہے -

چنانچہ

$\int_{0}^{\pi}$ ف (لا) جب ن لا فرلا = $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ ف (لا) جب ن لا فرلا

+ $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$ ف (لا) جب ن لا فرلا

= $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ م لا جب ن لا فرلا + $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$ م (π − لا) جب ن لا فرلا

کام کا باقی حصہ ہم طالب علم پر چھوڑتے ہیں - نتیجہ ہے

$\frac{4}{\pi}$م (جب لا − $\frac{1}{9}$ جب ۳ لا + $\frac{1}{25}$ جب ۵ لا − $\frac{1}{49}$ جب ۷ لا + ....)

طالب علم کو دئے ہوئے تفاعل کی ترسیم کھینچنی چاہیے اور پھر اسکا مقابلہ اُس ترسیم سے کرنا چاہیئے جو مندرجۂ بالا پھیلاؤ کی پہلی رقم کی اور پہلی دو رقموں کے مجموعہ کی ہے[2] -

---

[1] فوریر کا سلسلہ اسوقت بھی اطلاق پذیر ہوتا ہے جبکہ ف (لا) کی ترسیم دی گئی ہو اور کوئی تحلیلی جملہ معلوم نہ ہو بشرطیکہ دفعہ ۷۴ کے ضمن میں دی ہوئی شرطیں پوری ہو جائیں - جب کسی تفاعل کی ترسیم دیجاتی ہے تو تکملے حسابی عمل تقرب سے معلوم کئے جاتے ہیں یا اس آلہ کے ذریعہ جس کو موسیقی محلل Harmonic Analyser کہتے ہیں -

[2] متعدد ترسیمیں کارسلا کی کتاب Fourier's Series and Integrals. کے ساتویں باب میں ملیں گی - نیز Phil. Mag. جلد ۴۵ (۱۸۹۸ء) میں بھی بڑی عمدہ ترسیمیں دی گئی ہیں -

## حل طلب مثالیں

حسب ذیل تفاعلوں کو نیم سعت جیبی سلسلوں میں پھیلاؤ جو لا = ۰ اور لا = π کے درمیان درست ہوں :-

(۱) ۱   (۲) لا   (۳) لا^۳   (۴) جم لا

(۵) و^لا   (۶) ف(لا) = ۰، از لا = ۰ تا لا = $\frac{\pi}{۴}$ اور از

لا = $\frac{۳\pi}{۴}$ تا π،

ف(لا) = (۴ لا - π) (۳π - ۴ لا)، از لا = $\frac{\pi}{۴}$ تا لا = $\frac{۳\pi}{۴}$

(۷) ان میں سے کون سے جملے (ا) لا = ۰ کے لیے، (ب) لا = π کے لیے درست ہیں -

## ۴۹ - حدود کی شرطوں کو پورا کرنے میں فوریر کے سلسلہ کا اطلاق -

اب ہم دفعہ ۴۶ کے مسئلہ کے حل کی تکمیل کر سکتے ہیں -
ہمیں دفعہ ۴۶ میں معلوم ہوا کہ

ف~۱~ و^-لا^ جب لا + ف~۲~ و^-۲^لا^ جب ۲ لا + ف~۳~ و^-۳^لا^ جب ۳ لا + ....

تمام شرطوں کو پورا کرتا ہے اگر صفر اور π کے درمیان لا کی تمام قیمتوں کے لیے

ف~۱~ جب لا + ف~۲~ جب ۲ لا + ف~۳~ جب ۳ لا + .... = π لا - لا^۲^  (۵۷)

دفعہ ۴۸ کی مثال (۱) میں ہمیں معلوم ہوا کہ صفر اور π کے درمیان لا کی تمام قیمتوں کے لیے،

$\frac{۸}{\pi}$ (جب لا + $\frac{۱}{۲۷}$ جب ۳ لا + $\frac{۱}{۱۲۵}$ جب ۵ لا + ...) = π لا - لا^۲^

اور ف (لا) = م (π - لا) لا = $\frac{\pi}{2}$ اور لا = π کے درمیان

اس صورت میں ف (لا) سعت کے مختلف حصوں میں مختلف تحلیلی جملوں سے حاصل ہوتا ہے[1] صرف جدت تکملوں کی قیمتیں معلوم کرنے میں ہے۔

چنانچہ

$$\int_{0}^{\pi} ف(لا) \text{ جب ن لا فر لا} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} ف(لا) \text{ جب ن لا فر لا}$$

$$+ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} ف(لا) \text{ جب ن لا فر لا}$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} م لا \text{ جب ن لا فر لا} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} م(\pi - لا) \text{ جب ن لا فر لا}$$

کام کا باقی حصہ ہم طالب علم پر چھوڑتے ہیں ۔ نتیجہ ہے

$$\frac{4م}{\pi} \left( \text{جب لا} - \frac{1}{9} \text{جب ۳ لا} + \frac{1}{25} \text{جب ۵ لا} - \frac{1}{49} \text{جب ۷ لا} + \ldots \right)$$

طالب علم کو دئے ہوئے تفاعل کی ترسیم کھینچنی چاہیے اور پھر اسکا مقابلہ اُس ترسیم سے کرنا چاہیے جو مندرجۂ بالا پھیلاؤ کی پہلی رقم کی اور پہلی دو رقموں کے مجموعہ کی ہے[2]۔

---

[1] فوریر کا سلسلہ اسوقت بھی اطلاق پذیر ہوتا ہے جبکہ ف (لا) کی ترسیم دی گئی ہو اور کوئی تحلیلی جملہ معلوم نہ ہو بشرطیکہ دفعہ ۷۰ کے ضمن میں دی ہوئی شرطیں پوری ہو جائیں۔ جب کسی تفاعل کی ترسیم دیجاتی ہے تو تکملے حسابی عمل تقرب سے معلوم کئے جاتے ہیں یا اس آلہ کے ذریعہ جس کو موسیقی محلل Harmonic Analyser کہتے ہیں۔

[2] متعدد ترسیمیں کارسلا کی کتاب Fourier's Series and Integrals کے ساتویں باب میں ملیں گی۔ نیز Phil. Mag. جلد ۴۵ (۱۸۹۸ء) میں بھی بڑی عمدہ ترسیمیں دی گئی ہیں ۔

## حل طلب مثالیں

حسب ذیل تفاعلوں کو نیم سعت جیبی سلسلوں میں پھیلاؤ جو لا = ۰ اور لا = π کے درمیان درست ہوں:-

(۱) ۱ (۲) لا (۳) لا$^{۳}$ (۴) جم لا

(۵) و$^{لا}$ (۶) ف(لا) = ۰، از لا = ۰ تا لا = $\frac{\pi}{۴}$ اور از

لا = $\frac{۳\pi}{۴}$ تا π،

ف(لا) = (۴ لا - π)(۳π - ۴لا)، از لا = $\frac{\pi}{۴}$ تا لا = $\frac{۳\pi}{۴}$

(۷) ان میں سے کون سے جملے (ا) لا = ۰ کے لیے، (ب) لا = π کے لیے درست ہیں -

## ۴۹ - حدود کی شرطوں کو پورا کرنے میں فوریر کے سلسلہ کا اطلاق -

اب ہم دفعہ ۴۶ کے مسئلہ کے حل کی تکمیل کر سکتے ہیں -

ہمیں دفعہ ۴۶ میں معلوم ہوا کہ

ف$_{۱}$ و$^{-ا}$ جب لا + ف$_{۲}$ و$^{-۲ا}$ جب ۲لا + ف$_{۳}$ و$^{-۳ا}$ جب ۳لا + .....

تمام شرطوں کو پورا کرتا ہے اگر صفر اور π کے درمیان لا کی تمام قیمتوں کے لیے

ف$_{۱}$ جب لا + ف$_{۲}$ جب ۲لا + ف$_{۳}$ جب ۳لا + .... = πلا - لا$^{۲}$ (۵۷)

دفعہ ۴۸ کی مثال (۱) میں ہمیں معلوم ہوا کہ صفر اور π کے درمیان لا کی تمام قیمتوں کے لیے،

$\frac{۸}{\pi}$ (جب لا + $\frac{۱}{۲۷}$ جب ۳لا + $\frac{۱}{۱۲۵}$ جب ۵لا + ...) = πلا - لا$^{۲}$

پس مطلوبہ حل

$$\frac{\text{۸}}{\pi}\left(\text{قو}^{-\text{ما}}\,\text{جب لا} + \frac{\text{۱}}{\text{۲۷}}\,\text{قو}^{-\text{۳ما}}\,\text{جب ۳ لا} + \frac{\text{۱}}{\text{۱۲۵}}\,\text{قو}^{-\text{۵ما}}\,\text{جب ۵ لا} + \cdots\right)$$

ہے۔

**۵۰ ۔** اُس صورت میں جبکہ حدود کی شرط میں $\pi$ کی بجائے ل ہو

ہم دیکھ چکے ہیں کہ تفرقی مساوات کا ایک حل $\text{ف قو}^{-\text{ب ما}}\,\text{جب ب لا}$

ہے اور شرطوں سے یہ معلوم ہوا کہ ب ایک مثبت صحیح عدد ن نہیں ہے

بلکہ اس کی شکل $\frac{\text{ن}\,\pi}{\text{ل}}$ ہونی چاہیے۔

$$\text{چنانچہ}\quad \text{ف}_{\text{۱}}\,\text{قو}^{-\frac{\pi\,\text{ما}}{\text{ل}}}\,\text{جب}\,\frac{\pi\,\text{لا}}{\text{ل}} + \text{ف}_{\text{۲}}\,\text{قو}^{-\frac{\text{۲}\pi\,\text{ما}}{\text{ل}}}\,\text{جب}\,\frac{\text{۲}\pi\,\text{لا}}{\text{ل}} + \cdots$$

تمام شرطوں کو پورا کرتا ہے اگر صفر اور ل کے درمیان لا کی تمام قیمتوں کے لیے

$$\text{ف}_{\text{۱}}\,\text{جب}\,\frac{\pi\,\text{لا}}{\text{ل}} + \text{ف}_{\text{۲}}\,\text{جب}\,\frac{\text{۲}\pi\,\text{لا}}{\text{ل}} + \cdots = \text{ل لا} - \text{لا}^{\text{۲}}$$

رکھو $\frac{\pi\,\text{لا}}{\text{ل}} = \text{ی}$ تو $\text{ل لا} - \text{لا}^{\text{۲}} = \frac{\text{ل}^{\text{۲}}}{\pi^{\text{۲}}}(\pi\,\text{ی} - \text{ی}^{\text{۲}})$۔ اِس طرح

تمام ف پہلے کی نسبت $\frac{\text{ل}^{\text{۲}}}{\pi^{\text{۲}}}$ گنا ہیں۔ اِس لیے حل ہے

$$\frac{\text{۸ ل}^{\text{۲}}}{\pi^{\text{۳}}}\left(\text{قو}^{-\frac{\pi\,\text{ما}}{\text{ل}}}\,\text{جب}\,\frac{\pi\,\text{لا}}{\text{ل}} + \frac{\text{۱}}{\text{۲۷}}\,\text{قو}^{-\frac{\text{۳}\pi\,\text{ما}}{\text{ل}}}\,\text{جب}\,\frac{\text{۳}\pi\,\text{لا}}{\text{ل}} + \frac{\text{۱}}{\text{۱۲۵}}\,\text{قو}^{-\frac{\text{۵}\pi\,\text{ما}}{\text{ل}}}\,\text{جب}\,\frac{\text{۵}\pi\,\text{لا}}{\text{ل}} + \cdots\right)$$

# چوتھے باب پر متفرق مثالیں

(۱) تصدیق کرو کہ

$$\frac{\text{جف}^2\,\text{و}}{\text{جف}\,\text{لا}^2} = \frac{1}{\text{ک}}\,\frac{\text{جف}\,\text{و}}{\text{جف}\,\text{ت}}$$

کا ایک حل $\text{و} = \frac{1}{\sqrt{\text{ت}}}\,\text{ۇ}^{-\frac{\text{لا}^2}{4\text{ک}\text{ت}}}$ ہے۔

(۲) $\text{و} = \text{ا}\,\text{ۇ}^{-\text{ب}\,\text{لا}}\,\text{جب}(2\text{ب}^2\text{ک}\,\text{ت} - \text{ب}\,\text{لا})$ سے ا اور ب کو ساقط کرو۔

(۳) $\frac{\text{جف}\,\text{و}}{\text{جف}\,\text{ت}} = \text{ک}\,\frac{\text{جف}^2\,\text{و}}{\text{جف}\,\text{لا}^2} - \text{ہ}\,\text{و}$ میں $\text{و} = \text{ۇ}^{-\text{ہ}\text{ت}}\,\text{ط}$ رکھکر اُسکو

$$\frac{\text{جف}\,\text{ط}}{\text{جف}\,\text{ت}} = \text{ک}\,\frac{\text{جف}^2\,\text{ط}}{\text{جف}\,\text{لا}^2}$$

میں تحویل کرو۔

[پہلی مساوات سے ایک موصل سلاخ کی تپش معلوم ہوتی ہے جبکہ سلاخ کی سطح ہوا میں جو صفر تپش پر ہو حرارت کا اشعاع کر رہی ہو۔]

(۴) $\frac{\text{جف}\,\text{و}}{\text{جف}\,\text{ت}} = \frac{\text{ک}}{\text{ر}^2}\,\frac{\text{جف}}{\text{جف}\,\text{ر}}\left(\text{ر}^2\,\frac{\text{جف}\,\text{و}}{\text{جف}\,\text{ر}}\right)$ میں $\text{ط} = \text{ر}\,\text{و}$ رکھکر اُس کو

$$\frac{\text{جف}\,\text{ط}}{\text{جف}\,\text{ت}} = \text{ک}\,\frac{\text{جف}^2\,\text{ط}}{\text{جف}\,\text{ر}^2}$$

میں تحویل کرو۔

[پہلی مساوات سے ایک کُرہ کی تپش معلوم ہوتی ہے جبکہ حرارت نصف قطری سمت میں بہ رہی ہو۔]

(۵) و = $\frac{۱}{ر}$ [ف (ر - ا ت) + فا (ر + ا ت)] (۵۸)

سے اختیاری تفاعلوں کو ساقط کرو۔

(۶) (اَ) ثابت کروکہ اگر و = $e^{\text{م لا + خ ن ت}}$، مساوات

$$\frac{\text{جف و}}{\text{جف ت}} = \text{ک} \frac{\text{جف}^{۲}\text{ و}}{\text{جف لا}^{۲}} - \text{ہ و}$$

کا ایک حل ہوتو م کو ملتف ہونا چاہیئے جہاں ن اور ل حقیقی ہیں۔

(۲َ) پس م = - گ - خ ف رکھکر ثابت کروکہ و = و$_{\text{۰}}$ $e^{-\text{گ لا}}$ جب (ن ت - ف لا)

ایک حل ہے جو لا = ۰ کے لیے و$_{\text{۰}}$ جب ن ت میں تحویل ہوتا ہے بشرطیکہ ک (گ$^{۲}$ - ف$^{۲}$) = ہ اور ن = ۲ ک ف گ ۔

(۳َ) اگر و = ۰ جبکہ لا = ∞ تو ثابت کروکہ اگر ک اور ن مثبت ہوں تو گ اور ف بھی مثبت ہونگے۔

[انجسٹرام (Angstrom) کے اُس طریقہ میں جو ک (نفوذیت) کی پیمائش کے لیے ہے ایک بہت ہی لمبی سلاخ کا ایک سِرا تپش و$_{\text{۰}}$ جب ن ت کی دَوری تبدیلی کے تحت ہوتا ہے۔ اِس کی وجہ سے حرارت کی موجیں سلاخ کی سمت میں اِس پر سفر کرتی ہیں۔ اِن کی رفتار اور شرحِ انحطاط کی پیمائش کرکے $\frac{\text{ن}}{\text{ف}}$ اور گ کو معلوم کیا جاتا ہے۔ ک کو پھر

ک = $\frac{\text{ن}}{\text{۲ ف گ}}$ سے محسوب کیا جاتا ہے۔]

(۷) $\frac{\text{جف و}}{\text{جف ت}} = \text{ک} \frac{\text{جف}^{۲}\text{ و}}{\text{جف لا}^{۲}}$ کا حل معلوم کرو جو لا = ۰ کے لیے و$_{\text{۰}}$ جب ن ت میں اور لا = + ∞ کے لیے صفر میں تحویل ہو۔

[یہ پچھلے سوال کا مسئلہ ہے جبکہ کوئی اشعاع وقوع پذیر نہ ہو۔ سلاخ کی بجائے ایک نیم لامتناہی ٹھوس جسم جو ایک مستوی رخ سے محدود ہو رکھا جا سکتا ہے اگر بہاؤ ہمیشہ اِس رخ کے عمود وار ہو۔ کیلوِن (Kelvin) نے اِس طریقہ پر ک، کو زمین کے لیے معلوم کیا تھا۔]

(۸) ثابت کرو کہ ہمزاد مساواتیں

$$- \frac{جف\ و}{جف\ لا} = ر ع + ل \frac{جف\ ع}{جف\ ت} ،$$

$$- \frac{جف\ ع}{جف\ لا} = ک\ و + ج \frac{جف\ و}{جف\ ت}$$

حلوں

$$و = و_\cdot\ نو^{-(گ + خ ف) لا + خ ن ت}$$

$$ع = ع_\cdot\ نو^{-(گ + خ ف) لا + خ ن ت}$$

سے پوری ہوتی ہیں اگر

$$گ^2 - ف^2 = ر ک - ن^2 ل ج ،$$

$$2 ف گ = ن (ر ج + ل ک)$$

اور

$$ع_\cdot (ر + خ ل ن) = و_\cdot (گ + خ ج ن)$$

[یہ ٹیلیفون کے تار کے لیے ہیوی سائڈ کی مساواتیں ہیں جبکہ تار کی مزاحمت ر، گنجائش ج، امالۂ ذاتی ل، اور رِسْتَن (Leakance) ک ہو جہاں اِن سب کی اکائی طول پیمائش کیا گیا ہے۔ رو ع ہے اور قوت محرکہ برق و۔]

(۹) ثابت کرو کہ پچھلی مثال میں گ، ن کے تابع نہیں ہے اگر

$$ر ج = ک ل$$

[موج کی تخفیف گ پر منحصر ہوتی ہے جو بالعموم ن پر منحصر ہوتا ہے۔]

مثلاً اگر آواز مختلف تعدد کی موسیقی موجوں سے ترکیب یافتہ ہو تو یہ موجیں ترقیق کے مختلف درجوں کے ساتھ منتقل ہوں گی۔ اس لیے دوسرے سرے پر آواز بگڑی ہوئی پہنچیگی۔ ل اور ک کو بڑھا کر ر ج = ک ل بنانے کی ہیوی سائڈ کی ترکیب اِس بگاڑ کو روکتی ہے۔]

(۵۹) (۱۰) اگر مساوات (۸) میں ل = ک = ۰. تو ثابت کرو کہ و اور ع دونوں کی رفتار $\sqrt{\frac{۲ن}{ر ج}}$ سے اشاعت ہوتی ہے۔

[رفتار $\frac{ن}{ف}$ سے حاصل ہوتی ہے۔]

(۱۱) ثابت کرو کہ

ف = ۰، عہ = ۰،

ق = ۰، بہ = [illegible] ب (لا - و ت)،

ر = ر جب ب (لا - و ت)، جہ = ۰

سے ہمزاد مساواتیں

$$\frac{ک}{ج}\frac{جف\ ف}{جف\ ت} = \frac{جف\ جہ}{جف\ ما} - \frac{جف\ بہ}{جف\ ی}،\quad -\frac{مہ}{ج}\frac{جف\ عہ}{جف\ ت} = \frac{جف\ ر}{جف\ ما} - \frac{جف\ ق}{جف\ ی}،$$

$$\frac{ک}{ج}\frac{جف\ ق}{جف\ ت} = \frac{جف\ عہ}{جف\ ی} - \frac{جف\ جہ}{جف\ لا}،\quad -\frac{مہ}{ج}\frac{جف\ بہ}{جف\ ت} = \frac{جف\ ف}{جف\ ی} - \frac{جف\ ر}{جف\ لا}$$

$$\frac{ک}{ج}\frac{جف\ ر}{جف\ ت} = \frac{جف\ بہ}{جف\ لا} - \frac{جف\ عہ}{جف\ ما}،\quad -\frac{مہ}{ج}\frac{جف\ جہ}{جف\ ت} = \frac{جف\ ق}{جف\ لا} - \frac{جف\ ف}{جف\ ما}$$

پوری ہوتی ہیں بشرطیکہ $و = \sqrt{ج \backslash ک\ مہ}$ ، اور $بہ = -\sqrt{(ک \backslash مہ)}\ ر ا$

[یہ ایک برق گذار کے لیے جسکی نوعی امالی گنجائش ک اور نفوذ پذیری مہ ہے میکسول کی برقی مقناطیسی مساواتیں ہیں۔ برقی حدت کے اجزائے ترکیبی ف، ق، ر اور مقناطیسی حدت کے عہ، بہ، جہ ہیں۔ برقی مقناطیسی

اکائی اور برقی سکونی اکائی میں نسبت ج ہے (جو اثیر میں نور کی رفتار کے مساوی ہے)۔ حل سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ مستوی برقی مقناطیسی موجیں رفتار $\frac{ج}{\sqrt{ک مہ}}$ کے ساتھ سفر کرتی ہیں اور یہ بھی معلوم ہوتا ہے کہ برقی اور مقناطیسی حدتیں اشاعت کی سمت پر اور ایک دوسرے کے عمود وار ہیں۔]

(۱۲) $\frac{جف و}{جف ت} = ک \frac{جف^۲ و}{جف لا^۲}$ کا ایسا حل معلوم کرو کہ

و ≠ ∞ اگر ت = + ∞ ،

و = ۰ اگر لا = ۰ یا π ، ت کی تمام قیمتوں کے لیے

و = π لا - لا^۲ اگر ت = ۰ ، صفر اور π کے درمیان لا کی قیمتوں کے لیے

[نوٹ۔ اس سوال کو حل کرنے سے پہلے دفعات ۴۶ اور ۴۹ کا مکرر مطالعہ کرو۔

و ، طول π کی ایک ایسی غیر اشعاعی سلاخ کی تپش ہے ، جس کے سرے صفر درجہ حرارت پر رکھے گئے ہیں ۔ سلاخ کی تپش ایک سرے سے فاصلہ لا پر ابتداً (π لا - لا^۲) ہے۔]

(۱۳) پچھلے سوال کا حل کیا ہو جائیگا اگر سلاخ کا طول π کی بجائے ل ہو۔

[دفعہ ۵۰ کے مطابق عمل کرو۔]

(۱۴) سوال (۱۲) کو حل کرو اگر شرط ، و = ۰ جبکہ لا = ۰ یا π کی بجائے $\frac{جف و}{جف لا} = ۰$ جبکہ لا = ۰ یا π ہو۔

[سلاخ کے سرے مستقل تپش پر ہونے کی بجائے وہ اب ایسے ہیں کہ ان میں سے کوئی حرارت نہیں گذر سکتی۔]

(۱۵) سوال (۱۲) کو حل کرو اگر جملہ π لا - لا^۲ کی بجائے ۰۰۱ رکھا جائے۔

(۱۶) $\frac{جف و}{جف ت} = ک \frac{جف^۲ و}{جف لا^۲}$ کا ایسا حل معلوم کرو کہ

و ≠ ∞ اگر ت = + ∞

و = ۱۰۰ اگر لا = ۰ یا π ، ت کی تمام قیمتوں کے لیے

و = ۰ اگر ت = ۰ ، صفر اور π کے درمیان لا کی تمام قیمتوں کے لیے۔

[ برف کی مانند ٹھنڈی سلاخ کی بجائے اُس کے سِرے جوش کھاتے ہوئے پانی میں ہیں ]

(۱۷) سوال (۱۵) کو حل کرو اگر طول π کی بجائے ل ہو۔ اگر ل [illegible] نہایت بڑے تو ثابت کرو کہ لامتناہی سلسلہ تکملہ

$$\frac{۲۰۰}{\pi}\int_{۰}^{\infty}\frac{۱}{\text{عہ}}\,\text{و}^{-\text{ک عہ}^{۲}\text{ت}}\ \text{جب عہ لا فرعہ}$$

ہو جاتا ہے۔

[ نوٹ ۔ یہ فوریر کا ایک تکملہ کہلاتا ہے۔ اِس نتیجہ کو حاصل کرنے کے لیے رکھو

$$\text{فرعہ} = \frac{\pi ۲}{\text{ل}} \quad \text{اور} \quad \text{عہ} = \frac{\pi(۱+۲ر)}{\text{ل}}$$

کیلون نے زیرزمین تپش کے اضافہ کی شرح مشاہدہ کر کے [illegible] عمر کا اندازہ لگانے میں ایک تکملہ کا استعمال کیا۔ (دیکھو اِس [illegible] کے ختم پر تفرق مثالوں میں مثال ۱۰۷)۔ لیکن اسٹرٹ (Strutt) [illegible] والیہ انکشاف سے کہ حرارت زمین کے اندر تابکارانہ عمل سے مسلسل پیدا ہو رہی ہے یہ معلوم ہوا کہ کیلون کا تخمینہ بہت کم تھا۔ ]

(۱۸) $\frac{\text{جف و}}{\text{جف ت}} = \text{ک}\,\frac{\text{جف}^{۲}\text{و}}{\text{جف لا}^{۲}}$ کا ایک ایسا حل معلوم کرو کہ

و = ∞ جبکہ ت = + ∞

$\frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}} = ۰$ جبکہ لا = ۰ ،
و = ۰ جبکہ لا = ل ،
} ت کی تمام قیمتوں کے لیے ،

و = و. جبکہ ت = ۰، صفر اور ل کے درمیان لا کی تمام قیمتوں کے لیے ۔

[ اگر ایک امتحانی نلی کو جس میں نمک کا محلول ہو پانی کے ایک بہت بڑے برتن میں پوری طرح ڈبو دیا جائے تو نمک امتحانی نلی سے باہر بڑے برتن کے پانی میں نفوذ کرے گا۔ اگر نمک کا ابتدائی ارتکاز و. ہو اور امتحانی نلی کے طول ل میں وہ بھرا ہوا ہو تو کسی لمحہ پر نلی کی تہ سے لا ارتفاع پر نمک کا ارتکاز و سے حاصل ہوگا۔ شرط $\frac{جف\ و}{جف\ لا} = ۰$ جبکہ لا = ۰ کے یہ معنے ہیں کہ بند سرے پر کوئی نفوذ وقوع پذیر نہیں ہوتا۔ و = ۰ جبکہ لا = ل کے یہ معنے ہیں کہ امتحانی نلی کے سرے پر تقریباً خالص پانی ہے۔]

(۱۹) $\frac{جف^۲\ ما}{جف\ ت^۲} = و^۲ \frac{جف^۲\ ما}{جف\ لا^۲}$ کا ایک ایسا حل معلوم کرو کہ ما، لا کا مثلثی تفاعل ہو،

ما = ۰ جبکہ لا = ۰ یا ۲۱ ، ت کی تمام قیمتوں کے لیے،

$\frac{جف\ ما}{جف\ ت} = ۰$ جبکہ ت = ۰، لا کی تمام قیمتوں کے لیے،

جبکہ ت = ۰ $\begin{cases} ما = م\ لا، & لا = ۰ \text{ اور } \frac{۲۱}{۲} \text{ کے درمیان،} \\ ما = م\ (۲۱ - لا)، & لا = \frac{۲۱}{۲} \text{ اور } ۲۱ \text{ کے درمیان} \end{cases}$

[**نوٹ** ۔ دفعہ ۴۸ کی دوسری حل کردہ مثال دیکھو۔ (۶۱)

ما اُس ڈوری کا عرضی ہٹاؤ ہے جو دو نقطوں کے درمیان جنہیں فاصلہ ۲۱ ہے تنی ہوئی ہے۔ ڈوری کو اُس کے وسطی نقطہ پر پکڑ کر ایک طرف فاصلہ $\frac{م\ ۲۱}{۲}$ تک کھینچکر چھوڑ دیا گیا ہے۔]

(۲۰)* $\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر لا}^2} = \text{عف}^2\,\text{ما}$ کے حل کو جہاں عف ایک مستقل ہے شکل

$$\text{ما} = \text{و}^{\text{لاعف}}\,\text{ا} + \text{و}^{-\text{لاعف}}\,\text{ب}$$

میں لکھکر $\frac{\text{جف}^2\,\text{ما}}{\text{جف لا}^2} = \frac{\text{جف}^2\,\text{ما}}{\text{جف ت}^2}$ کے حل کو شکل

$$\text{ما} = \text{ف}(\text{ت} + \text{لا}) + \text{فا}(\text{ت} - \text{لا})$$

میں، عف کی بجائے $\frac{\text{جف}}{\text{جف ت}}$، ا کی بجائے ف (ت)، اور ب کی بجائے فا (ت) درج کر کے اور ٹیلر کے مسئلہ کو اس کی علامتی شکل ف (ت + لا) $= \text{و}^{\text{لاعف}}$ ف (ت) میں استعمال کر کے اخذ کرو۔

[ان علامتی طریقوں سے جو نتیجے حاصل ہوں ان کو صرف غالباً صحیح نتیجے سمجھنا چاہیئے۔ جب تک کہ دوسرے ذریعوں سے ان کی تصدیق نہ ہو۔ اُس استدلال کا جو نتیجہ سے واپس تفرقی مساوات تک پہنچنے میں کیا جاتا ہے بڑی احتیاط سے ساتھ امتحان کرنے کی ضرورت ہے۔]

(ہیوی سائڈ نے علامتی طریقوں کو بعض ایسے مسئلوں کے حل کرنے میں استعمال کیا ہے جو دوسرے طریقوں سے حل نہیں ہوتے۔ دیکھو اسکی کتاب (Electromagnetic Theory)

(۲۱)* $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{عف}^2\,\text{ما}$ کے حل سے جہاں عف ایک مستقل ہے $\frac{\text{جف ما}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف}^2\,\text{ما}}{\text{جف ت}^2}$ کا حل شکل

---

* مطالعہ اول میں قابل ترک

ما = ف(ت) + لا (جف۲ ف / جف ت۲) + (لا۲ / |۲) (جف۲ ف / جف ت۲) + ........

میں اخذ کرو۔

[یہ حل نہ ہوگا اگر سلسلہ مستدق نہ ہو]

**جف۲ ما / جف لا۲ = (۱ / ا۲) جف۲ ما / جف ت۲ کا عام حل -**

آزمایشی حل کے طور پر ما = ف (لا + م ت) رکھو جس میں م مستقل ہے۔ اِس سے تفرقی مساوات

ف‌'' (لا + م ت) = (م۲ / ا۲) ف‌'' (لا + م ت)

حاصل ہوتی ہے جو پوری ہوگی اگر م = ± ا -

اِس طرح دو حل ما = ف (لا - ا ت) اور ما = فا (لا + ا ت) حاصل ہوتے ہیں اور چونکہ تفرقی مساوات خطی ہے تیسرا حل

ما = ف (لا - ا ت) + فا (لا + ا ت)

ہے جس میں اختیاری تفاعلوں کی تعداد تفرقی مساوات کے رتبہ (دو) کے مساوی ہے اور اِس لیے اِس سے زیادہ عام حل کی توقع نہیں کی جاسکتی (دیکھو صفحہ ۴۳۵ اور صفحہ ۵۰۸)۔

[دفعات ۱۷۸ تا ۱۸۱ اِس باب کا تکملہ ہیں۔ اِن میں بالخصوص مرتعش ڈوریوں کی مساوات اور موج کی سہ ابعادی مساوات سے بحث کی گئی ہے۔ دفعہ ۱۸۱ کے آخر میں ریاضیاتی طبیعات کی تفرقی مساواتوں پر جو اہم کتابیں لکھی گئی ہیں اِن میں سے چند کی فہرست دی گئی ہے۔]

(۶۲)

# پانچواں باب

## وہ مساواتیں جو رتبہ اول کی ہیں لیکن درجہ اول کی نہیں۔

**۵۱** — اس باب میں ہم پہلے رتبہ اور پہلے درجہ سے اعلیٰ درجہ کی مساواتوں کے بعض خاص نمونوں پر غور کریں گے، اِن کا حل بعض اوقات لامتناہی سلسلوں کے استعمال کے بغیر حاصل کیا جاسکتا ہے۔ $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ کو اختصاراً ع سے تعبیر کیا جائے گا۔

یہ خاص نمونے حسب ذیل ہیں:

(ا) وہ جو ع کے لیے حل پذیر ہیں،
(ب) وہ جو ما کے لیے حل پذیر ہیں،
(ج) وہ جو لا کے لیے حل پذیر ہیں۔

**۵۲** — **وہ مساواتیں جو ع کے لیے حل پذیر ہیں۔** اگر ہم ع کے لیے حل کرسکیں تو ن ویں درجہ کی مساوات پہلے درجہ کی ن مساواتوں میں تحویل ہو گی جن پر ہم دوسرے باب کے طریقے استعمال کرسکتے ہیں۔

مثال (۱) مساوات $ع^2 + ع\, لا + ع\, ما + لا\, ما = 0$

سے مساواتیں $ع = -لا$ یا $ع = -ما$

حاصل ہوتی ہیں اور اِن سے حل

۲ ما = - لا^۲ + ج۱ یا لا = - لوک ما + ج۲

حاصل ہوتے ہیں جن کو ایک مساوات

( ۲ ما + لا^۲ - ج۱ ) ( لا + لوک ما - ج۲ ) = ۰، ......( ۱ )

میں بیان کیا جا سکتا ہے۔

یہاں ایک مشکل سے واسطہ پڑتا ہے۔ کامل ابتدائی میں بظاہر دو اختیاری مستقل شامل ہیں حالانکہ صرف ایک ہونا چاہیئے کیونکہ مساوات پہلے رتبہ کی ہے۔ لیکن حل

( ۲ ما + لا^۲ - ج ) ( لا + لوک ما - ج ) = ۰، ......( ۲ )

پر غور کرو۔

اگر ہم مستقلوں ج، ج۱، ج۲ میں سے ہر ایک کی صرف ایک قیمت پر غور کریں تو ان میں سے ہر مساوات منحنیوں کے ایک زوج کو تعبیر کرتی ہے اور بلاشبہ یہ زوج ایک ہی نہیں ہوں گے (بجز اس کے کہ ج = ج۱ = ج۲) - لیکن اگر ہم منحنیوں کے زوجوں کے اس لامتناہی جتھ پر غور کریں جو ان مستقلوں کو - ∞ سے + ∞ تک تمام ممکن قیمتیں دینے سے حاصل ہوتا ہے تو بحیثیت مجموعی ایک ہی لامتناہی جتھ ملیگا اگرچہ ممکن ہے کہ ترتیب مختلف ہو اس لیے (۲) کو کامل ابتدائی سمجھا جا سکتا ہے۔

(۲۳) مثال (۲) ع^۲ - ع - ۲ = ۰

یہاں ع = ۱ یا ع = - ۲

ش ا = لا + ج، یا ا = - ۲لا + ج

پچھلی مثال کے مطابق ہم کامل ابتدائی کو

( ا - لا - ج۱ ) ( ا + ۲لا - ج۲ ) = ۰

(ما-لا-ج)(ما+۲لا-ج)=۰ کی بجائے
لیتے ہیں -

ان میں سے ہر مساوات اُن تمام خطوں کو تعبیر کرتی ہے جو ما = لا یا
ما = -۲لا کے متوازی ہیں -

## حل طلب مثالیں

(۱) ع۲+ع-۶=۰  (۲) ع۲+۲لاع=۳لا۲
(۳) ع۲=لا۵  (۴) لا+ماع۲=ع(۱+لاما)
(۵) ع۳-ع(لا۲+لاما+ما۲)+لاما(لا+ما)=۰
(۶) ع۲-۲ع جمز لا+۱=۰

## ۵۳ - وہ مساواتیں جو ما کے لیے حل پذیر ہیں -

اگر مساوات ما کے لیے حل پذیر ہے تو حل شدہ شکل کا تفرق لا کے لحاظ سے کیا جاتا ہے -

مثال (۱) ع۲-ع ما+لا=۰

ما کے لیے حل کرنے پر  ما = ع + لا/ع

تفرق کرنے پر  ع = فرع/فرلا + ۱/ع - لا/ع۲ · فرع/فرلا

یعنی  (ع - ۱/ع) فرلا/فرع + لا/ع۲ = ۱

یہ پہلے رتبہ کی تفرقی مساوات ہے جبکہ ع کو غیر تابع متغیر سمجھا جائے۔
چنانچہ دفعہ ۱۹ کے مطابق عمل کرنے پر حاصل ہوگا

لا = ع (ج + جمز۱- ع) (ع۲-۱)-۱/۲

∴ ما = ع + لا/ع ، ما = ع + (ج + جتز^-١ ع)(ع^٢ - ١)^(-١/٢)

اِن دو مساواتوں سے جو لا اور ما کے لیے ع کی رقوم میں ہیں تفرقی مساوات کے حل کی مبدلی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں ۔ جب ج کی قیمت معلوم ہو تو ع کی ہر قیمت کے متناظر لا کی ایک محدود قیمت اور ما کی ایک محدود قیمت حاصل ہوگی اور اِس طرح ایک نقطہ متقرر ہوگا ۔ جب ع متغیر ہوتا ہے تو نقطہ حرکت کرتا ہے اور ایک منحنی مرتسم کرتا ہے ۔ اِس مثال میں ہم ع کو ساقط کرکے لا اور ما کو مربوط کرنے والی مساوات معلوم کرسکتے ہیں لیکن منحنی کو مرتسم کرنے کے لیے یہ مبدلی شکلیں اگر بہتر نہیں تو اتنی ہی اچھی ہیں

**مثال (۲)** ٣ ع^٥ - ع ما + ١ = ٠

ما کے لیے حل کرنے پر ما = ٣ ع^٤ + ع^-١

تفرق کرنے پر ع = ١٢ ع^٣ (فرع/فرلا) - ع^-٢ (فرع/فرلا)

یعنے فرلا = (١٢ ع^٢ - ع^-٣) فرع

تکمل کرنے سے لا = ٤ ع^٣ + (١/٢) ع^-٢ + ج

اور اوپر سے ما = ٣ ع^٤ + ع^-١

طالب علم ج کی کسی مخصوص قیمت مثلاً ج = ٠ کے لیے اِس کی ترسیم معلوم کرے ۔

## ٥٤ ـ وہ مساواتیں جو لا کے لیے حل پذیر ہیں ۔ (٦٤)

اگر مساوات لا کے لیے حل پذیر ہے تو حل شدہ شکل کا تفرق ما کے لحاظ سے کیا جاتا ہے اور فرلا/فرما کو شکل ١/ع میں لکھا جاتا ہے ۔

مثال ۔ $ع^2 - ع\ ما + لا = ۰$ ، اس کو گذشتہ دفعہ میں ما کیلئے حل کیا گیا تھا۔
لا کے لیے حل کرنے پر $لا = ع\ ما - ع^2$

ما کے لحاظ سے تفرق کرنے پر $\frac{۱}{ع} = ع + ما \frac{فرع}{فرما} - ۲ع \frac{فرع}{فرما}$

یعنے $\frac{فرما}{فرع} (ع - \frac{۱}{ع}) + ما = ۲ع$

جو پہلے رتبہ کی ایک خطی مساوات ہے جبکہ ع کو غیر تابع متغیر اور ما کو تابع متغیر سمجھا جائے ۔ اس کو دفعہ ۱۹ کے مطابق حل کیا جا سکتا ہے ۔ طالب علم اُس نتیجہ پر پہنچیگا جو گذشتہ دفعہ میں معلوم کیا گیا ہے ۔

## حل طلب مثالیں ۔

(۱) $لا = ۴ع + ۳ع^2$ (۲) $ع^2 - ۲لاع + ۱ = ۰$

(۳) $ما = ع^2 لا + ع$ (۴) $ما = لا + ع^3$

(۵) $ع^3 + ع = و^{لا}$ (۶) $۲ما + ع^2 + ۲ع = ۲لا(ع+۱)$

(۷) $ع^2 - ع(ما+۳) + لا = ۰$ (۸) $ما = ع\ جب\ ع + جم\ ع$

(۹) $ما = ع\ مس\ ع + لوک\ جم\ ع$ (۱۰) $و^{ع - ما} = ع^2 - ۱$

(۱۱) $ع = مس (لا - \frac{ع}{۱ + ع^2})$

(۱۲) ثابت کرو کہ اُس قبیل کے تمام منحنی جو مثال (۱) کے حل سے حاصل ہوتے ہیں محور ما کو علی القوائم قطع کرتے ہیں ۔ ج کی قیمت قبیل کے اُس منحنی کے لیے معلوم کرو جو نقطہ (۱، ۰) میں سے گذرتا ہے ۔

(۱۳) مثال (۹) کے حل میں ج = ۰ رکھنے سے جو منحنی حاصل ہوتا ہے اُس کو مرتسم کرو ۔ اُن نقطوں پر مماس کھینچو جو ع = ۰، ع = ۱ ء، ع = ۲ ء، ع = ۳ ء سے حاصل ہوتے ہیں اور پیمائش سے اس امر کی تصدیق کرو کہ اِن مماسوں کے ڈھال علی الترتیب ۰، ۱ ء، ۲ ء اور ۳ ء ہیں ۔

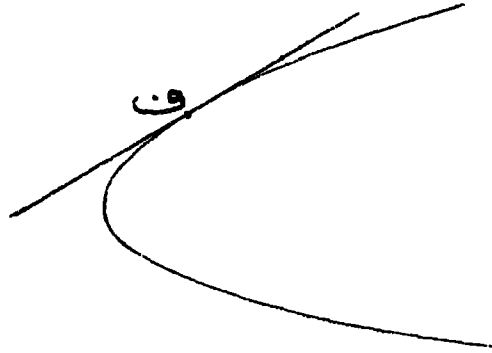
(۵)

(۶۵)

# چھٹا باب

## نادر حل[1]

**۵۵** — ہم محددوں کے علم ہندسہ سے جانتے ہیں کہ خطِ مستقیم ما = م لا + $\frac{۱}{م}$ مکافی ما$^{۲}$ = ۴ لا کو مس کرتا ہے خواہ م کی قیمت کچھ ہی ہو —

کسی مخصوص مماس کے نقطہ تماس ف پر غور کرو ۔ ف پر مماس اور مکافی کی سمتیں وہی ہیں اور اس لیے اس نقطہ پر $\frac{\text{قرما}}{\text{قرلا}}$ کی قیمت دونوں میں مشترک ہے اور نیز لا اور ما کی قیمتیں بھی —

شکل (۷)

[1] اس باب کے استدلال ہندسی تخیل پر مبنی ہیں ۔ اس لیے نتیجوں کو ثابت شدہ نہیں سمجھا جا سکتا ان کے متعلق صرف یہ خیال کیا جا سکتا ہے کہ وہ بعض صورتوں میں غالباً درست ہیں ۔ تحلیلی نظریہ میں بڑی مشکلیں پیش آتی ہیں { دیکھو ایم ۔ جے ۔ ایم ۔ ہل Proc. Lond. Math. Soc. 1918 }

لیکن مماس کے لیے م = $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ = ع (فرض کرو)، اس لیے مماس

تفرقی مساوات ما = ع لا + $\frac{\text{ا}}{\text{ع}}$ کو پورا کرتا ہے۔

یہ مساوات نقطہ ف پر مکافی کے لیے بھی درست ہے جہاں لا، ما، اور ع مماس اور مکافی دونوں کے لیے وہی ہیں۔ اب چونکہ ف مکافی پر کوئی نقطہ ہو سکتا ہے اس لیے مکافی کی مساوات ما۲ = ۴ ا لا کو تفرقی مساوات ما = ع لا + $\frac{\text{ا}}{\text{ع}}$ کا ایک حل ہونا چاہئے جیسا کہ طالب علم آسانی سے اس کی تصدیق کر سکتا ہے۔

(۶۶) عام طور پر اگر منحنیوں کا کوئی اکہرا لامتناہی نظام ہو اور یہ سب منحنی ایک ثابت منحنی کو جس کو ہم لفاف[۱] کہتے ہیں مس کریں اور اگر یہ قبیل پہلے رتبہ کی کسی تفرقی مساوات کے کامل ابتدائی کو تعبیر کرے تو لفاف سے اس تفرقی مساوات کا ایک حل تعبیر ہوگا۔ کیونکہ لفاف کے ہر نقطہ پر لا، ما، اور ع کی قیمتیں لفاف کے لیے اور قبیل کے اُس منحنی کے لیے جو لفاف کو اُس نقطہ پر مس کرتا ہے وہی ہوتی ہیں۔

ایسے حل کو نادر حل کہتے ہیں۔ اِس میں کوئی اختیاری مستقل شامل نہیں ہوتا اور نہ وہ کامل ابتدائی سے، اِلّا استثنائی صورتوں کے اختیاری مستقل کو کوئی مخصوص قیمت دیکر حاصل کیا جا سکتا ہے (دفعہ ۱۶۰)۔

---

[۱] لیمب کے "صغاری احصاء" (دوسرا اڈیشن) دفعہ ۱۵۵ میں منحنیوں کے کسی قبیل کے لفاف کی یہ تعریف کی گئی ہے کہ وہ قبیل کے متصلہ منحنیوں کے انتہائی تقاطع کا طریق ہوتا ہے۔ اس تعریف میں لفاف کے علاوہ یا اس کی بجائے عقدہ طریق اور قرن طریق بھی شامل ہو سکتے ہیں۔ [اس کی ہندسی توجیہ ہم دفعہ ۶۲ میں بیان کریں گے۔ تحلیلی ثبوت کے لیے لیمب کی کتاب دیکھو]۔

# حل طلب مثال

ثابت کرو کہ خطِ مستقیم ما = لا، مکافیوں ما = لا + $\frac{۱}{۴}$ (لا - ج)$^{۲}$ کے قبیل کا لفاف ہے۔ ثابت کرو کہ نقطہ تماس (ج، ج) ہے اور اس نقطہ پر مکافی اور لفاف کے لیے ع = ۱ ۔ مکافیوں کے قبیل کی تفرقی مساوات کو شکل ما = لا + (ع - ۱)$^{۲}$ میں حاصل کرو اور اس امر کی تصدیق کرو کہ لفاف کی مساوات اِس کو پورا کرتی ہے۔

لفاف اور قبیل کے چند مکافیوں کو ج = ۰، ۱، ۲ وغیرہ لیکر مرتسم کرو۔

**۵۶** — اب ہم یہ غور کریں گے کہ نادر حلوں کو کس طرح حاصل کیا جا سکتا ہے۔ یہ بتایا جا چکا ہے کہ اُن منحنیوں کا لفاف جو کامل ابتدائی سے تعبیر ہوتے ہیں ایک نادر حل ہے، اِس لیے ہم لفافوں کو معلوم کرنیکے طریقہ سے ابتدا کریں گے۔

عام طریقہ[۱] یہ ہے کہ منحنیوں کے قبیل کی مساوات ف (لا، ما، ج) = ۰ اور

$$\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ج}} = ۰$$

سے مبدل ج کو ساقط کیا جائے۔ مثلاً اگر ف (لا، ما، ج) = ۰، ما - ج لا - $\frac{۱}{\text{ج}}$ = ۰ ہو تو $\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ج}}$ = ۰، - لا + $\frac{۱}{\text{ج}^{۲}}$ = ۰ ہے

---

[۱] دیکھو لیمب کا "تصغاری احصاء" (دوسرا اڈیشن) دفعہ ۱۵۶ - اگر ف (لا، ما، ج) کی شکل ل ج$^{۲}$ + م ج + ن ہو تو نتیجہ م$^{۲}$ = ۴ ل ن حاصل ہوتا ہے۔ چنانچہ

ما - ج لا - $\frac{۱}{\text{ج}}$ = ۰ یعنے ج$^{۲}$ لا - ج ما + ۱ = ۰

کے لیے نتیجہ ما$^{۲}$ = ۴ لا ہے۔

[دوسرے اڈیشن کے دفعات ۱۵۵ اور ۱۵۶، تیسرے اڈیشن میں دفعات ۱۳۸ اور ۱۳۹ ہیں]

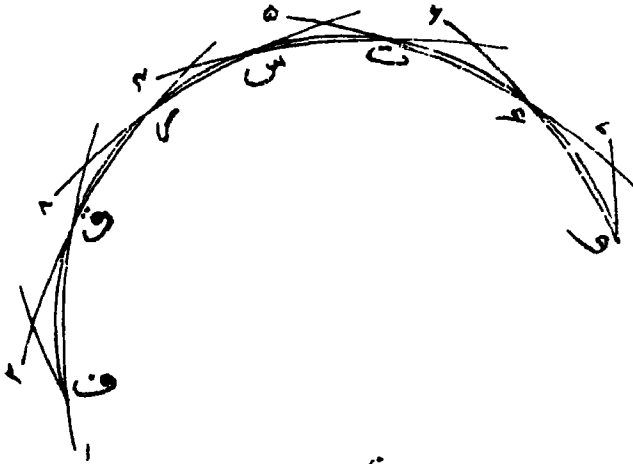
اور اِن لیے $ا - ج لا - \frac{ا}{ج} = ۰$ اور $- لا + \frac{ا}{ج^۲} = ۰$ سے ج کو ساقط کیا جائے تو $ا = \pm ۲ \sqrt{لا}$ یا $ا^۲ = ۴ لا$ حاصل ہوتا ہے۔ (۶۷)

یہ طریقہ

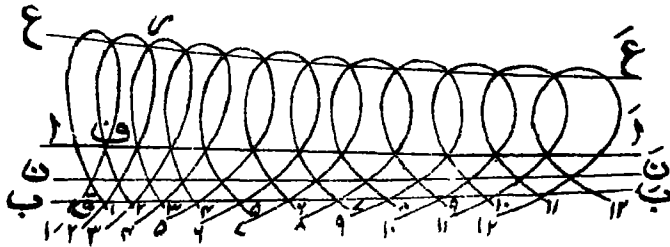
$$ف (لا ، ا ، ج) = ۰$$

اور $ف (لا ، ا ، ج + ھ) = ۰$ کے نقطہ تقاطع کا طریق معلوم کرنیکے مساوی ہے (جو قبیل کے دو ایسے منحنی ہیں جن میں بدلوں کا فرق ایک چھوٹی مقدار ھ ہے) جبکہ ھ انتہا میں صفر کی طرف مائل ہو۔ نتیجہ کو $ف (لا ، ا ، ج) = ۰$ کا ج ممیز کہتے ہیں۔

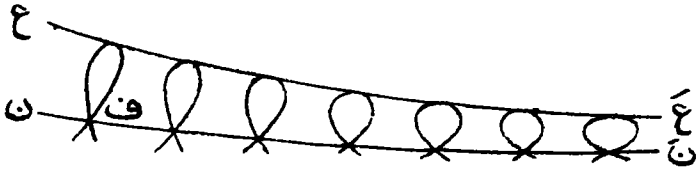
**۵۷** — اب نقشوں ۸، ۹، ۱۰، ۱۱ پر غور کرو۔

شکل (۸) میں وہ صورت پیش کی گئی ہے جس میں قبیل کے منحنی کوئی خاص ندرت نہیں رکھتے۔

شکل (۸)

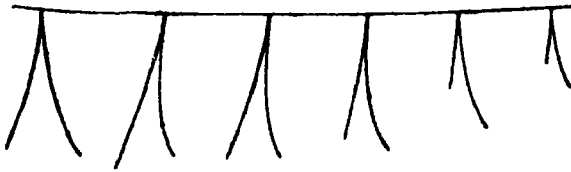
انتہائی نقاط تقاطع کا طریق ایک منحنی ف ق ر س ت ع و ہے جس میں قبیل کے منحنیوں میں سے ہر ایک کے ساتھ نقطے مشترک ہیں

(مثلاً ق اور ر طریق پر بھی اور اُس منحنی پر بھی ہیں جو ۲ سے نشان زدہ ہے)
اِس لیے انتہاییں طریق ف ق ر س ت ع و قبیل کے ہر منحنی کو مس کرتا ہے اور وہی ہے جس کی ہم نے لفاف کے طور پر تعریف کی ہے
شکل (۹) میں قبیل کے ہر منحنی میں ایک عقدہ ہے ۔ دو متصلہ منحنی تین نقطوں میں (مثلاً منحنی ۲ اور ۳ نقطوں ف، ق، ر میں) متقاطع ہوتے ہیں ۔
ایسے نقطوں کا طریق تین مختلف حصوں ع عَ ، ا اَ، اور ب بَ پر مشتمل ہوتا ہے ۔
جب ہم متصلہ منحنیوں کو قریب اور قریب تر لیکر اِن کے انتہائی قریب محلوں پر غور کرتے ہیں تو ا اَ اور ب بَ، عقدہ طریق ن نَ کے قریب آکر اِس پر منطبق ہو جاتے ہیں اور ع عَ لفاف ہو جاتا ہے ۔

شکل (۹)

اِس لیے اِس صورت میں ج ممیز میں عقدہ طریق کی مساوات کا مربع اور نیز لفاف کی مساوات شامل ہیں ۔ (۶۸)
شکل ۱۰ سے ظاہر ہے کہ عقدہ طریق ن نَ کی سمت اِس کے کسی نقطہ ف پر بالعموم وہی نہیں ہوتی جو منحنی کے کسی ایک شاخ کی اِس نقطہ پر ہے ۔ نقطہ ف پر منحنی اور عقدہ طریق دونوں میں لا اور ما مشترک ہیں لیکن ع مشترک نہیں ہے، اِس لیے عقدہ طریق قبیل کے منحنیوں کی

تفرقی مساوات کا حل نہیں ہوتا۔

شکل (۱۰)

اگر عقدہ سُکڑ کر قرن بن جائے تو شکل ۱۰ کے طریق ن نَ اور ع عَ ایک دوسرے پر منطبق ہو جاتے ہیں اور ان کے انطباق سے قرن طریق (شکل ۱۱) ج جَ بنتا ہے۔ اب ہمیں معلوم ہے کہ ن نَ شکل (۹) کے دو طریقوں (Loci) اا اَ اور ب بَ کے انطباق سے حاصل ہوا تھا، اس لیے ج جَ فی الحقیقت ۳ طریقوں (Loci) کے انطباق سے حاصل ہوتا ہے اور اس لیے ج ممیز میں اس کی مساوات کا مکعب شامل ہوگا۔

شکل ۱۱ سے ظاہر ہے کہ قرن طریق عقدہ طریق کی طرح (بالعموم) تفرقی مساوات کا حل نہیں ہوتا۔

شکل (۱۱)

خلاصہ یہ ہے کہ ج ممیز میں

(۱) لفاف

## (۲) عقدہ طریق دوسری قوت میں

اور

## (۳) قرن طریق تیسری قوت میں

کے شامل ہونے کی توقع کیجا سکتی ہے۔

لفاف ایک نادر حل ہے لیکن عقدہ طریق اور قرن طریق (بالعموم)[ا] حل ہی نہیں ہوتے۔ (۶۹)

**۵۸** - حسب ذیل مثالوں سے پچھلے نتیجوں کی وضاحت ہوگی۔

**مثال (۱)** $ما = ع^2$

کامل ابتدائی بآسانی $۴ ما = (لا - ج)^2$ حاصل ہوتا ہے

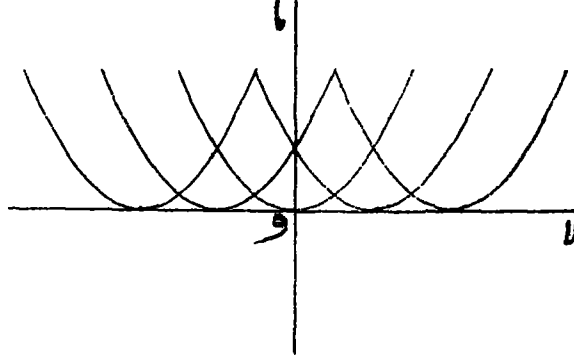
یعنے $ج^2 - ۲ ج لا + لا^2 - ۴ ما = ۰$

یہ چونکہ ج میں دو درجی مساوات ہے اِس لیے ممیز کو فوراً لکھ لیا جا سکتا ہے چنانچہ وہ

$$(۲ لا)^2 = ۴ (لا^2 - ۴ ما)$$

ہے یعنے ما = ۰، یہ کامل ابتدائی سے حاصل شدہ مساوی مکافیوں کے قبیل کے لفاف کو تعبیر کرتا ہے اور صرف پہلے درجہ میں ہے جیسا کہ لفاف کو ہونا چاہئے۔

شکل (۱۲)

---

ا ہم نے "بالعموم" لکھا ہے کیونکہ ممکن ہے کہ کسی خاص مثال میں عقدہ یا قرن طریق لفاف پر یا قبیل کے ایک منحنی پر منطبق ہو جائے۔

مثال (۲) $۳ ما = ۲ ع لا - ۲ \frac{ع^{۲}}{لا}$

پچھلے باب کے مطابق عمل کرنے پر حاصل ہوتا ہے

$۳ ع = ۲ ع + ۲ \frac{ع^{۲}}{لا^{۲}} + (۲ لا - ۴ \frac{ع}{لا}) \frac{فرع}{فرلا}$

یعنی $ع لا^{۲} - ۲ ع^{۲} = (۲ لا^{۳} - ۴ ع لا) \frac{فرع}{فرلا}$

یعنی $لا^{۲} - ۲ ع = ۰$ یا $ع = ۲ لا \frac{فرع}{فرلا}$ ، ........ (۱)

$\frac{فرلا}{لا} = ۲ \frac{فرع}{ع}$

(۷۰) ∴ لوک لا = ۲ لوک ع − لوک ج

∴ $ج لا = ع^{۲}$

∴ $۳ ما = ۲ ج^{\frac{۱}{۲}} لا^{\frac{۳}{۲}} - ۲ ج$

یعنی $(۳ ما + ۲ ج)^{۲} = ۴ ج لا^{۳}$ ، یہ نیم کعبی مکافیوں کا ایک قبیل ہے جن کے قرن محور ما پر ہیں۔

ج ممیز $(۳ ما - لا^{۳})^{۲} = ۹ ما^{۲}$

یا $لا^{۳} (۶ ما - لا^{۳}) = ۰$

ہے۔

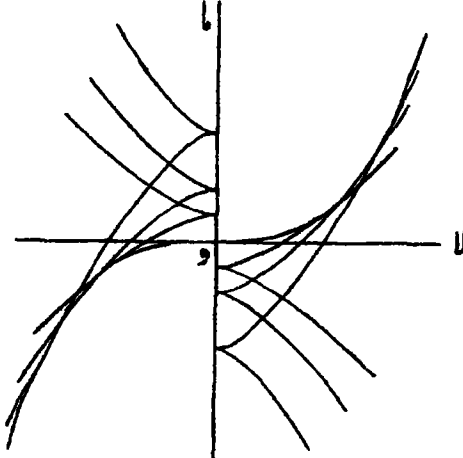
قرن طریق تیسری قوت میں ہے اور دوسرا جزو ضربی لفاف کو تعبیر کرتا ہے۔ اِس کی آسانی سے تصدیق ہوتی ہے کہ تفرقی مساوات کا ایک حل $۶ ما = لا^{۳}$ ہے لیکن لا = ۰ (جس سے ع = ∞ حاصل ہوتا ہے) حل نہیں ہے۔
اگر ہم مساواتوں (۱) میں سے پہلی مساوات کو لیں یعنی

لا² - ۲ ع = ۰

تو تفرقی مساوات میں ع کی بجائے اندراج کرنے سے

۳ ما = ½ لا³

حاصل ہوگا یعنے لفاف

اِس سے نادر حلوں کو معلوم کرنے کا دوسرا طریقہ ملتا ہے۔

شکل (۱۳)

## حل طلب مثالیں

حسب ذیل تفرقی مساواتوں کے کامل ابتدائی اور نادر حل (اگر موجود ہوں) معلوم کرو۔ مثالوں ۱ تا ۴ کی صورت میں ترسیمیں کھینچو۔

(۱) ۴ ع² - ۹ لا = ۰ (۲) ۴ ع² (لا - ۲) = ۱

(۳) لا ع² - ۲ ما ع + ۴ لا = ۰ (۴) ع² + ما² - ۱ = ۰

(۵) ع² + ۲ لا ع - ما = ۰ (۶) لا ع² - ۲ ما ع + ۱ = ۰

(۷) ۴ لا ع² + ۴ ما ع - ۱ = ۰

**۵۹ — ع ممیز۔** اب ہم یہ غور کریں گے کہ کسی تفرقی مساوات کے (۷۱)

نادر حل کا حل ابتدائی کو معلوم کئے بغیر خود مساوات سے راست کس طرح حاصل کئے جا سکتے ہیں۔ مساوات

$$لا\,ع^{۲} - ما\,ع + ۱ = ۰$$

پر غور کرو۔ اگر ہم لا اور ما کو کوئی محدود عددی قیمتیں دیں تو ع میں ایک دو درجی مساوات حاصل ہوتی ہے مثلاً اگر لا = ۲، ما = ۳ تو

$$۲\,ع^{۲} - ۳\,ع + ۱ = ۰،$$

$$ع = \frac{۱}{۲} \text{ یا } ۱$$

اس طرح ہر نقطہ میں سے قبیل کے دو منحنی ہیں جو اس مساوات کو پورا کرتے ہیں۔ ان دو منحنیوں کے مماس ان سب نقطوں پر جہاں مساوات کی اصلیں، ع میں مساوی ہیں ایک ہی ہوں گے یعنے جہاں ممیز $ما^{۲} - ۴\,لا = ۰$ ۔

یہ امور دو درجی $ل\,ع^{۲} + م\,ع + ن = ۰$ کی صورت میں بھی درست ہیں جہاں ل، م، ن، متغیروں لا اور ما کے کوئی تفاعل ہیں۔ مستوی کے ہر نقطہ میں سے دو منحنی گذرتے ہیں اور یہ منحنی، طریق $م^{۲} - ۴\,ل\,ن = ۰$ کے تمام نقطوں پر، ایک ہی سمت رکھتے ہیں۔

عام صورت میں تفرقی مساوات

$$ف(لا، ما، ع) \equiv ل_{۰}\,ع^{ن} + ل_{۱}\,ع^{ن-۱} + ل_{۲}\,ع^{ن-۲} + \dots + ل_{ن} = ۰$$

سے جہاں تمام ل، لا اور ما کے تفاعل ہیں لا اور ما کی قیمتوں کے کسی معلومہ زوج کے لیے ع کی ن قیمتیں حاصل ہوتی ہیں اور ان کے متناظر کسی نقطہ میں سے ن منحنی گذرتے ہیں۔ ان ن منحنیوں میں سے دو کے مماس اس طریق کے تمام نقطوں پر ایک ہی ہوتے ہیں جو ع کو

$$\left.\begin{aligned} &ف(لا، ما، ع) = ۰، \\ &\frac{جف\,ف}{جف\,ع} = ۰، \end{aligned}\right\}$$

سے ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے کیونکہ یہی وہ شرط ہے جو مساوی اصلوں کی موجودگی کے لیے مساواتوں کے نظریہ کی کتابوں میں دیجاتی ہے۔

اِس طرح ہم ع ممیز پر پہنچتے ہیں اور اب ہم اُن طریقوں (Loci) کے خواص کی تحقیق کریں گے جو ع ممیز سے تعبیر ہوتے ہیں۔

## ۶۰ ـ لفاف ـ مساوات

$$ما = ع لا + \frac{1}{ع}$$

یا

$$ع^2 لا - ع ما + ۱ = ۰$$

کا ع ممیز $ما^2 = ۴ لا$ ہے۔

ہم دیکھ چکے ہیں کہ کامل ابتدائی مکافی کے مماسوں پر مشتمل ہوتا ہے اور وہ نادر حل ہے۔ اِن میں سے دو مماس مُستوی کے ہر نقطہ ف میں سے گذرتے ہیں اور یہ مماس لفاف کے نقطوں کے لیے ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں۔

یہ ع ممیز کی وہ مثال ہے جو لفاف کو تعبیر کرتی ہے۔ اِسکی زیادہ عام صورت شکل ۱۵ میں دکھلائی گئی ہے۔ (۴۲)

ف

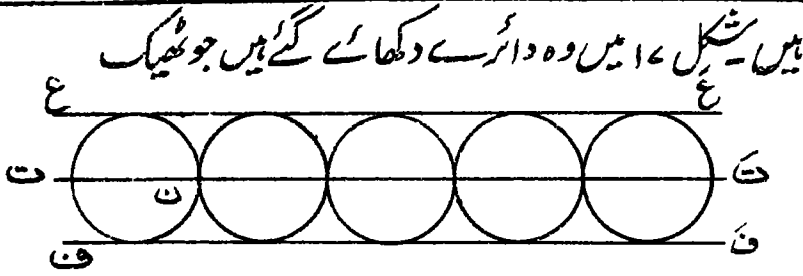
شکل (۱۴)

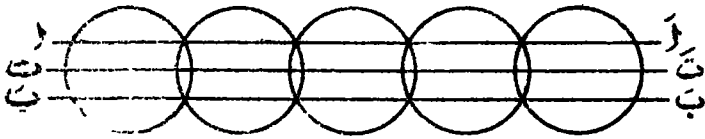
خیال کرو کہ منحنی س ق ف، منحنی ف ر ت پر منطبق ہونے کے لیے اوپر حرکت کرتا ہے لیکن ہمیشہ لفاف ق ر ع کے ساتھ تماس میں رہتا ہے۔ نقطہ ف، ر کی جانب اوپر حرکت کرے گا اور نقطہ ف میں سے گذرنے والے اِن دو منحنیوں کے مماس بالآخر ایک دوسرے پر اور اُس مماس پر جو لفاف کا ر پر ہے منطبق ہونگے۔ اس طرح ر ایک ایسا نقطہ ہے جس کے لیے نظام کے اِن دو منحنیوں کے ع منطبق ہوتے ہیں اور اِس لیے ع ممیز معدوم ہوتا ہے۔

شکل (۱۵)

پس ع ممیز منحنیوں کے نظام کا لفاف ہو سکتا ہے اور اگر ایسا ہے تو وہ نادر حل ہے جیسا کہ دفعہ ۵۵ میں ثابت کیا جا چکا ہے۔

**۶۱ ــ طریق** ــ پس لفاف اُن نقطوں کا طریق ہوتا ہے جہاں قبیل کے دو متصلہ منحنی ع کی ایک ہی قیمت رکھتے ہیں۔ لیکن دو غیر متصلہ منحنیوں کا ایک دوسرے کو مس کرنا ممکن ہے۔ دائروں کے ایک ایسے قبیل پر غور کرو جو مساوی نصف قطر کے ہیں اور جن کے مرکز ایک خطِ مستقیم میں واقع ہیں۔ شکل ۱۶ سے واضح ہے کہ مرکزوں کا خط (۷۳) دائروں کے زوجوں کے نقطہ تماس کا طریق ہے۔ اِس کو (tac-locus) طریق کہتے

ہیں ۔ شکل ۱۷ میں وہ دائرے دکھائے گئے ہیں جو ٹھیک

شکل (۱۶)

طور پر مس تو نہیں کرتے لیکن متصلہ نقطوں کے زوجوں میں متقاطع ہوتے ہیں جو دو متصلہ طریقوں (Loci) ا اَ ب بَ پر واقع ہیں۔ جب ہم تماس کی انتہائی صورت پر پہنچتے ہیں تو یہ طریق (tac-locus) طریق ت تَ پر آکر اِس کے ساتھ منطبق ہو جاتے ہیں۔ اِس طرح ع ممیز میں (tac-locus) طریق کی مساوات کا مربع شامل ہوتا ہے۔

شکل (۱۷)

یہ واضح ہے کہ شکل ۱۶ میں نقطہ ن پر (tac-locus) طریق کا سمت اُن دو دائروں کی سمت نہیں ہے جو اِس نقطہ پر ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں۔ اِس لیے لا، ما، ع کے درمیان وہ رشتہ جس کو دائرے پورا کرتے ہیں (tac-locus) طریق سے پورا نہیں ہوگا جس میں لا اور ما تو وہی ہیں لیکن ف پر ع مختلف ہے۔ عام طور پر (tac-locus) طریق تفرقی مساوات کا حل نہیں ہوگا۔

## ۶۲ ۔ پچھلے دفعہ کے دائرے مساوات

$$(\text{لا} + \text{ج})^{2} + \text{ما}^{2} = \text{ر}^{2}$$

سے تعبیر ہوتے ہیں اگر مرکزوں کا خط و لا ہو۔ اِس سے حاصل ہوتا ہے

لا + ج = $\sqrt{ر^۲ - ما^۲}$

یا ا = - ماع \ $\sqrt{ر^۲ - ما^۲}$

یعنے ما' ع$^۲$ + ما$^۲$ - ر$^۲$ = ۰

اِس کا ع ممیز ما' ( ما$^۲$ - ر$^۲$ ) = ۰ ہے -

خط : = ۰ (جو دوسری نوست میں ہینبہ لانوع تھی) طریق (tac-locus) ہے اور ما = ± ر (شکل ۱۶ کے ع ع' اور ف ف' ) لفاف ہیں - ما = ± ر جس سے ع = ۰ حاصل ہوتا ہے تفرقی مساوات کے نادر حل ہیں لیکن ما = ۰ اُس کو پورا نہیں کرتا اور اِس لیے وہ حل نہیں ہے -

**۶۳ - قرن طریق** - یہ ممکن ہے کہ وہ تماس جس سے ع میں مساوی اصلیں حاصل ہوتی ہیں ایک ہی منحنی کی دو شاخوں کا تماس ہو اور دو مختلف منحنیوں کا تماس نہ ہو یعنی ع ممیز قرن پر معدوم ہوتا ہے - (۷۴)

قرن طریق کے کسی نقطہ ف پر اس کی سمت بالعموم وہی نہیں ہوتی جو قرن پر کے مماس کی ہے (جیسا کہ شکل ۱۸ میں دکھایا گیا ہے) اسلئے قرن طریق تفرقی مساوات کا حل نہیں ہوتا -

شکل (۱۸)

یہ دریافت کرنا فطری امر ہے کہ آیا قرن طریق کی مساوات ع ممیز میں

تیسری قوت کے ساتھ شامل ہوگی جیسا کہ وہ ج ممیز میں وقوع پذیر ہوتی ہے۔
اس کا تصفیہ کرنے کے لیے ایسے نقطوں کے طریق پر غور کرو جن کے لیے
دو ع، تقریباً مساوی ہیں اور بالکل مساوی نہیں ہیں ۔ یہ شکل (۱۹)
کا طریق ن ن ہوگا ۔

شکل (۱۹)

انتہا میں جبکہ عقدے قرنوں میں سکڑ جاتے ہیں تو قرن طریق حاصل ہوتا
ہے اور چونکہ اس صورت میں دو یا تین طریقوں (Loci) کے
منطبق ہونے کا سوال نہیں ہے اس لیے ع ممیز میں قرن طریق کی
مساوات صرف پہلی قوت میں شامل ہوتی ہے ۔

**۶۴ ۔ نتیجوں کا خلاصہ** ۔ ع ممیز میں حسب ذیل طریق شامل
ہو سکتے ہیں:

(۱) لفاف،
(۲) (tac-locus) طریق دوسری قوت میں،
(۳) قرن طریق

اور ج ممیز میں حسب ذیل طریق شامل ہو سکتے ہیں:

(۱) لفاف،
(۲) عقدہ طریق دوسری قوت میں،
(۳) قرن طریق تیسری قوت میں،

ان میں سے صرف لفاف ہی تفرقی مساوات کا حل ہوتا ہے۔

## ۶۵ ۔ مثالیں

مثال (۱) ع^۲ (۲ - ۳ ما)^۲ = ۴ (۱ - ما)

اس کو شکل

$$\frac{فرلا}{فرما} = \pm \frac{۲ - ۳ ما}{۲ \sqrt{۱ - ما}}$$

میں لکھ لینے سے کامل ابتدائی شکل

$$(لا - ج)^۲ = ما^۲ (۱ - ما)$$

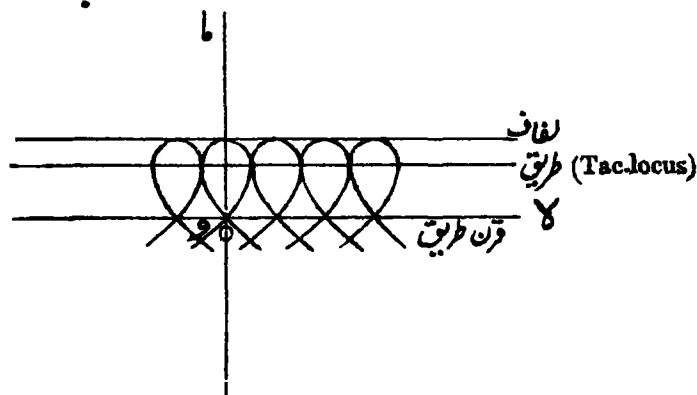
میں فوراً حاصل ہوتا ہے

ج ممیز اور ع ممیز علی الترتیب

$$ما^۲ (۱ - ما) = ۰ \quad \text{اور} \quad (۲ - ۳ ما)^۲ (۱ - ما) = ۰$$

ہیں ۔

۱ - ما = ۰ جو دونوں ممیزوں میں پہلی قوت کے ساتھ شریک ہے لفاف ہے ۔ ما = ۰ جو ج ممیز میں دوسری قوت کے ساتھ شریک ہے لیکن ع ممیز میں موجود ہی نہیں ہے عقدہ طریق ہے ۔ ۲ - ۳ ما = ۰ جو ع ممیز میں دوسری قوت کے ساتھ شریک ہے اور ج ممیز میں موجود ہی نہیں ہے (tac-locus) طریق ہے ۔

اس کی آسانی سے تصدیق ہوسکتی ہے کہ ان تین طریقوں (Loci) میں صرف لفاف کی مساوات ہی تفرقی مساوات کو پورا کرتی ہے ۔



شکل (۲۰)

## مثال (۲) دائروں کے قبیل

لا^۲ + ما^۲ + ۲ ج لا + ۲ ج^۲ - ۱ = ۰

پر غور کرو۔

ج کو (پہلے باب کے طریقوں سے) ساقط کرنے پر تفرقی مساوات

۲ ما^۲ ع^۲ + ۲ لا ما ع + لا^۲ + ما^۲ - ۱ = ۰

حاصل ہوتی ہے۔

ج اور ع ممیز علی الترتیب حسب ذیل ہیں: (۷۶)

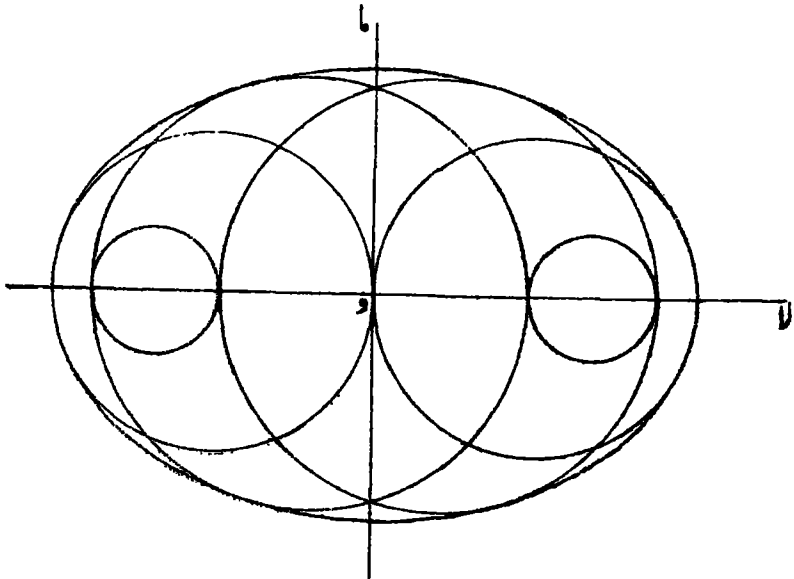
لا^۲ - ۲ (لا^۲ + ما^۲ - ۱) = ۰ اور لا^۲ ما^۲ - ۲ ما^۲ (لا^۲ + ما^۲ - ۱) = ۰

یعنے لا^۲ + ۲ ما^۲ - ۲ = ۰ اور ما^۲ (لا^۲ + ۲ ما^۲ - ۲) = ۰

لا^۲ + ۲ ما^۲ - ۲ = ۰ سے جو دونوں ممیزوں میں پہلے درجہ میں ہے لفاف حاصل ہوتا ہے ما = ۰ سے (tac-locus) طرق حاصل ہوتا ہے کیونکہ وہ ع ممیز میں دوسری قوت کے ساتھ شریک ہے اور ج ممیز میں موجود ہی نہیں ہے۔

ما

لا

و

شکل (۲۱)

وہ دائرہ جو ابتدائی مساوات سے حاصل ہوتا ہے لفاف کو نقطوں

( - ۲ ج ، ± √(۱ - ۲ ج$^۲$) )

پر مس کرتا ہے جو خیالی ہیں اگر ج عدداً ½ √۲ سے بڑا ہو -

## حل طلب مثالیں -

حسب ذیل مثالوں میں کامل ابتدائی معلوم کرو اگر تفرقی مساوات دی گئی ہے یا تفرقی مساوات معلوم کرو اگر کامل ابتدائی دیا گیا ہے - نیز نادر حل (اگر موجود ہوں) معلوم کرو - ترسیمیں کھینچو -

(۱) ۴ لا (لا - ۱)(لا - ۲) ع$^۲$ - (۳ لا$^۲$ - ۶ لا + ۲)$^۲$ = ۰ ،

(۲) ۴ لا ع$^۲$ - (۳ لا - ۱)$^۲$ = ۰ ، (۳) ما ع$^۲$ - ۲ لا ع + ما = ۰ ،

(۴) ۳ لا ع$^۲$ - ۶ ما ع + لا + ۲ ما = ۰ ،

(۵) ع$^۲$ + ۲ ع لا$^۲$ - ۴ لا$^۲$ ما = ۰ ، (۶) ع$^۳$ - ۴ لا ما ع + ۸ ما$^۲$ = ۰ ،

(۷) لا$^۲$ + ما$^۲$ - ۲ ج لا + ج$^۲$ جم$^۲$ عہ = ۰ ،

(۸) ج$^۲$ + ۲ ج ما - لا$^۲$ + ۱ = ۰

(۹) ج$^۲$ + (لا + ما) ج + ۱ - لا ما = ۰ ،

(۱۰) لا$^۲$ + ما$^۲$ + ۲ ج لا ما + ج$^۲$ - ۱ = ۰

**۶۶ - کلیرو[1] کی شکل -** ہم نے یہ باب مساوات

ما = ع لا + ۱/ع

[1] الکزز کلاڈ کلیرو (Alexis Claude Clairaut) (پیرس کا، سنہ ۱۷۱۳، سنہ ۱۷۶۵ء) اگرچہ تفرقی مساواتوں کے سلسلہ میں بہت مشہور ہے لیکن خصوصاً علم ہئیت پر اس نے بہت کچھ لکھا ہے

سے شروع کیا تھا جو کلیرو کی شکل

ما = ع لا + ف (ع) . . . . . . . . . (۱)

کی ایک مخصوص صورت ہے۔ کلیرو کی اس عام مساوات کو حل کرنے کے لیے اس کو لا کے لحاظ سے تفرق کرو تو

ع = ع + {لا + فَ (ع)} فرع / فرلا

∴ فرع / فرلا = ۰، ع = ۰، . . . . . . . . . (۲)

یا ۰ = لا + فَ (ع)، . . . . . . . . . (۳)

(۱) اور (۲) سے کامل ابتدائی

ما = ج لا + ف (ج)، . . . . . . . . . (۴)

حاصل ہوتا ہے جو خطوطِ مستقیم کا ایک قبیل ہے۔

اگر ہم (۱) اور (۳) سے ع کو ساقط کریں تو صرف ع ممیز ملیگا۔ ج ممیز کو معلوم کرنے کے لیے ہم ج کو (۴) اور اس نتیجہ سے ساقط کرتے ہیں جو (۴) کو ج کے لحاظ سے تفرق کرنے سے حاصل ہوتا ہے یعنی

۰ = لا + فَ (ج)، . . . . . . . . . (۵)

مساواتیں (۴) اور (۵)، مساواتوں (۱) اور (۳) سے صرف اس امر میں مختلف ہیں کہ ع کی بجائے ج ہے۔ اس لیے حاصل اسقاط وہی ہیں۔ اس لیے دونوں ممیز لفافہ کو تعبیر کرتے ہیں[1]۔

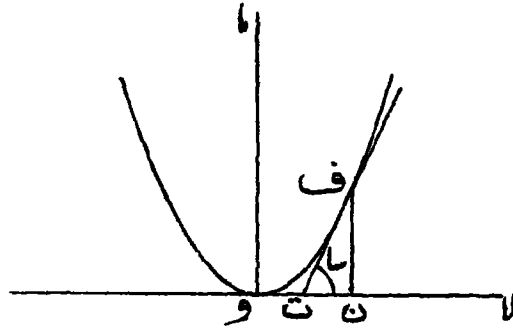
ظاہر ہے کہ خطوطِ مستقیم کا کوئی قبیل عقدہ طریق یا قرن طریق یا طریق نہیں رکھ سکتا۔ (tac-locus)

مساوات (۴) سے یہ اہم نتیجہ حاصل ہوتا ہے کہ کلیرو کی شکل کی

---

[1] لیکن بعض صورتوں میں ممیز صرف لفافہ ہی کو نہیں بلکہ اس کے انعطافی مماسوں کو بھی تعبیر کرتے ہیں (دفعہ ۶۱)

کسی تفرقی مساوات کے کامل ابتدائی کو ع کی بجائے صرف ج لکھ کر فوراً لکھ لیا جا سکتا ہے۔

**۶۷ - مثال** - وہ منحنی معلوم کرو کہ وت ایسا بدلے جیسے مس سا جہاں ت وہ نقطہ ہے جس پر منحنی کے کسی نقطہ کا مماس محور لا کو قطع کرتا ہے اور محور لا کے ساتھ اس کا میلان سا ہے اور و مبداء ہے۔

شکل (۲۲)

شکل سے　وت = ون - ت ن　　(۷۸)

= لا - ما مم سا

= لا - $\frac{ما}{ع}$ ، کیونکہ مس سا = ع

اس لیے　لا - $\frac{ما}{ع}$ = ک ع

یعنے　ما = ع لا - ک ع$^2$

اس کی شکل کلیرو کی ہے، اس لیے کامل ابتدائی

ما = ج لا - ک ج$^2$

ہے اور نادر حل اِس کا ممیز ہے یعنے

$لا^2 = ۴ ک ما$

مطلوبہ منحنی وہ مکافی ہے جو اِس نادر حل سے تعبیر ہوتا ہے۔ کامل ابتدائی خطوطِ مستقیم کے اُس قبیل کو تعبیر کرتا ہے جو اِس مکافی کے مماس ہیں۔

## حل طلب مثالیں

حسب ذیل تفرقی مساواتوں کے کامل ابتدائی اور نادر حل معلوم کرو۔ مثالوں (۱)، (۲)، (۴)، (۷)، (۸) اور (۹) میں ترسیمات کھینچو۔

(۱) $ما = ع لا + ع^2$  (۲) $ما = ع لا + ع^3$

(۳) $ما = ع لا + جم ع$  (۴) $ما = ع لا + \sqrt{ا^2 ع^2 + ب^2}$

(۵) $ع^2 = لوک (ع لا - ما)$  (۶) $جب ع لا جم ما = جم ع لا جب ما + ع$

(۷) اُس منحنی کی تفرقی مساوات معلوم کرو کہ مماس محدودوں کے محوروں کے ساتھ مستقل رقبہ 'ک' کا مثلث بنائے، اور اِس لیے منحنی کی مساوات صحیح شکل میں معلوم کرو۔

(۸) وہ منحنی معلوم کرو کہ مماس محوروں پر جو مقطوعے قطع کرے اُن کا مجموعہ مستقل ہو۔

(۹) وہ منحنی معلوم کرو کہ مماس کا وہ حصہ جو محوروں کے درمیان منقطع ہو مستقل طول کا ہو۔

۰۷ (ر) ۔ تفرقی مساواتوں کی ایسی مثالیں دینا مشکل نہیں ہے جن میں کامل ابتدائی حقیقت میں کامل نہیں ہوتے اور تکمیلی حل لفاف کے مفہوم میں نادر حل نہیں ہوتے۔ فرض کرو کہ ایک تفرقی مساوات

$ف (لا، ما) فرلا + ق (لا، ما) فرما = ۰$

دی گئی ہے جس میں مساوات کی دائیں طرف کا جملہ متمماً مثلاً $و (لا، ما) \times فرع (لا، ما)$ کے مساوی ہے۔ تب کامل ابتدائی $ع (لا، ما) = ج$ کے

علاوہ و (لا، ما) = ۰ بھی اس تفرقی مساوات کا حل ہے۔ اب ہم اس ربط پر جو کامل ابتدائی اور تکمیلی حل کے درمیان ہے مثالوں کی مدد سے بحث کریں گے اور پھر ایک عام مسئلہ بیان کریں گے۔

فرض کرو کہ پہلی مثال کے طور پر ہم تفرقی مساوات

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = ۱ - \text{ما}^۲$$

کو لیتے ہیں۔ تکمل کا معمولی طریقہ یہ ہے کہ متغیروں کو جدا کیا جائے چنانچہ اس طرح

$$\text{فر لا} = \frac{\text{فر ما}}{۱ - \text{ما}^۲} = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۱ - \text{ما}} + \frac{۱}{۱ + \text{ما}}\right)\text{فر ما}$$

حاصل ہوتا ہے اور اس لیے

$$\text{لا} + \text{ج} = \frac{۱}{۲}\ \text{لوک}\ \frac{۱ + \text{ما}}{۱ - \text{ما}}$$

اور

$$\text{ما} = \text{مسز}(\text{لا} + \text{ج})$$ کامل ابتدائی

لیکن متغیروں کو جدا کرنے میں جزو ضربی (۱ − ما^۲) سے تقسیم کرنا پڑتا ہے جو جائز نہیں ہے اگر یہ جزو ضربی صفر ہو۔ پس آخری نتیجہ میں ما = ±۱ کا امکان نہیں ہے جس سے دو ایسے حل حاصل ہوتے ہیں جو کامل ابتدائی میں شریک نہیں ہیں۔ ممکن ہے یہ فرض کر لیا جائے کہ یہ حل نادر حل ہیں لیکن اگر نادر حل کی یہ تعریف کی گئی ہو کہ وہ ایسا حل ہے جو ممیزوں (یہ اصطلاح منحنیوں کے اس قبیل کو ظاہر کرنے کے لیے استعمال کیجائیگی جو کامل ابتدائی سے تعبیر ہوتے ہیں) کے لفاف کو تعبیر کرتا ہے تو یہ دو زائد حل نادر حل نہیں ہیں۔ وہ ممیزوں کے مشترک متقاربوں کو تعبیر کرتے ہیں اور ان کا کوئی لفاف نہیں ہے۔ یہ یاد ہوگا کہ لفاف کی یہ تعریف کیجاتی ہے کہ وہ ایک ایسا منحنی ہے جو منحنیوں کے ایک قبیل کے ہر رکن کو مس کرتا ہے اور جو اپنے ہر نقطہ پر قبیل کے ایک رکن سے مس ہوتا ہے۔

اِس تعریف کے دوسرے حصہ کی رُو سے مشترک متقارب خارج از بحث ہو جاتا ہے کیونکہ وہ قبیل کے ہر رکن سے صرف ایک نقطہ پر مس ہوتا ہے یعنے اُس نقطہ پر جو لاتناہی پر ہے۔ پس یہ دو زائد حل اُسی نوعیت کے ہیں جو کامل ابتدائی میں شامل رہتے ہیں، اِس لئے اگر ہم خالص منطقی نقطۂ نظر سے دیکھیں تو اُس کو بجا طور پر غیر کامل کہہ سکتے ہیں لیکن اگر ما = مسز (لا+ج) دیا گیا ہو تو ہم ج = ± ∞ لیکر ما = ± ۱ ماخوذ کر سکتے ہیں۔ اِس کا یہ مطلب ہے کہ جب ج بہت بڑا ہوتا ہے تو اوپر کا متقارب، ما = مسز (لا + ج) کے اُس حصہ کے بہت قریب ہوتا ہے جو مبدا ء کے نزدیک ہے۔ متناظر نتیجہ نیچے کے متقارب کے لیے درست ہے۔ پس ہم دیکھتے ہیں کہ اِس مثال میں بقیہ ابتدائی (Residual Primitive) کامل ابتدائی کی دو انتہائی شکلوں سے بنا ہے۔

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ اختیاری مستقل کی شکل میں بظاہر خفیف تبدیلی اِس امر کا باعث ہو سکتی ہے کہ کامل ابتدائی میں ایک انتہائی شکل شامل کیجائے مثلاً اگر اوپر کے عمل تکمل میں ہم ج کی بجائے $\frac{1}{2}$ لوک ک رکھیں تو $\frac{۱ + ما}{۱ - ما}$ = ک ق^۲لا حاصل ہوتا ہے اور ک = ۰ سے حل ما = -۱ ملتا ہے۔ لیکن ک = ۰، ج = - ∞ کے معادل ہے، پس دوسری شکل میں بھی وہی منطقی مشکل پیش ہوتی ہے جو پہلی شکل میں تھی۔ وہ رفع نہیں ہوئی، صرف پوشیدہ ہے۔

ذرا کم واضح مثال ما = مس (لا + ج) ہے جو تفرقی مساوات

$$\frac{فر ما}{فر لا} = ۱ + ما^۲$$

سے حاصل ہوئی ہے۔ بقیہ ابتدائی ۱ + ما^۲ = ۰ ہے۔ پہلی نظر میں یہ خیال ہو سکتا ہے کہ ممیزوں کے کوئی مشترک متقارب نہیں ہیں لیکن ایسا نہیں ہے۔ متقارب حسب سابق موجود ہیں، صرف وہ خیالی ہیں اور خیالی ممیزوں سے ماخوذ ہوتے ہیں۔ ما = ± خ کو ما = مس (لا + ج) کی

انتہائی شکل کے طور پر حاصل کرنے کے لیے ج کی بجائے خ ر ک رکھو جہاں ک حقیقی ہے اور پھر ک = ± ∞ لو۔ یہ عمل بالکل جائز ہے۔ تفرقی مساواتوں کے ابتدائی اپنی عمومیت کھو دیتے ہیں اگر اختیاری مستقلوں کو تمام قیمتیں اختیار کرنے نہ دیا جائے خواہ یہ قیمتیں حقیقی ہوں یا خیالی یا مختلف۔

ایک تیسری مثال تفرقی مساوات

$$\frac{فر ما}{فر لا} = ا^۳ - ما^۲$$

سے پیدا ہوتی ہے جس کا کامل ابتدائی ما = قط$^۲$ $\frac{۱}{۲}$ (لا + ج) اور بقیہ ابتدائی ما = ۰ ہے۔ بقیہ ابتدائی اب ایک حقیقی خط ہے جو خیالی ممیزوں کا ایک مشترک متقارب ہے۔ اس کو ج کی بجائے خ ر ک رکھ کر اور پھر ک = ± ∞ لیکر اخذ کیا جا سکتا ہے۔ ایک نادر حل ما = ا بھی ہے جو لفاف کو تعبیر کرتا ہے۔ یہ مثال کچھ مباحثہ کا موضوع رہی ہے۔ ع ممیز ما$^۲$ = ما$^۳$ ہے اور اگر ہم نادر حل کی یہ تعریف کریں جیسا کہ بعض مصنفوں کا خیال ہے کہ وہ ایسا حل ہے جو ع ممیز کو معدوم کرتا ہے تو ما = ۰ کو نادر حل کے طور پر خیال کیا جا سکتا ہے۔ پہلی دو تفرقی مساواتوں میں جو پہلے رتبہ کی ہیں کوئی ث ممیز موجود نہیں ہے۔ اس لیے بقیہ ابتدائی کو ان سے حاصل نہیں کیا جا سکتا۔ چونکہ ان تمام تین مثالوں میں بقیہ ابتدائی ایک ہی نوعیت کے ہیں کیونکہ وہ مشترک متقاربوں کو تعبیر کرتے ہیں اس لیے نادر حل کی وہ تعریف جو لفاف سے متعلق ہے قابل ترجیح معلوم ہوتی ہے۔ دوسری تعریف میں بلاشبہ بیان کا اختصار اور سادگی موجود ہے لیکن اس میں بعض لازمی ہندسی اختلافوں کو نظر انداز کر دیا گیا ہے۔

حسب ذیل مثال سے ایک دوسرے اہم امر کا اظہار ہوتا ہے۔ تفرقی مساوات کو شکل

$$\frac{فر ما}{فر لا} = ± ا (ما - ا)^{\frac{۱}{۲}}$$

میں لکھا جا سکتا ہے۔ جزو ضربی (ما - ۱)^½ سے نادر حل حاصل ہوتا ہے لیکن یہ جزو ضربی ایک ایسے قوت نما میں وقوع پذیر ہوا ہے جو صفر اور ۱ کے درمیان ہے۔ جزو ضربی ما جس سے بقیہ ابتدائی حاصل ہوتا ہے ایسے قوت نما کے ساتھ واقع ہے جو ۱ ہے۔ اس سے سادہ مثال $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{ما}^{\text{ن}}$ میں (جہاں ن > ۰)

$$(\text{۱} - \text{ن})(\text{لا} + \text{ج}) = \text{ما}^{\text{۱} - \text{ن}} \text{، اگر ن} \neq \text{۱}$$

$$\text{اور لا} + \text{ج} = \text{لوک ما، اگر ن} = \text{۱}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ ما = ۰ ہمیشہ ایک تکملہ ہے لیکن وہ ایک بقیہ ابتدائی ہے جو ج = - ∞ لینے سے جبکہ ن > ۱ ماخوذ کیا گیا ہے لیکن اگر ن < ۱ تو ما = ۰ ایک نادر حل ہے (لفاف کے مفہوم میں) اس سے $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{گ(ما)}$ کے لیے ایک متناظر مسئلہ حاصل ہوتا ہے۔ اگر گ (ما) میں جزو ضربی (ما - ۱)^ن کی موجودگی کی وجہ سے گ (۱) معدوم ہو تو ما = ۱ ایک بقیہ ابتدائی ہوگا اگر ن ≥ ۱ لیکن وہ ایک نادر حل ہوگا اگر ن < ۱۔
۰ ۔ (ب) بقیہ ابتدائیوں سے جو متقارب تعبیر ہوتے ہیں اُن کا خطی ہونا ضروری نہیں ہے۔ فرض کرو کہ ہم پہلی مثال $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{۱} - \text{ما}^{\text{۲}}$ میں ما کی بجائے ما - لا^۲ رکھ کر اس کو مستحیل کرتے ہیں۔ اس سے

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{۱} + \text{۲لا} - \text{لا}^{\text{۴}} + \text{۲ لا}^{\text{۲}}\text{ ما} - \text{ما}^{\text{۲}}$$

حاصل ہوتا ہے اور کامل حل ابتدائی

$$\text{ما} = \text{لا}^{\text{۲}} + \text{مسز (لا + ج)}$$

ہے۔ بقیہ ابتدائی ما = لا^۲ ± ۱، میزوں کے مشترک مکافی متقاربوں کو

تعبیر کرتا ہے۔

عام طور پر ہم ما کی بجائے ما۔ف (لا) رکھ سکتے ہیں اور وہ شرطیں بیان کر سکتے ہیں کہ اِس سے تفرقی مساوات فرما/فرلا = گ (لا، ما) کا بقیہ ابتدائی حاصل ہو یا نادر حل۔ لیکن زیادہ عام مساوات

ف (لا، ما) فرلا + ق (لا، ما) فرما = و (لا، ما) × فرع (لا، ما) = ۰

پر بحث کرنا زیادہ مناسب ہے۔ حل و (لا، ما) = ۰ مختلف قسموں کا ہو سکتا ہے۔ اولاً فرض کرو کہ جزئی مشتق ع~لا~، ع~ما~ میں سے ایک یا دونوں لامتناہی ہو جاتے ہیں جبکہ و = ۰۔ اگرچہ خود ع اور و ع~لا~ (= ف) اور و ع~ما~ (= ق) سب محدود رہتے ہیں۔ تب و = ۰ ایک نادر حل ہو گا جو ایک لفاف کو تعبیر کریگا۔ مثالاً

فرلا + { ۱ + (لا + ما)^½ } فرما = ۰

کو شکل (لا + ما)^-½ × فر { ما + ۲ (لا + ما)^½ } = ۰

میں لکھا جا سکتا ہے اور اِس سے کامل ابتدائی

ما + ۲ (لا + ما)^½ = ۰

اور نادر حل

لا + ما = ۰

حاصل ہوتے ہیں۔ ممیز ناکمل مکافی ہیں جن میں سے ہر ایک اُس نقطہ پر اچانک ختم ہو جاتا ہے جہاں وہ لفاف کو مس کرتا ہے کیونکہ (لا + ما) منفی نہیں ہو سکتا اگر (لا + ما)^½ حقیقی ہے۔ غائب حصے ما - ۲ (لا + ما)^½ = ج سے حاصل ہوتے ہیں۔ لیکن اس کے بہت ہی مشابہ تفرقی مساوات

$$\text{فرلا} + \{۱ + (\text{لا} + \text{ما})^{\frac{1}{2}}\}\ \text{فرما} = ۰$$

کے میز اوپر کی طرح اچانک ختم نہیں ہو جاتے۔ اِس کا کامل ابتدائی

$$\text{ما} + \frac{۲}{۳}(\text{لا} + \text{ما})^{\frac{3}{2}} = \text{ج}$$

اور نادر حل $\text{لا} + \text{ما} = ۰$

ہے۔

$$\text{لا فرلا} + \{\text{ما} + (\text{لا}^2 + \text{ما}^2)^{\frac{1}{2}}\}\ \text{فرما} = ۰$$

کی صورت میں نادر حل $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = ۰$ ہے، اِس کو صرف تنہا نقطہ (۰،۰) کی بجائے یہ سمجھنا چاہیے کہ وہ نامکمل مکافیوں

$$\text{ما} + (\text{لا}^2 + \text{ما}^2)^{\frac{1}{2}} = ۰$$

کے دو خیالی لفافوں $\text{ما} = \pm\ \text{خ لا}$ کو تعبیر کرتا ہے۔

ثانیاً فرض کرو کہ و = ۰ سے خود ع بھی لامتناہی ہو جاتا ہے اور $\text{ع}_{\text{لا}}$ اور $\text{ع}_{\text{ما}}$ میں سے ایک یا دونوں بھی لامتناہی ہو جاتے ہیں لیکن $\text{و ع}_{\text{لا}}$ اور $\text{و ع}_{\text{ما}}$ محدود رہتے ہیں۔ تب و = ۰ سے کامل ابتدائی کی ایک انتہائی شکل حاصل ہو گی جو اختیاری مستقل کی لامتناہی قیمت کے متناظر ہو گی۔

مثالاً

$$\text{فرلا} + \{۱ + (\text{لا} + \text{ما})^{\frac{3}{2}}\}\ \text{فرما} \equiv (\text{لا} + \text{ما})^{\frac{3}{2}} \times \text{فر}\{\text{ما} - ۲(\text{لا} + \text{ما})^{-\frac{1}{2}}\} = ۰$$

سے کامل ابتدائی

$$\text{ما} - ۲(\text{لا} + \text{ما})^{-\frac{1}{2}} = \text{ج}$$

حاصل ہوتا ہے اور $\text{لا} + \text{ما} = ۰$ میزوں کے مشترک متقارب کو تعبیر

کرتا ہے -

ثالثاً ء، ء، ءا سب محدود ہو سکتے ہیں جبکہ و = ۰ -

اس صورت میں حل و = ۰ سے ف اور ق دونوں معدوم ہوتے ہیں اور اس کا میزوں کے ساتھ کسی قسم کا ہندسی تعلق رکھنا ضروری نہیں ہے۔ ایسے حل کو حقیر (Trivial) کہا جا سکتا ہے - مثالاً

( لا + ما )$^{\frac{1}{2}}$ فرلا + ۲ ( لا + ما )$^{\frac{1}{2}}$ ما فرما = ۰

سے کامل ابتدائی لا - ما$^{2}$ = ج

اور حقیر حل لا + ما = ۰

حاصل ہوتے ہیں - اس تفرقی مساوات کے متعلق یہ سمجھنا مناسب ہے کہ وہ سادہ تفرقی مساوات فرلا - ۲ ما فرما = ۰ اور جبری مساوات (لا + ما)$^{\frac{1}{2}}$ = ۰ کے اتحاد سے پیدا ہوئی ہے - حقیر حل مخالف شرکا کے ایسے اتحادوں کا ناخواستہ نتیجہ ہوتے ہیں - اب ہم وہ شرطیں بیان کریں گے جن سے ایسے حل خارج ہو جائیں گے اور ہم نادر حلوں اور انتہائی شکلوں میں تمیز کر سکیں گے - مساوات و (لا، ما) = ۰ کی بجائے اس سے زیادہ سادہ مساوات ما = ف (لا) پر غور کرنا موجب سہولت ہوگا۔ یہ مساوات و = ۰ کے نتیجوں میں سے ایک ہے - دوسرے نتیجوں پر جداگانہ بحث کی جا سکتی ہے - ذیل میں ہم صرف اس صورت پر غور کریں گے جس میں ف (لا) حقیقی ہے کیونکہ مسئلہ ایک ایسی شکل میں ہے جو صرف اس وقت اطلاق پذیر ہو سکتا ہے جبکہ تمام خیالی اعداد خارج ہوں -

فرض کرو کہ زیر بحث علاقہ میں ف (لا، ما) اور ق (لا، ما) وحید القیمت محدود اور مسلسل (ممکن ہے ایک ہی جانب جیسا کہ جذرالمربعوں اور دوسرے تفاعلوں کی صورت میں ہوتا ہے جو دلیل کی منفی قیمتوں کے لیے خیالی ہو جاتے ہیں) تفاعل ہیں اور

ط = ا - ف (لا) = ۰

کے عین قریب (ممکن ہے ایک ہی جانب) ان کی علامت مستقل ہے۔ ف اور ق دونوں کو صفر نہیں ہونا چاہئے جبکہ ط = ۰۔ (اگر ابتداً یہ شرط پوری نہ ہو تو ایک مناسب جزو ضربی سے تقسیم کرکے ہمیشہ اُن کو ایسا بنایا جا سکتا ہے)۔ تب اگر ف + ق فَ (لا) میں ما کی بجائے ط + ف (لا) رکھنے سے نتیجہ ع (لا، ط) حاصل ہو تو وہ ضروری اور کافی شرطیں کہ ط = ۰ ایک نادر حل ہو یہ ہیں کہ ع (لا، ۰) = ۰ اور حد فط / ع (لا، ط) اپنی زیرین حد پر زیر بحث علاقہ میں لا کی تمام قیمتوں کے لیے مستدق ہو۔ اگر صرف پہلی شرط پوری ہو تو تکملہ ط = ۰ ایک خاص تکملہ ہوگا جو کامل ابتدائی سے مستقل کو ایک خاص قیمت (ممکن ہے لا متناہی) دیکر حاصل کیا جا سکیگا۔ ہم کہہ سکتے ہیں کہ یہ مسئلہ پوائسن کے زمانہ سے ہے کیونکہ اُس نے اس کی ایک مخصوص صورت ثابت کی تھی۔ بُول (۱) نے اس کی تعمیم کی لیکن اُس کے ثبوت میں وہ نزاکتیں موجود نہیں ہیں جن کی موجودہ علم التحلیل میں ضرورت ہے۔

اِس مسئلہ کو اِس دفعہ کی دوسری مثال پر استعمال کرنے سے

ف + ق نَ (لا) = ۱ - {۱ + (لا + ما)^½} = - (لا + ما)^½

= - ط^½ = ع (لا، ط)، ع (لا، ۰) = ۰

اور
$$\int^{ط} \frac{فرط}{ع\,(لا، ط)} = -\,۲\,ط^{\frac{۱}{۲}}$$

یہ مستدق ہے، اس لیے ط = ۰ سے ایک نادر حل حاصل ہوتا ہے۔
اسی طرح تیسری مثال میں ع (لا، ط) = ۔ $ط^{\frac{۱}{۲}}$ جس سے ایک مستدق تکملہ حاصل ہوتا ہے اور ایک نادر حل ملتا ہے۔ لیکن پانچویں مثال میں ع (لا، ط) = ۔ $ط^{\frac{۳}{۲}}$ اور تکملہ متسع ہے، اس لیے ط = ۰ ایک خاص تکملہ ہے۔ چونکہ یہ مسئلہ صرف حقیقی متغیروں کی صورت میں ہی اطلاق پذیر ہے اس لیے اس کو چوتھی مثال پر استعمال نہیں کیا جا سکتا۔
اس طریقہ کی اہمیت کو واضح کرنے کے لیے ہم اس کو مثال
$$\frac{فرما}{فرلا} = ص\,و^{\frac{۱}{ما}}$$
پر استعمال کریں گے جہاں ص، لا اور ما کا ایک ایسا تفاعل ہے جو ما = ۰ کے لیے نہ تو صفر ہے نہ لامتناہی۔ ہل نے یہ بیان کیا تھا کہ وہ کوئی ایسے طریقہ سے واقف نہیں جس سے اس سوال کا تصفیہ ہو سکے کہ آیا ما = ۰ نادر حل ہے یا نہیں۔ لیکن اگر ہم ما = ۰ کے لیے $و^{\frac{۱}{ما}}$ کی قیمت صفر لیں (جو حقیقت میں غیر متعین ہے، صفر کے طور پر) تاکہ تفاعل ایک جانب مسلسل (ما کی مثبت قیمتوں کے لیے) ہو جائے اور اگر ص پر ایسی شرطیں عائد کی جائیں جو ف اور ق کی شرطوں کے مشابہ ہوں تو ہم اپنے مسئلہ کو اس مثال پر استعمال کر سکتے ہیں۔ تکملہ $\int^{ما} \frac{فرما}{ص\,(لا، ما)}\, و^{-\frac{۱}{ما}}$ متسع ہے، اس لیے ما = ۰ ایک خاص تکملہ ہے اور نادر حل نہیں ہے۔
یہ مشاہدہ طلب ہے کہ نادر حل کی شرطوں سے یہ ضروری ہے (لیکن کافی نہیں) کہ سروں ف اور ق میں سے کم از کم ایک میں ایسا تفاعل شریک رہنا چاہئے کہ ایک ندرت ہو مثلاً $(لا + ما)^{\frac{۱}{۲}}$ ۔

# چھٹے باب پر متفرق مثالیں

حلوں کو جہاں ممکن ہو ترسیموں سے واضح کرو۔

(۱) ع$^{2}$ + ۲ لا ع = ۳ لا$^{2}$ کا امتحان نادر حلوں کے لیے کرو۔

(۲) لا ما ع$^{2}$ − (لا$^{2}$ + ما$^{2}$ − ۱) ع + لا ما = ۰ کو اندراج لا = لا$^{2}$، ما = ما$^{2}$ کے ذریعہ کلیرو کی شکل میں تحویل کرو۔

پس ثابت کرو کہ یہ مساوات مخروطیوں کے ایک ایسے قبیل کو تعبیر کرتی ہے جو ایک مربع کے چار ضلعوں کو مس کرتے ہیں۔

(۳) ثابت کرو کہ لا ما ع$^{2}$ + (لا$^{2}$ − ما$^{2}$ − ھ$^{2}$) ع − لا ما = ۰ ‏(۷۹)

ہم ماسکی مخروطیوں کے ایک قبیل کو تعبیر کرتی ہے جن کے ماسکے (±ھ، ۰) پر ہیں اور جو ان چار خیالی خطوں کو مس کرتے ہیں جو ماسکوں کو لاتناہی پر کے دائری نقطوں سے ملاتے ہیں۔

(۴) ہندسی استدلال یا اور طرح سے ثابت کرو کہ اندراج

لا = ا لا + ب ما، ما = اَ لا + بَ ما

سے کلیرو کی شکل کی کوئی تفرقی مساوات کلیرو کی شکل کی دوسری مساوات میں تبدیل ہوتی ہے۔

(۵) ثابت کرو کہ ۸ ع$^{3}$ لا = ما (۱۲ ع$^{2}$ − ۹) کا

کامل ابتدائی (لا + ج)$^{2}$ = ۳ ما$^{2}$ ج،

ع ممیز ما$^{2}$ (۹ لا$^{2}$ − ۴ ما$^{2}$) = ۰

اور ج ممیز ما$^{3}$ (۹ لا$^{2}$ − ۴ ما$^{2}$) = ۰

ہے۔ اِن ممیزوں کی تعبیر بیان کرو۔

(۶) تفرقی مساوات

لا$^{2}$ ع$^{2}$ + ما ع (۲ لا + ما) + ما$^{2}$ = ۰۔ جہاں ع = $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$

کو اندراج ضا = ما، عا = لا ما سے کلیرو کی شکل میں تحویل کرو۔

پس اس سے یا اور طرح مساوات کو حل کرو ۔
ثابت کرو کہ ما + ۴ لا = ۰ ایک نادر حل ہے، اور ما = ۰ لفاف کا ایک حصہ اور معمولی حل کا ایک حصہ دونوں ہے ۔ [لندن]

(۷) ما$^{۲}$ ( ما − لا $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ ) = لا$^{۴}$ ( $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ )$^{۲}$ کو حل کرو، یہ مساوات مناسب اندراجوں سے کلیرو کی شکل میں مستحیل ہو سکتی ہے ۔ [لندن]

(۸) تفرقی مساواتوں

(۱) ۳ ( ع + لا )$^{۲}$ = ( ع − لا )$^{۳}$

(۲) ما$^{۲}$ ( ۱ + ۴ ع$^{۲}$ ) − ۲ ع لا ما − ۱ = ۰

کو تکمل کرو ۔
(۲) میں نادر حل معلوم کرو اور ان اجزائے ضربی کی اہمیت بتاؤ جو واقع ہوتے ہیں ۔ [لندن]

(۹) ثابت کرو کہ قبیل

ما$^{۲}$ − ۲ ج لا$^{۲}$ ما + ج$^{۲}$ ( لا$^{۲}$ − لا$^{۳}$ ) = ۰

کے تمام منحنی مبدا پر قرن رکھتے ہیں اور وہ محور لا کو مس کرتے ہیں ۔
ج کو ساقط کر کے قبیل کی تفرقی مساوات کو شکل

۴ ع$^{۲}$ لا$^{۲}$ ( لا − ۱ ) − ۴ ع لا ما ( ۴ لا − ۳ ) + ( ۱۶ لا − ۹ ) ما$^{۲}$ = ۰

میں حاصل کرو ۔
ثابت کرو کہ دونوں ممیز شکل لا$^{۲}$ ما$^{۲}$ = ۰ اختیار کرتے ہیں لیکن یہ کہ لا = ۰ حل نہیں ہے اور ما = ۰ ایک خاص تکملہ ہے ۔
[ اس مثال سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ ہمارا نظریہ ترمیم کے بغیر منحنیوں کے ایسے قبیلوں پر اطلاق پذیر نہیں ہوتا جن کا ایک قرن ایک ثابت نقطہ پر ہو ۔ ]

(۱۰) ثابت کرو کہ ر$^{۴}$ + ر$^{۲}$ ( $\frac{\text{فر ر}}{\text{فر طہ}}$ )$^{۲}$ = ا$^{۴}$

کا کامل ابتدائی برنولی کے مساوی دو جیبی منحنیوں کے قبیل

$ر^2 = ا^2 جم ۲ (طہ - عہ)$

کو تعبیر کرتا ہے جو دائرہ ر = ۱ میں کھینچے گئے ہیں، یہ نادر حل ہے اور نقطہ ر = ۰ عقدہ طریق ہے۔

(۸۰) (۱۱) $\left(\frac{فر ر}{فر طہ}\right)^2 + ر^2 - ۲ ر ؤ = ۰$

کا کامل ابتدائی اور نادر حل معلوم کرو اور ان کی تعبیر بیان کرو۔

(۱۲) ثابت کرو کہ $ر = طہ \frac{فر ر}{فر طہ} - \left(\frac{فر ر}{فر طہ}\right)^2$

کا کامل ابتدائی $ر = ج طہ - ج^2$ اور نادر حل $۴ ر = طہ^2$ ہے۔

اس امر کی تصدیق کرو کہ نادر حل کامل ابتدائی کو نقطہ $(ج^2، ۲ج)$ پر مس کرتا ہے جہاں مشترک مماس سمتی نیم قطر کے ساتھ زاویہ مس$^{-1}$ج بناتا ہے۔

[نادر حلوں پر مزید بحث دفعات ۱۶۰ اور ۱۶۱ میں ملے گی جن میں اُن مشکلوں کا ذکر کیا گیا ہے جو ان کی تعریف اور لفاف کی تعریف میں پیش آتی ہیں، نیز ممیزوں میں خاص حلوں کا واقع ہونا، حدود کا تصور، اور ممیزوں کو محسوب کرنے کے طریقے بیان کئے گئے ہیں۔ ان سے اوپر کی مثالوں (۷) اور (۹) پر مزید روشنی پڑے گی۔]

## دوسرے اور اس سے اعلیٰ رتبوں کی مساواتوں کیلئے متفرق طریقے

**۶۸** — اس باب میں ہم بالخصوص دوسرے رتبہ کی مساواتوں کو پہلے رتبہ کی مساواتوں میں تحویل کرنے کے طریقوں پر غور کریں گے۔ ہم ثابت کریں گے کہ رتبہ کی ایسی تحویل ہمیشہ عمل میں آسکتی ہے اگر

(۱) مساوات میں یا صریحی طور پر شامل نہ ہو،

یا (۲) مساوات میں لا صریحی طور پر شامل نہ ہو،

یا (۳) مساوات متجانس ہو۔

مساوات کی ایک خاص شکل جس کی کچھ اہمیت حرکیات میں ہے ایک مکمل جزو ضربی کے استعمال سے نچلے رتبہ میں تحویل کی جاسکتی ہے۔

باب کا بقیہ حصہ خطی مساوات کے لیے وقف ہوگا لیکن اس سے وہ سادہ صورت جس میں سر مستقل ہوتے ہیں خارج کردی گئی ہے کیونکہ اس پر تفصیلی بحث تیسرے باب میں کی جاچکی ہے۔ یہ معلوم ہوگا کہ دوسرے رتبہ کی خطی مساوات پہلے رتبہ کی مساوات میں تحویل ہوسکتی ہے اگر

(۱) عامل کے اجزائے ضربی نکل سکیں،

یا (۲) کوئی ایک تکملہ جو متمم تفاعل سے متعلق ہو معلوم ہو۔

اگر کامل متمم تفاعل معلوم ہو تو مساوات کو مبدلوں کے تغیر کے

طریقہ سے حل کیا جا سکتا ہے۔ یہ عمدہ طریقہ (جو لگرانج سے منسوب ہے) ہر رتبہ کی خطی مساوات پر اطلاق پذیر ہے۔

خطی مساوات پر مزید معلومات مثلاً ٹھیک مساواتوں کے لیے شرط، معادلیت کی شرط غیر متغیرہ والی، شارزین شتق وغیرہ مسئلوں کی شکل میں اِس باب کے تتمہ پر متفرق مثالوں کے درمیان ملیں گی اور ساتھ ہی ایسے اشارے دیئے جائیں گے کہ طالب علم خود اُن کو حل کر سکے۔

(۸۲) لا کے لحاظ سے تفرقوں کو ظاہر کرنے کے لیے لاحقے استعمال کئے جائیں گے مثلاً $\frac{فر^{۲} ما}{فر لا^{۲}}$ کے لیے $ما_{۲}$ استعمال کیا جائیگا لیکن جب متبوع متغیر لا کے سوا کوئی اور ہو تو تفرقی سروں کو پوری طرح لکھا جائے گا۔

## ۶۹ ـ ما غائب

اگر ما صریحی طور پر دوسرے رتبہ کی مساوات میں واقع نہ ہو تو $ما_{۱}$ کی بجائے ع اور $ما_{۲}$ کی بجائے $\frac{فر ع}{فر لا}$ لکھو۔

اِس طرح ایک مساوات حاصل ہوگی جس میں صرف $\frac{فر ع}{فر لا}$، ع، اور لا شامل ہوں گے اور اس لیے وہ پہلے رتبہ کی مساوات ہوگی۔

مثلاً $لا\, ما_{۲} + ما_{۱} = ۴\, لا$ پر غور کرو۔

یہ مساوات $لا \frac{فر ع}{فر لا} + ع = ۴\, لا$ میں تحویل ہوتی ہے۔

اور اس کو فوراً تکمل کیا جا سکتا ہے

چنانچہ $لا\, ع = ۲\, لا^{۲} + ا$

یعنے $ع = ۲\, لا + \frac{ا}{لا}$

تکمیل کرنے پر $ما = لا^۲ + ا \log لا + ب$

جہاں ا اور ب اختیاری مستقل ہیں۔

اس طریقہ کو اُس وقت بھی استعمال کیا جا سکتا ہے جبکہ ن ویں رتبہ کی مساوات کو جس میں ما صریحی طور پر موجود نہ ہو (ن - ۱) ویں رتبہ کی مساوات میں تحویل کرنا ہو۔

**۷۰ — لا غائب** ۔ اگر لا صریحی طور پر موجود نہ ہو تو تب بھی

$ما_۱$ کی بجائے ع لکھا جا سکتا ہے لیکن $ما_۲$ کی بجائے ع $\frac{فرع}{فرما}$ لکھنا ہوگا

کیونکہ ع $\frac{فرع}{فرما} = \frac{فرما}{فرلا} \frac{فرع}{فرما} = \frac{فرع}{فرلا} = ما_۲$ ۔ اِس عمل سے

دوسرے رتبہ کی مساوات (جس میں لا نہ ہو) پہلے رتبہ کی مساوات میں (جس میں متغیر ع اور ما ہوں) تحویل ہوتی ہے۔

مثلاً مساوات $ما\, ما_۲ = ما_۱^۲$

مساوات $ما\, ع \frac{فرع}{فرما} = ع^۲$

میں مستحیل ہوتی ہے اور اس سے

$ما_۱ = ب\, ما$ اور $ما = ا\, و^{ب لا}$

باآسانی حاصل ہوتے ہیں۔

## حل طلب مثالیں

(۱) $ما_۲ جم^۲ لا = ا$      (۲) $ما\, ما_۲ + ما_۱^۲ = ما_۱$

(۳) $ما\, ما_۲ + ۱ = ما_۱^۲$      (۴) $ما\, ما_۲ + ما_۱^۲ = ۲\, ما_۱^۲$ کو پچھلی مثال

میں تحویل کر کے حل کرو۔

(۵) $\text{لا}\,\text{ما}_{3} + \text{ما}_{2} = 12\,\text{لا}$ ، (۶) $\text{ما}_{\text{ن}} - 2\,\text{ما}_{\text{ن}-1} = \text{و}^{\text{لا}}$

(۷) $\dfrac{(1+\text{ما}_{1}^{2})^{\frac{3}{2}}}{\text{ما}_{2}} = \text{ک}$ کو تکمل کرو اور اسکا ہندسی مفہوم بیان کرو۔

(۸۳) (۸) ایک خاص منحنی کا نصف قطر انحنا عماد کے اس طول کے مساوی ہے جو منحنی اور محور لا کے درمیان قطع ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ یہ منحنی ایک زنجیرہ ہے یا ایک دائرہ بموجب اس کے کہ وہ محور لا کی جانب محدب ہو یا مقعر۔

(۹) اس منحنی کی تفرقی مساوات معلوم کرو اور حل کرو جس کی قوس کا طول ایک ثابت نقطہ ا سے ایک متغیر نقطہ ف تک اُس زاویہ کے مماس کے متناسب ہے جو ف پر کے مماس اور محور لا کے درمیان ہے۔

**۷۲ ۔ متجانس مساواتیں** ۔ اگر لا اور ما کو بُعد ا کا سمجھا جائے تو

$\text{ما}_{1}$ کا بُعد صفر ہے،
$\text{ما}_{2}$ کا بُعد $-1$ ہے،
$\text{ما}_{3}$ کا بُعد $-2$ ہے،

وغیرہ ۔

ہم متجانس مساوات کی یہ تعریف کرتے ہیں کہ وہ ایسی مساوات ہوتی ہے جس میں تمام رقمیں ایک ہی بُعد کی ہوتی ہیں۔ دوسرے باب میں پہلے رتبہ اور پہلے درجہ کی متجانس مساواتیں زیر بحث آچکی ہیں اور تیسرے باب میں متجانس خطی مساوات

$$\text{لا}^{\text{ن}}\,\text{ما}_{\text{ن}} + \text{ا}\,\text{لا}^{\text{ن}-1}\,\text{ما}_{\text{ن}-1} + \text{ب}\,\text{لا}^{\text{ن}-2}\,\text{ما}_{\text{ن}-2} + \dots + \text{ہ}\,\text{لا}\,\text{ما}_{1} + \text{ک}\,\text{ما} = 0$$

(جہاں ا، ب، ... ھ، ک صرف مستقل عدد ہیں) پر بحث کیجا چکی ہے جس میں ہم نے اندراج لا = قوت یا ت = لوک لا استعمال کیا تھا۔
فرض کروکہ ہم یہی اندراج متجانس مساوات

$$\text{لا}\ \text{ما}\ \text{ما}_2 + \text{لا}\ \text{ما}_1^2 = 3\ \text{ما}\ \text{ما}_1 \quad \ldots\ldots\ (1)$$

میں کرتے ہیں۔

اب $$\text{ما}_1 = \frac{\text{فرما}}{\text{فزلا}} = \frac{\text{فرت}}{\text{فزلا}}\ \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} = \frac{1}{\text{لا}}\ \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}$$

$$\text{ما}_2 = \frac{\text{فرما}_1}{\text{فزلا}} = -\frac{1}{\text{لا}^2}\ \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} + \frac{1}{\text{لا}}\ \frac{\text{فر}}{\text{فزلا}}\ \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}$$

$$= -\frac{1}{\text{لا}^2}\ \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} + \frac{1}{\text{لا}}\ \frac{\text{فرت}}{\text{فزلا}}\ \frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرت}^2}$$

$$= -\frac{1}{\text{لا}^2}\ \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} + \frac{1}{\text{لا}^2}\ \frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرت}^2}\ .$$

(۱) میں درج کرو اور لا سے ضرب دو تو

$$\text{ما}\left(\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرت}^2} - \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}\right) + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}\right)^2 = 3\ \text{ما}\ \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}$$

یعنی $$\text{ما}\ \frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرت}^2} + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}\right)^2 = 4\ \text{ما}\ \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}$$

یہ ایک ایسی مساوات ہے جس میں ت غائب ہے اور اس لیے وہ ان مساواتوں کے مشابہ ہے جو پچھلے دفعہ میں حل کی گئی تھیں اور جن میں لا غائب تھا۔

$\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} = $ ق رکھ کر طالب علم آسانی سے

(۸۴

$$\text{ما}\ \text{ق} = 2\left(\text{ما}^2 + \text{ب}\right)$$

حاصل کر سکتا ہے اور اِس سے

$$\text{ت} + \text{ج} = \frac{1}{4}\,\text{لوک}\,(\text{ما}^2 + \text{ب})$$

پس

$$\text{ما}^2 + \text{ب} = \text{و}^{4(\text{ت}+\text{ج})}$$

$= \text{ا}\,\text{لا}^4$ ، $\text{و}^{4\text{ج}}$ کی بجائے دوسرا اختیاری مستقل ا رکھنے سے۔

**۲۷** — دفعہ ۱۷ کی مثال بہت آسانی سے حل ہوئی جس کی وجہ یہ ہے کہ $\text{لا}^2$ کو $\text{ما}_2$ کے ساتھ اور لا کو $\text{ما}_1$ کے ساتھ وابستہ کرنے کے بعد کوئی زائد لا نہیں بچا۔ واقعہ یہ ہے کہ اِس کو شکل

$$\text{ما}\,(\text{لا}^2\,\text{ما}_2) + (\text{لا}\,\text{ما}_1)^2 = 3\,\text{ما}\,(\text{لا}\,\text{ما}_1)$$

میں لکھا جا سکتا تھا۔

لیکن

$$(\text{لا}^2 + \text{ما}^2)(\text{ما} - \text{لا}\,\text{ما}_1) + \text{لا}^2\,\text{ما}^2\,\text{ما}_2 = 0 \quad \ldots\ldots (2)$$

کو اِس طرح نہیں لکھا جا سکتا۔ اِس کو پچھلی مثال کے مشابہ شکل میں تحویل کرنے کے لیے رکھو ما = و لا ، یہ وہی اندراج ہے جس کو دوسرے باب کی متجانس مساواتوں کے لیے استعمال کیا گیا تھا۔

مساوات (۲) ہو جاتی ہے

$$(\text{لا}^2 + \text{لا}^2\,\text{و}^2)(\text{و}\,\text{لا} - \text{و}_1\,\text{لا}^2 - \text{و}\,\text{لا}) + \text{و}^2\,\text{لا}^4(\text{لا}\,\text{و}_2 + 2\,\text{و}_1) = 0$$

یعنی

$$-(1 + \text{و}^2)\,\text{و}_1 + \text{و}^2(\text{لا}\,\text{و}_2 + 2\,\text{و}_1) = 0$$

اور اِس کو لکھا جا سکتا ہے

$$\text{و}^2\,\text{لا}\,\text{و}_2 = (1 - \text{و}^2)\,\text{لا}\,\text{و}_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

اب ہم حسب سابق عمل کرتے ہیں اور لا = و^ت رکھتے ہیں تو

$$لا_{و_1} = \frac{فرو}{فرت}$$

اور
$$لا^{۲}_{و_۲} = \frac{فر^۲و}{فرت^۲} - \frac{فرو}{فرت}$$

پس مساوات (۳) ہو جاتی ہے

$$و^۲\left(\frac{فر^۲و}{فرت^۲} - \frac{فرو}{فرت}\right) = (۱ - و^۲)\frac{فرو}{فرت}$$

یعنے
$$و^۲ \frac{فر^۲و}{فرت^۲} = \frac{فرو}{فرت} \quad \ldots\ldots (۴)$$

جس میں ت غائب ہے۔

حسب سابق رکھو $\frac{فرو}{فرت} = ق$، $\frac{فر^۲و}{فرت^۲} = ق\frac{فرق}{فرو}$

تو مساوات (۴) ہو جاتی ہے $و^۲ ق \frac{فرق}{فرو} = ق$

یعنے
$$\frac{فرق}{فرو} = \frac{۱}{و^۲}$$ (الّا ق = جس سے ما = ج لا حاصل ہوگا)

$$\frac{فرو}{فرت} = ق = \frac{۱}{ا_۱} - \frac{۱}{و}$$

$$فرت = \frac{ا_۱ و\, فرو}{و - ا_۱} = \left(ا_۱ + \frac{ا_۱^۲}{و - ا_۱}\right) فرو$$

$$ت = ا_۱ و + ا_۱^۲ \text{ لوک } (و - ا_۱) + ب$$

اور بالآخر
$$\text{لوک } لا = \frac{ا_۱ ما}{لا} + ا_۱^۲ \text{ لوک } (ما - ا_۱ لا) - ا_۱^۲ \text{ لوک } لا + ب$$

(۸۵) **۷۳** — پچھلے دفعہ کے مطابق عمل کرکے ہم دوسرے رتبہ کی کسی متجانس

تفرقی مساوات کو پہلے رتبہ میں تحویل کر سکتے ہیں۔
کسی ایسی مساوات کو شکل

$$\text{ف}\left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}}،\ \text{ما}_1،\ \text{لا}\ \text{ما}_2\right) = ۰$$

میں تحویل کیا جا سکتا ہے۔ مثلاً دفعہ ۱ کی مساوات جب اس کو لا سے تقسیم کیا جاتا ہے تو

$$\left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}}\right)\text{لا}\ \text{ما}_2 + \text{ما}_1^2 = ۳\left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}}\right)\text{ما}_1$$

ہو جاتی ہے اور دفعہ ۲ کی مساوات، $\text{لا}^3$ سے تقسیم کرنے پر،

$$\left(۱ + \frac{\text{ما}_1^2}{\text{لا}^2}\right)\left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}} - \text{ما}_1\right) + \left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}}\right)^2 \text{لا}\ \text{ما}_2 = ۰$$

ہو جاتی ہے۔

اندراجات: $\text{ما} = \text{و}\ \text{لا}$ اور $\text{لا} = \text{ق}^{\text{ت}}$ سے

$$\text{ف}\left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}}،\ \text{ما}_1،\ \text{لا}\ \text{ما}_2\right) = ۰\ \text{اول}\ \text{ف}\left(\text{و}،\ \text{لا}\ \text{و}_1 + \text{و}،\ \text{لا}^2 \text{و}_2 + ۲\ \text{لا}\ \text{و}_1\right) = ۰$$

میں اور پھر

$$\text{ف}\left(\text{و}،\ \frac{\text{فرو}}{\text{فرت}} + \text{و}،\ \frac{\text{فر}^2\text{و}}{\text{فرت}^2} + \frac{\text{فرو}}{\text{فرت}}\right) = ۰$$

میں مستحیل ہوتی ہے جس میں ت غائب ہے اور اس لیے وہ پہلے رتبہ میں تحویل پذیر ہے۔

## حل طلب مثالیں

(۱) $\text{لا}^2 \text{ما}_2 - \text{لا}\ \text{ما}_1 + \text{ما} = ۰$، (۲) $\text{لا}^2 \text{ما}_2 - \text{لا}\ \text{ما}_1 + ۵\ \text{ما} = ۰$

(۳) $۲\ \text{لا}^2\ \text{ما}\ \text{ما}_2 + \text{ما}^2 = \text{لا}^2 \text{ما}_1^2$، (۴) $\text{ما} = \text{یٰ}$ کے اندراج سے

$$۲\ \text{لا}^2\ \text{ما}\ \text{ما}_2 + ۴\ \text{ما}^2 = \text{لا}^2 \text{ما}_1^2 + ۲\ \text{لا}\ \text{ما}\ \text{ما}_1$$

کو متجانس بناؤ اور حل کرو۔

## ۴۷۔ ایک مساوات جو حرکیات میں وقوع پذیر ہوتی ہے۔

شکل $ما_۲ =$ ف (ما) اکثر حرکیات میں واقع ہوتی ہے خاصکر حرکت کے مسئلوں میں جبکہ حرکت ایک ... قوت کے تحت ہو جس کی سمت ایک ثابت نقطہ کی جانب اور جس کی مقدار کا اس ثابت نقطہ سے فاصلہ پر منحصر ہو۔

مساوات کی طرفین کو ۲ $ما_۱$ سے ضرب دو تو

$$۲\, ما_۱\, ما_۲ = ۲\, ف(ما)\, ما_۱$$

تکمل کرنے پر $\quad ما_۱^۲ = ۲ \int ف(ما) \frac{فرما}{فرلا} فرلا = ۲ \int ف(ما) فرما$

یہ حقیقت میں توانائی کی مساوات ہے۔

یہ طریقہ مساوات $\frac{فر^۲ لا}{فرت^۲} = -\,د^۲ لا$ پر (جو سادہ موسیقی حرکت کی مساوات ہے) استعمال کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$۲ \frac{فرلا}{فرت} \frac{فر^۲ لا}{فرت^۲} = -۲\, د^۲ لا \frac{فرلا}{فرت}$$

اور ت کے لحاظ سے تکمل کرنے سے

$$\left(\frac{فرلا}{فرت}\right)^۲ = -\,د^۲ لا^۲ + مستقل = د^۲ (ا^۲ - لا^۲) \text{ فرض کرو}$$

اس لیے (۸۶)

$$\frac{فرت}{فرلا} = \frac{۱}{د} \frac{۱}{(ا^۲ - لا^۲)^{\frac{۱}{۲}}}$$

$$ت = \frac{۱}{د} جب^{-۱} \frac{لا}{ا} + مستقل$$

لا = ۱ جب ( دت + صہ )

## حل طلب مثالیں

(۱) ما₂ = ما³ - ما ، اگر یہ دیا گیا ہو کہ ما₁ = ۰ جبکہ ما = ۱

(۲) ما₂ = ق^{۲ما} ، اگر یہ دیا گیا ہو کہ ما = ۰ اور ما₁ = ۱ جبکہ لا = ۰

(۳) ما₂ = قط² ما س ما ، اگر یہ دیا گیا ہو کہ ما = ۰ اور ما₁ = ۱ جبکہ لا = ۰

(۴) فر²لا / فرت² = - گ و² / لا² ، اگر یہ دیا گیا ہو کہ لا = ھ اور فرلا / فرت = ۰

جبکہ ت = ۰

[ ھ - لا وہ فاصلہ ہے جس میں سے ایک ذرہ سکون سے جاذبہ کے تحت گرتا ہے جہاں جاذبہ زمین کے مرکز سے فاصلہ کے مربع کے بالعکس بدلتی ہے ، ہوا کی مزاحمت وغیرہ کو نظر انداز کیا گیا ہے ]

(۵) دو صورتوں (۱) ف = مہ ع² اور (۲) ف = مہ ع³ میں

مساوات فر²ع / فرط² + ع = ف / مہ² ع² کو حل کرو اگر یہ دیا گیا ہو کہ

ط = فرع / فرط = ۰ جبکہ ع = ۱ / ج جہاں مہ ، ھ اور ج مستقل ہیں -

[ اِن سے وہ راستہ معلوم ہوتا ہے جس کو ایک ذرہ ایک ایسی قوتِ کشش کے تحت طے کرتا ہے جو ایک ثابت نقطہ کی جانب ہے اور علی الترتیب اِس نقطہ سے فاصلہ ر کے مربع اور مکعب کے بالعکس متناسب ہے - ع ، ر کا متکافی ہے اور ط قطبی محددوں میں وہی معمولی معنے رکھتا ہے ، مہ اکائی فاصلہ پر اسراع ہے ، اور ھ رقبئی رفتار کا دُگنا ہے - ]

## ۷۵ - عامل کو اجزائے ضربی میں تحلیل کرنا خطی مساوات

(لا + ۲) ما۲ - (۲ لا + ۵) ما۱ + ۲ ما = (لا + ۱) قو^لا

کو {(لا + ۲) عف^۲ - (۲ لا + ۵) عف + ۲} ما = (لا + ۱) قو^لا

کے طور پر لکھا جا سکتا ہے جہاں عف (حسب باب سوم) فر/فر لا کی بجائے لکھا گیا ہے۔

اب اِس مخصوص مثال میں عامل کو اجزائے ضربی میں تحلیل کیا جا سکتا ہے چنانچہ

{(لا+۲) عف - ۱} (عف - ۲) ما = (لا + ۱) قو^لا

رکھو (عف - ۲) ما = و

تو {(لا + ۲) عف - ۱} و = (لا + ۱) قو^لا

یہ پہلے رتبہ کی خطی مساوات ہے۔ دفعہ ۲۰ کے مطابق حل کرنے پر حاصل ہوتا ہے

و = ج (لا + ۲) + قو^لا

یعنے (عف - ۲) ما = ج (لا + ۲) + قو^لا

یہ بھی ایک خطی مساوات ہے اور اِس لیے بالآخر حاصل ہوتا ہے

ما = ا (۲ لا + ۵) + ب قو^۲لا - قو^لا - ۱/۴ ج کی بجائے ا درج کرنے سے۔

۸۷) ظاہر ہے کہ صرف خاص صورتوں میں ہی عامل کے اجزائے ضربی نکل سکتے ہیں۔ اِن اجزائے ضربی کو صحیح ترتیب میں لکھنا چاہیئے کیونکہ وہ تبادلہ پذیر نہیں ہیں۔ مثلاً اوپر کی مثال میں ترتیب کو الٹنے سے حاصل ہوگا

(عف - ۲) {(لا + ۲) عف - ۱} ما = {(لا + ۲) عف^۲ - (۲ لا + ۴) عف + ۲} ما

## حل طلب مثالیں۔

(۱) $(\text{لا}+1)\,\text{ما}_2 + (\text{لا}-1)\,\text{ما}_1 - 2\,\text{ما} = 0$،

(۲) $\text{لا}\,\text{ما}_2 + (\text{لا}-1)\,\text{ما}_1 - \text{ما} = 0$،

(۳) $\text{لا}\,\text{ما}_2 + (\text{لا}-1)\,\text{ما}_1 - \text{ما} = \text{لا}^2$،

(۴) $\text{لا}\,\text{ما}_2 + (\text{لا}^2+1)\,\text{ما}_1 + 2\,\text{لا}\,\text{ما} = 2\,\text{لا}$، اگر یہ دیا گیا ہو کہ $\text{ما} = 2$ اور $\text{ما}_1 = 0$ جبکہ $\text{لا} = 0$۔

(۵) $(\text{لا}^2-1)\,\text{ما}_2 - (4\text{لا}^2 - 3\text{لا} - 5)\,\text{ما}_1 + (4\text{لا}^2 - 6\text{لا} - 5)\,\text{ما} = \text{ق}^{2\text{لا}}$، اگر یہ دیا گیا ہو کہ $\text{ما} = 1$ اور $\text{ما}_1 = 2$ جبکہ $\text{لا} = 0$۔

## ۷۶ — متمم تفاعل[1] سے متعلق ایک تکملہ کا معلوم ہونا۔

جب مساوات

$$\text{ما}_2 + \text{ف}\,\text{ما}_1 + \text{ق}\,\text{ما} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

کا ایک تکملہ معلوم ہو (فرض کرو کہ $\text{ما} = \text{ی}$ معلوم ہے) تو دوسرے رتبہ کی زیادہ عام مساوات

$$\text{ما}_2 + \text{ف}\,\text{ما}_1 + \text{ق}\,\text{ما} = \text{ر}$$

کو جس میں ف، ق، ر سب کے سب لا کے تفاعل ہیں اندراج

$$\text{ما} = \text{و}\,\text{ی}$$

کے ذریعہ پہلے رتبہ کی مساوات میں تحویل کیا جا سکتا ہے۔

تفرق کرنے پر $\text{ما}_1 = \text{و}_1\,\text{ی} + \text{و}\,\text{ی}_1$،

$$\text{ما}_2 = \text{و}_2\,\text{ی} + 2\,\text{و}_1\,\text{ی}_1 + \text{و}\,\text{ی}_2$$

اس لیے مساوات (۱) ہو جاتی ہے

$$\text{و}_2\,\text{ی} + \text{و}_1(2\,\text{ی}_1 + \text{ف}\,\text{ی}) + \text{و}(\text{ی}_2 + \text{ف}\,\text{ی}_1 + \text{ق}\,\text{ی}) = \text{ر}$$

[1] دفعہ ۲۹ کا ثبوت کہ ایک تفرقی مساوات کا عام حل ایک خاص تکملہ اور متمم تفاعل کا حاصل جمع ہوتا ہے اسوقت اطلاق پذیر ہوتا ہے جبکہ اس کے سر لا کے تفاعل ہوں اور نیز اسوقت جبکہ وہ مستقل ہوں۔

یعنے $ی \frac{فر و_۱}{فر لا} + و_۱ (۲ ی_۱ + ف ی) = م / ......(۳)$

کیونکہ بموجب فرض $ی_۲ + ف ی_۱ + ق ی = ۰$

مساوات (۳) $و_۱$ میں پہلے رتبہ کی خطی مساوات ہے۔

اسی طرح ن ویں رتبہ کی کسی خطی مساوات کو (ن-۱) ویں رتبہ کی ایک خطی مساوات میں تحویل کیا جا سکتا ہے اگر متمم تفاعل سے متعلق ایک تکملہ معلوم ہو۔

## ۷۷ - مثال - مساوات

$(لا + ۲) ما_۲ - (۲ لا + ۵) ما_۱ + ۲ ما = (لا + ۱) قو^{لا} ..... (۴)$

پر پھر غور کرو۔

(۸۸) اگر یہ معلوم ہو کہ $ما = قو^{۲لا}$ سے مساوات کی دائیں جانب کا جملہ صفر ہوتا ہے تو ہم

$$ما = و قو^{۲لا}$$

رکھ سکتے ہیں - اِس سے حاصل ہوگا

$$ما_۱ = (و_۱ + ۲ و) قو^{۲لا}$$

اور
$$ما_۲ = (و_۲ + ۴ و_۱ + ۴ و) قو^{۲لا}$$

(۴) میں درج کرنے پر

$$(لا+۲) و_۲ قو^{۲لا} + \{۴(لا+۲) - (۲لا+۵)\} و_۱ قو^{۲لا}$$

$$+ \{۴(لا+۲) - (۲لا+۵) ۲ + ۲\} و قو^{۲لا} = (لا+۱) قو^{لا}$$

یعنے $(لا + ۲) \frac{فر و_۱}{فر لا} + (۲ لا + ۳) و_۱ = (لا + ۱) قو^{-لا}$

اِس کو معمولی طریقہ پر (متکمل جزو ضربی معلوم کرکے) حل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$و_{1} = قو^{-لا} + ج (لا + ۲) قو^{-۲لا}$$

تکمل کرنے سے $و = -قو^{-لا} - \frac{1}{۴} ج (۲لا + ۵) قو^{-۲لا} + ب$

اِس لیے $ما = و قو^{۲لا} = -قو^{لا} - \frac{1}{۴} ج (۲لا + ۵) + ب قو^{۲لا}$

## حل طلب مثالیں

(۱) ثابت کرو کہ مساوات $ما_{۲} + ف ما_{1} + ق ما = ۰$ ، $ما = قو^{لا}$ سے پوری ہوتی ہے اگر $۱ + ف + ق = ۰$ اور $ما = لا$ سے پوری ہوتی ہے اگر $ف + ق لا = ۰$ ۔

(۲) $لا^{۲} ما_{۲} + لا ما_{1} - ما = ۸ لا^{۳}$ ،

(۳) $لا^{۲} ما_{۲} - (لا^{۲} + ۲لا) ما_{1} + (لا + ۲) ما = لا^{۳} قو^{لا}$ ،

(۴) $لا ما_{۲} - ۲(لا + ۱) ما_{1} + (لا + ۲) ما = (لا - ۲) قو^{۲لا}$ ،

(۵) $لا^{۲} ما_{۲} + لا ما_{1} - ۹ ما = ۰$ ، اگر یہ دیا گیا ہو کہ $ما = لا^{۳}$ ایک حل ہے۔

(۶) $لا ما_{۲} (لا جم لا - ۲ جب لا) + (لا^{۲} + ۲) ما_{1}$ جب $لا - ۲ ما (لا جب لا + جم لا) = ۰$ ، اگر یہ دیا گیا ہو کہ $ما = لا^{۲}$ ایک حل ہے۔

**۷۸ ۔ مبدلوں کا تغیر** ۔ اب ہم ایک خطی مساوات کا جس کا متمم تفاعل معلوم ہو کامل ابتدائی معلوم کرنے کے لیے ایک نفیس لیکن قدرے مصنوعی طریقہ بیان کریں گے ۔

فرض کرو کہ اس طریقہ کی وضاحت کے لیے ہم وہی مثال لیتے ہیں جو قبل ازیں دو مختلف طریقوں سے حل کیجا چکی ہے یعنے

(لا+۲) ما۲ - (۲لا+۵) ما۱ + ۲ما = (لا+۱) قو^لا ، ........ (۱)

جس کا متمم تفاعل ما = ا (۲لا+۵) + ب قو^۲لا ہے۔

فرض کرو کہ ما = (۲لا+۵) ا + قو^۲لا ب ، ...... (۲)

جہاں ا اور ب ، لا کے تفاعل ہیں۔

یہ مفروضہ دفعہ ،، کے مفروضہ ما = و قو^۲لا کے مشابہ ہے لیکن اس سے زیادہ متشاکل ہے۔

(۲) کو تفرق کرنے سے

ما۱ = (۲لا+۵) ا۱ + قو^۲لا ب۱ + ۲ا + ۲قو^۲لا ب ، ....... (۳)

ابتک یہ دو تفاعل (یا مبدل) ا اور ب صرف ایک رشتہ میں منسلک ہیں۔ اس لیے ہم ان سے ایک زائد مساوات

(۲لا+۵) ا۱ + قو^۲لا ب۱ = ۰ ، ......... (۴)

پوری کراتے ہیں۔

(۸۹)

اب مساوات (۳)

ما۱ = ۲ا + ۲قو^۲لا ب ، .......... (۵)

میں تحویل ہوگی۔ اس کو تفرق کرنے سے

ما۲ = ۴قو^۲لا ب + ۲ا۱ + ۲قو^۲لا ب۱ ، ...... (۶)

مساواتوں (۲)، (۵)، اور (۶) سے علی الترتیب ما، ما۱، اور ما۲ کی

قیمتیں لیکر (۱) میں درج کرو ۔ ا اور ب کے ساتھ جو اجزائے ضربی ہیں وہ صفر ہو جاتے ہیں اور حاصل ہوتا ہے

$$2(\text{لا}+2)\,\text{ا}_1 + 2(\text{لا}+2)\,\text{قو}^{2\text{لا}}\,\text{ب}_1 = (\text{لا}+1)\,\text{قو}^{\text{لا}} \quad \ldots\ldots(7)$$

(۴) اور (۷) دو ہمزاد مساواتیں ہیں جن کو ہم $\text{ا}_1$ اور $\text{ب}_1$ کیلئے حل کر سکتے ہیں چنانچہ

$$\frac{\text{ا}_1}{\text{قو}^{2\text{لا}}} = \frac{\text{ب}_1}{-(2\text{لا}+5)} = \frac{(\text{لا}+1)\,\text{قو}^{\text{لا}}}{2\,\text{قو}^{2\text{لا}}(\text{لا}+2)(1-2\text{لا}-5)} = -\frac{(\text{لا}+1)\,\text{قو}^{-\text{لا}}}{4(\text{لا}+2)^2}$$

اِس لیے $\quad \text{ا}_1 = -\frac{(\text{لا}+1)\,\text{قو}^{\text{لا}}}{4(\text{لا}+2)^2} = -\frac{\text{قو}^{\text{لا}}}{4}\left\{\frac{1}{\text{لا}+2} - \frac{1}{(\text{لا}+2)^2}\right\}$

اور تکمل سے $\quad \text{ا} = -\frac{\text{قو}^{\text{لا}}}{4(\text{لا}+2)} + \text{ا}'$ جہاں $\text{ا}'$ مستقل ہے۔

اسی طرح $\quad \text{ب}_1 = \frac{(2\text{لا}+5)(\text{لا}+1)\,\text{قو}^{-\text{لا}}}{4(\text{لا}+2)^2} = \frac{\text{قو}^{-\text{لا}}}{4}\left\{2 - \frac{1}{\text{لا}+2} - \frac{1}{(\text{لا}+2)^2}\right\}$

اور $\quad \text{ب} = \frac{\text{قو}^{\text{لا}}}{4}\left\{\frac{1}{\text{لا}+2} - 2\right\} + \text{ب}$

(۲) میں درج کرنے پر

$$\text{م} = (2\text{لا}+5)\left\{-\frac{\text{قو}^{\text{لا}}}{4(\text{لا}+2)} + \text{ا}'\right\} + \frac{\text{قو}^{\text{لا}}}{4}\left\{\frac{1}{\text{لا}+2} - 2\right\} + \text{ب}\,\text{قو}^{2\text{لا}}$$

$$= \text{ا}'(2\text{لا}+5) + \text{ب}\,\text{قو}^{2\text{لا}} - \text{قو}^{\text{لا}}$$

**۷۹** — فرض کرو کہ ہم اِن اعمال کو دوسرے رتبہ کی عام خطی مساوات

$$\text{ما}_{2} + \text{ف}\,\text{ما}_{1} + \text{ق}\,\text{ما} = \text{ر}، \quad \ldots\ldots (1)$$

پر استعمال کرتے ہیں۔ فرض کرو کہ اس کا متمم تفاعل $\text{ا}\,\text{ع} + \text{ب}\,\text{و}$ معلوم ہے جہاں ا اور ب اختیاری مستقل ہیں اور ع اور و، لا کے معلومہ تفاعل ہیں۔ مان لو کہ

$$\text{ما} = \text{ع}\,\text{ا} + \text{و}\,\text{ب}، \quad \ldots\ldots (2)$$

تو

$$\text{ما}_{1} = \text{ع}_{1}\,\text{ا} + \text{و}_{1}\,\text{ب}، \quad \ldots\ldots (3)$$

بشرطیکہ

$$\text{ع}\,\text{ا}_{1} + \text{و}\,\text{ب}_{1} = 0، \quad \ldots\ldots (4)$$

(۳) کو تفرق کرنے سے

$$\text{ما}_{2} = \text{ع}_{2}\,\text{ا} + \text{و}_{2}\,\text{ب} + \text{ع}_{1}\,\text{ا}_{1} + \text{و}_{1}\,\text{ب}_{1}، \quad \ldots\ldots (5)$$

(۱) میں $\text{ما}_{2}$، $\text{ما}_{1}$ اور ما کی بجائے اندراج کرو۔

وہ رقمیں جن میں ا شامل ہوگا $\text{ا}(\text{ع}_{2} + \text{ف}\,\text{ع}_{1} + \text{ق}\,\text{ع})$ ہونگی یعنے صفر کیونکہ بموجب فرض

$$\text{ع}_{2} + \text{ف}\,\text{ع}_{1} + \text{ق}\,\text{ع} = 0$$

اسی طرح وہ رقمیں جن میں ب آتا ہے معدوم ہوتی ہیں، اور مساوات (۱)

$$\text{ع}_{1}\,\text{ا}_{1} + \text{و}_{1}\,\text{ب}_{1} = \text{ر}، \quad \ldots\ldots (6)$$

میں تحویل ہوتی ہے۔

(۴) اور (۶) کو حل کرنے سے

$$\frac{\text{ا}_{1}}{\text{و}} = \frac{\text{ب}_{1}}{-\text{ع}} = \frac{\text{ر}}{\text{و}\,\text{ع}_{1} - \text{ع}\,\text{و}_{1}} \qquad (90)$$

اب ا اور ب کو عمل تکمل سے معلوم کیا جا سکتا ہے، فرض کرو

$$\text{ا} = \text{ف}(\text{لا}) + \text{ا}،$$

$$\text{ب} = \text{فا}(\text{لا}) + \text{ب}$$

جہاں ف(لا) اور فا(لا)، لا کے معلومہ تفاعل ہیں اور ا اور ب

اختیاری مستقل ہیں -
(۲) میں درج کرنے پر بالآخر حاصل ہوتا ہے
ما = ع ف (لا) + و فا (لا) + ا ع + ب و

**۸۰** — کسی رتبہ کی خطی مساواتوں پر اس طریقہ کی توسیع عمل میں آسکتی ہے - مثالاً تیسرے رتبہ کی خطی مساوات

ما۳ + ف ما۲ + ق ما۱ + ر ما = س ...... (۱)

لو - فرض کرو کہ اس کا متمم تفاعل ما = ا ع + ب و + ج ط معلوم ہے - حسب ذیل مساواتیں آسانی سے حاصل ہونگی:

ما = ع ا + و ب + ط ج ...... (۲)

ما۱ = ع۱ ا + و۱ ب + ط۱ ج ...... (۳)

بشرطیکہ . = ع ا۱ + و ب۱ + ط ج۱ ...... (۴)

اس لیے ما۲ = ع۲ ا + و۲ ب + ط۲ ج ...... (۵)

بشرطیکہ . = ع۱ ا۱ + و۱ ب۱ + ط۱ ج۱ ...... (۶)

اب ما۳ = ع۳ ا + و۳ ب + ط۳ ج

+ ع۲ ا۱ + و۲ ب۱ + ط۲ ج۱ ...... (۷)

(۱) میں درج کرنے سے

س = ع۲ ا۱ + و۲ ب۱ + ط۲ ج۱ ...... (۸)

پھر ا۱، ب۱، ج۱ کو تین مساواتوں (۴)، (۶)، اور (۸) سے معلوم کرو -

# حل طلب مثالیں -

(۱) ما۲ + ما = قم لا

(۲) ما$_{۲}$ + ۴ ما = ۴ مس ۲ لا،

(۳) ما$_{۲}$ − ما = $\frac{۲}{۱ + قو^{لا}}$

(۴) لا$^{۲}$ ما$_{۲}$ + لا ما$_{۱}$ − ما = لا$^{۲}$ قو$^{لا}$، اگر متمم تفاعل ا لا + ب لا$^{-۱}$ دیا گیا ہو۔

(۵) ما$_{۳}$ − ۶ ما$_{۲}$ + ۱۱ ما$_{۱}$ − ۶ ما = قو$^{۲لا}$

**۸۱ — خطی مساواتوں کو حل کرنے کے مختلف طریقوں کا مقابلہ۔** اگر دوسرے رتبہ کی ایک خطی مساوات حل کرنے کے لیے دی گئی ہو اور کسی خاص طریقہ کا اظہار نہ کیا گیا ہو تو بالعموم بہترین راہ عمل یہ ہے کہ متمم تفاعل سے متعلق ایک خاص تکملہ معلوم کرنے کی کوشش کی جائے اور پھر دفعہ ۷۶ کے مطابق عمل کیا جائے۔ یہ طریقہ ن ویں درجہ کی ایک خطی مساوات کو (ن-۱) ویں درجہ کی خطی مساوات میں تحویل کرنے کے لیے استعمال کیا جا سکتا ہے۔

عامل کو اجزائے ضربی میں تحلیل کرنے کے طریقہ سے چند صورتوں میں اچھا حل حاصل ہوتا ہے لیکن یہ صورتیں ایسی ہیں کہ ان میں مثالیں خاص طور پر اس مقصد کے لیے تیار کی جاتی ہیں۔ عام طور پر عامل کو اجزائے ضربی میں تحلیل نہیں کیا جا سکتا۔ (۹۱)

مبدلوں کے تغیر کا طریقہ عملی حیثیت سے دفعہ ۷۶ کے طریقہ کے مقابلہ میں ادنیٰ ہے کیونکہ اس میں متمم تفاعل کو پوری طرح معلوم کرنے کی ضرورت ہوتی ہے نہ کہ صرف اس کے ایک حصہ کو۔ اسکے علاوہ اگر اس کو تیسرے یا اس سے اعلیٰ رتبہ کی مساواتوں میں استعمال کیا جائے تو ا، ب، ج، وغیرہ کے لیے ہمزاد مساواتوں کے

حل کرنے میں اور تکملوں کی تکمیل میں بڑی محنت صرف ہوتی ہے۔

اب ہم دوسرے رتبہ کی معمولی تفرقی مساوات کے بقیہ ابتدائی پر غور کریں گے۔ دوسرے رتبہ کی ایسی مساوات کے کامل ابتدائی میں دو اختیاری مستقل شریک ہوتے ہیں۔ اس کے بقیہ ابتدائی کو جس میں ایک اختیاری مستقل شامل ہو حاصل کرنے کے لیے صرف اس امر کی ضرورت ہے کہ ایک مستقل کو لامتناہی ہو جانے دیا جائے۔ مثلاً تفرقی مساوات

$$\text{ما}\,\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{2}} + \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^{2} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$$

سے کامل ابتدائی

$$\text{لا} = \text{ا} + \text{ما} + \text{ب لوک}\,(\text{ما} - \text{ب})$$

حاصل ہوتا ہے اور $\frac{1}{\text{ب}} = +\infty$ سے بقیہ ابتدائی ما = ب ملتا ہے جو ب کی ہر قیمت کیلیے اُس تحت قبیل (Sub-family) کے ایک مشترک متقارب کو تعبیر کرتا ہے جس کے لیے ب کی یہ قیمت مستقل ہوتی ہے اور ا بدلتا ہے۔

بعض اوقات ہم دونوں مستقلوں کو لامتناہی ہو جانے دیتے ہیں جبکہ ان میں ایک خاص ربط موجود ہو۔ مثلاً تفرقی مساوات

$$٨\,\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{2}} + ٩\left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^{4} = 0$$

سے کامل ابتدائی $(\text{ما} + \text{ب})^{3} = (\text{لا} + \text{ا})^{2}$ حاصل ہوتا ہے جو نیم کعبی مکافیوں کے ایک دوہرے لامتناہی جُٹ کو جن کے قرنوں پر کے مماس محور ما کے متوازی ہیں تعبیر کرتا ہے۔ اگر ہم ب کی بجائے $(\text{ا}^{\frac{2}{3}} - \text{ک})$ رکھیں تو

$$(\text{ما} - \text{ک})^{3} + ٣\,\text{ا}^{\frac{2}{3}}(\text{ما} - \text{ک})^{2} + ٣\,\text{ا}^{\frac{4}{3}}(\text{ما} - \text{ک}) = \text{لا}^{2} + ٢\,\text{لا}\,\text{ا}$$

حاصل ہوتا ہے ۔ $\text{ا}^{\frac{\text{ن}}{\text{م}}}$ سے تقسیم کرنے اور پھر ا کو لامتناہی بنانے سے ما = ک

حاصل ہوتا ہے ۔ ک کی ہر قیمت کے لیے وہ نیم کعبی مکافیوں کے ایک تحت قبیل کا قرن طریق ہے لیکن یہ قرن صرف اتفاقاً ہی طریق میں آ گئے ہیں ۔ یہ طریق ایک انتہائی شکل کے طور پر پیدا ہوتا ہے جس کی طرف ایک خاص تحت قبیل کے (وہ جنکے راس $(-\text{ا}^{\prime}، \text{ا}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}}+\text{ک})$ ہیں) بہت دُور کے ارکان اپنے اُن حصوں کی جانب مائل ہوتے ہیں جو لامتناہی سے دُور ہیں ۔ یہ طریق نہ تو لشمی لفاف (جو دوسرے رتبہ کی تفرقی مساوات کے نادر حل کی ہندسی تعبیر ہے) ہے نہ مشترک متقارب (اِس اصطلاح کے معمولی مفہوم میں) ۔

اسی طرح اگر م اور ن کوئی دو مثبت صحیح عدد ہوں جو ایک دوسرے کے لحاظ سے مفرد ہوں اور ن > م تو تفرقی مساوات

$$\text{م}^{\text{ن}}\left(\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فر لا}^{2}}\right)^{\text{ن}-\text{م}}-\text{ن}^{\text{ن}}(\text{م}-\text{ن})^{\text{ن}-\text{م}}\left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^{2\text{ن}-\text{م}}=\cdot$$

کا کامل ابتدائی

$$(\text{ما}+\text{ب})^{\text{ن}}=(\text{لا}+\text{ا})^{\text{م}}$$

ہے اور بقیہ ابتدائی ما = ک ہے جو ب کی بجائے $(\text{ا}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}}-\text{ک})$ رکھنے، $\text{ا}^{\frac{\text{م ن}-\text{م}}{\text{ن}}}$ سے تقسیم کرنے اور ا کو لامتناہی بنانے سے حاصل ہوتا ہے ۔ اِس کی ہندسی تعبیر حسب سابق ہے، صرف یہ فرق ہے کہ ما = ک پر واقع شدہ راسوں کا قرن ہونا ضروری نہیں ہے ۔ وہ انعطاف کے نقطے یا تموج (undulation) کے نقطے یا معمولی نقطے (ن = ۲ م = ۱ کے لیے) بھی ہو سکتے ہیں ۔ تموج کی صورت میں ممکن ہے یہ فرض کر لیا جائے کہ طریق ایک لشمی لفاف ہے لیکن یقیناً ایسا نہیں ہے کیونکہ طریق منحنیوں کو مس کرنے کی بجائے اُن کو علی القوائم قطع کرتا ہے ۔

---

# ساتویں باب پر متفرق مثالیں

(۱) $\text{ما}\,\text{ما}_{۲} - \text{ما}_{۱}^{۲} + \text{ما}_{۱} = ۰$ (۲) $\text{لا}\,\text{ما}_{۲} + \text{لا}\,\text{ما}_{۱}^{۲} - \text{ما}_{۱} = ۰$

(۳) $\text{ما}_{\text{ن}}^{۲} = ۴\,\text{ما}_{\text{ن}-۱}$ (۴) $\text{ما}_{\text{ن}} + \text{ما}_{\text{ن}-۲} = ۸\,\text{جم}\,۳\,\text{لا}$

(۵) $(\text{لا}^{۲}\,\text{لوک}\,\text{لا} - \text{لا}^{۲})\,\text{ما}_{۲} - \text{لا}\,\text{ما}_{۱} + \text{ما} = ۰$

(۶) $(\text{لا}^{۲} + ۲\,\text{لا} - ۱)\,\text{ما}_{۲} - (۳\,\text{لا}^{۲} + ۸\,\text{لا} - ۱)\,\text{ما}_{۱} + (۲\,\text{لا}^{۲} + ۶\,\text{لا})\,\text{ما} = ۰$

(۷) تصدیق کرو کہ جم ن لا اور جب ن لا، مساوات

$$\text{ما}_{۲} + \text{ن}^{۲}\,\text{ما} = \text{ف}(\text{لا})$$

کے متکمل اجزائے ضربی ہیں۔ اس لیے

$$\text{ما}_{۲} + \text{ن}^{۲}\,\text{ما} = \text{قط}\,\text{ن}\,\text{لا}$$

کے پہلے دو تکملے معلوم کرو اور $\text{ما}_{۱}$ کے اسقاط سے کامل ابتدائی کو اخذ کرو۔

(۸) ثابت کرو کہ خطی مساوات

$$\text{ا}\,\text{ما} + \text{ب}\,\text{ما}_{۱} + \text{ج}\,\text{ما}_{۲} + \dots + \text{س}\,\text{ما}_{\text{ن}} = \text{ت}$$

جس میں ا، ب، ج، ...، س، ت تمام لا کے تفاعل ہیں ٹھیک ہے یعنے وہ نچلے رتبہ کی مساوات سے تفرق کے ذریعہ فوراً اخذ کیجا سکتی ہے اگر ا، ب، ج، ... کے متواتر تفرقی سررشتہ

$$\text{ا} - \text{ب}_{۱} + \text{ج}_{۲} - \dots + (-۱)^{\text{ن}}\,\text{س}_{\text{ن}} = ۰$$

کو پورا کریں۔

[ نوٹ - متواتر تکمل بالحصص سے

$$\int س\, ما_ن\, فرلا = س_\cdot ما_{ن-۱} - س_۱ ما_{ن-۲} + س_۲ ما_{ن-۳} + \cdots$$

$$\cdots + (-۱)^{ن-۱} س_{ن-۱}\, ما + \int (-۱)^ن س_ن\, ما\, فرلا]$$

تصدیق کرو کہ یہ شرط حسب ذیل مساوات سے پوری ہوتی ہے، اس لیے اس مساوات کو حل کرو:

$$(۲ و^۲ + ۳ لا)\, ما_۲ + (۶ لا + ۳)\, ما_۱ + ۲\, ما = (لا + ۱)\, و^{لا}$$

(۹) تصدیق کرو کہ حسب ذیل غیر خطی مساواتیں ٹھیک ہیں اور نیز ان کو حل کرو:

$$(۱)\quad ما\, ما_۲ + ما_۱^۲ = ۰$$

$$(۲)\quad لا\, ما\, ما_۲ + لا\, ما_۱^۲ + ما\, ما_۱ = ۰$$

(۱۰) ثابت کرو کہ اندراج $ما = و\, و^{-\frac{۱}{۲}\int ف\, فرلا}$ سے مساوات

$$ما_۲ + ف\, ما_۱ + ق\, ما = ر$$

طبعی (Normal) شکل $و_۲ + ع\, و = س$

میں مستحیل ہوتی ہے جہاں ف، ق، ر سب لا کے تفاعل ہیں اور

$$ع = ق - \frac{۱}{۲} ف_۱ - \frac{۱}{۴} ف^۲ \qquad (۹۲)$$

اور $\quad س = ر\, و^{\frac{۱}{۲}\int ف\, فرلا}$

حسب ذیل مساوات کو طبعی شکل میں رکھو اور حل کرو:

$$ما_۲ - ۴ لا\, ما_۱ + (۴ لا^۲ - ۱)\, ما = - ۳ و^{لا^۲} جب ۲ لا$$

(۱۱) ثابت کرو کہ اگر دو مساواتیں

$$ما_۲ + ف ما_۱ + ق ما = ۰$$

اور $ی_۲ + ف ی_۱ + ق ی = ۰$

ایک ہی طبعی شکل میں تحویل ہوں تو وہ رشتہ

$$ما\ و^{\frac{۱}{۲}\int ف\ فرلا} = ی\ و^{\frac{۱}{۲}\int ف\ فرلا}$$

سے ایک دوسرے میں مستحیل کی جا سکتی ہیں یعنے معادل ہونے کی شرط یہ ہے کہ غیر متغیرہ (Invariant) ع وہی ہو -

(۱۲) ثابت کرو کہ مساواتوں

$$لا^۲ ما_۲ + ۲(لا^۳ - لا) ما_۱ + (۱ - ۲ لا^۲) ما = ۰$$

اور $لا^۲ ی_۲ + ۲(لا^۳ + لا) ی_۱ - (۱ - ۲ لا^۲) ی = ۰$

کا غیر متغیرہ وہی ہے - وہ رشتہ معلوم کرو جس سے یہ ایک دوسرے میں مستحیل ہو سکیں - استحالہ کو عمل میں لا کر تصدیق کرو -

(۱۳) اگر $و_۲ + ع و = ۰$ ، .......... (۱)

کے کوئی دو حل ۶ اور س ۶ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{س_۲}{س_۱} = -۲ \frac{۶_۱}{۶} ، .......... (۲)$$

اور اس لیے یہ کہ $\frac{س_۳}{س_۱} - \frac{۳}{۲}\left(\frac{س_۲}{س_۱}\right)^۲ = ۲ ع$ ، ..... (۳)

(۲) سے ثابت کرو کہ اگر س ، (۲) کا کوئی حل ہو تو $س_۱^{-\frac{۱}{۲}}$ اور $س\ س_۱^{-\frac{۱}{۲}}$

(۱) کے حل ہیں -

[(۳) کے دائیں جانب س کے تفرقی سروں کا جو تفاعل ہے اُس کو شوارتسین (Schwarzian) مشتق کہتے ہیں کیونکہ اس کو برلن کے

ایچ۔ اے شوارتس نے دریافت کیا تھا اور اس کو اختصاراً {س، لا} سے تعبیر کرتے ہیں۔ وہ (Hypergeometric) فوائد ہندسی سلسلوں میں اہمیت رکھتا ہے۔

(۱۴) مساوات $لا^2 ما_2 + (لا^2 + ۲لا) ما_1 + (لا + ۲) ما = ۰$

کے غیر متغیرہ ع کو محسوب کرو۔
دو حلوں لا و لا اور لا کے خارج قسمت کو س لیکر تصدیق کرو کہ

$$\{س، لا\} = ۲ ع$$

اور یہ کہ $س_2^{-\frac{1}{2}}$ اور $س س_1^{-\frac{1}{2}}$ ابتدائی مساوات کی طبعی شکل کے حل ہیں۔

(۱۵) اگر $ما_2 + ف ما_1 + ق ما = ۰$

کے دو حل ع اور و ہوں تو ثابت کرو کہ

$$ع و_2 - و ع_2 + ف (ع و_1 - و ع_1) = ۰$$

اور اس سے ثابت کرو کہ $ع و_1 - و ع_1 = ا قو^{-\int ف \, ءلا}$

اِس کی تصدیق پچھلی مثال کی آخری مساوات کے لیے کرو۔

(۱۶) ثابت کرو کہ $ما ما_1 =$ مستقل، اُس مساوات کا پہلا تکملہ ہے جو (۹۳)

$$ما_2 + \frac{1}{ما} ما_1^2 + ما = ۰$$

کی آخری رقم کو ترک کرنے سے بنتی ہے۔
$ما ما_1 = ج$ رکھ کر جہاں ج اب لا کا ایک تفاعل ہے (یعنی مبدل ج کو متغیر کرنے سے) ثابت کرو کہ اگر ما پوری مساوات کا حل ہو تو

$$ج_1 = - ما^2$$

اور اس لیے $ج^2 =$ مستقل $- \frac{1}{2} ما^4$

اور بالآخر $ما^2 = ا$ جب $(لا \sqrt{2} + ب)$

[ یہ طریقہ شکل

$$\text{ما}_{۲} + \text{ما}_{۱}^{۲}\,\text{ف}(\text{ما}) + \text{فا}(\text{ما}) = ۰$$

کی کسی مساوات پر اطلاق پذیر ہے ]

(۱۷) متبوع متغیر کو تبدیل کر کے حسب ذیل مساواتوں کو حل کرو:

$$(۱)\quad \text{لا}\,\frac{\text{فر}^{۲}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}} - \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} - ۴\,\text{لا}^{۳}\,\text{ما} = ۸\,\text{لا}^{۳}\,\text{جب لا}^{۲}$$

$$(۲)\quad (۱+\text{لا}^{۲})^{۲}\,\frac{\text{فر}^{۲}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}} + ۲\,\text{لا}(۱+\text{لا}^{۲})\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + ۴\,\text{ما} = ۰$$

(۱۸) تفرقی مساوات

$$\frac{\text{فر}^{۲}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}}\,\text{جم لا} + \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\,\text{جب لا} - ۲\,\text{ما}\,\text{جم}^{۳}\,\text{لا} = ۲\,\text{جم}^{۵}\,\text{لا}$$

کو ایسی مساوات میں مستحیل کرو جس میں ی متبوع متغیر ہو جہاں

$$\text{ی} = \text{جب لا}$$ [لندن]

اور مساوات کو حل کرو۔

(۱۹) اگر متبوع متغیر کو لا سے ی میں تبدیل کیا جائے اور ی مساوات

$$\frac{\text{فر}^{۲}\,\text{ی}}{\text{فر لا}^{۲}} + \text{ف}\,\frac{\text{فر ی}}{\text{فر لا}} = ۰$$

کو پورا کرے تو مساوات

$$\frac{\text{فر}^{۲}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}} + \text{ف}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{ق ما} = \text{ر}$$

مساوات

$$\frac{\text{فر}^{۲}\,\text{ما}}{\text{فر ی}^{۲}} + \text{س ما} = \text{ت}$$

میں مستحیل ہو گی۔ پس مساوات

$$\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}^{2}} + \left(1 - \frac{1}{\text{لا}}\right)\frac{\text{فر}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}} + 4\,\text{لا}^{2}\,\text{ما}\,\text{و}^{-2\text{لا}}$$

$$= 4\left(\text{لا}^{2} + \text{لا}^{3}\right)\text{و}^{-3\text{لا}}$$

کو حل کرو۔

---

(۹۴)

# آٹھواں باب

## تفرقی مساواتوں کے حلوں کے عددی تقرب

**۸۲** — طالب علم کو یہ معلوم ہو چکا ہو گا کہ وہ طریقے جو پچھلے بابوں میں حلوں کو محدود شکل میں حاصل کرنے کے لیے بیان کئے گئے ہیں صرف خاص نمونوں کی تفرقی مساواتوں پر اطلاق پذیر ہیں۔ اگر کوئی مساوات ان میں سے کسی خاص نمونہ سے متعلق نہ ہو تو ہمیں تقریبی طریقے استعمال کرنا ہو گا۔ ڈاکٹر براڈسکی کے ترسیمی طریقہ سے جس کو پہلے باب میں بیان کیا گیا ہے حل کی نوعیت کا ایک اچھا اندازہ حاصل ہوتا ہے لیکن عددی قیمتوں کے لیے اس پر بھروسہ نہیں کیا جا سکتا۔

اس باب میں ہم پہلے پکرڈ (Picard) [1] کا وہ طریقہ بیان کریں گے جس سے متواتر جبری تقرب حاصل ہوتے ہیں۔ ان میں اعداد رکھنے سے بالعموم عمدہ عددی نتیجے حاصل ہوں گے۔ مگر بدقسمتی سے یہ طریقہ مساواتوں کی صرف ایک محدود جماعت پر جن میں متواتر تکملوں کی تکمیل آسانی سے ہو سکتی ہے استعمال

---

[1] ای۔ پکرڈ فروفیسر جامعہ پیرس اس زمانہ کے بہت ممتاز اور مشہور ریاضی داں ہیں۔ تفاعلوں کے نظریہ میں ان کی تحقیقات بہت مشہور ہے اور ان کی کتاب (Traite d'analyse) نصاب کی ایک معیاری کتاب ہے۔

کیا جا سکتا ہے۔

دوسرا طریقہ جو کلاً عددی ہے اور اس کا استعمال بھی بہت زیادہ عام ہے رُنجے (Runge)[1] سے منسوب ہے۔ اگر کافی احتیاط ملحوظ رکھی جائے تو اس سے بہت سی صورتوں میں اچھے نتیجے حاصل ہوتے ہیں اگرچہ بعض اوقات عمل حساب بہت طول طویل ہو جاتا ہے۔

رُنجے کے طریقہ کو کچھ تغیرات کے ساتھ ہیون، کوٹا اور اس کتاب کے مصنف نے بیان کیا ہے۔

## ۸۳۔ متواتر تقربوں کو تکمل کرنے کا پیکرڈ کا طریقہ۔

تفرقی مساوات

$$\frac{فر ما}{فر لا} = ف(لا، ما)$$

کو جہاں ما = ب جبکہ لا = ا، (۹۵)

$$ما = ب + \int_{ا}^{لا} ف(لا، ما)\, فرلا$$

لکھا جا سکتا ہے۔

پہلے تقرب کے لیے ہم ف (لا، ما) میں ما کی بجائے ب رکھتے ہیں، دوسرے تقرب کے لیے ما کی بجائے پہلا تقرب، تیسرے تقرب کے لیے ما کی بجائے دوسرا تقرب اور علیٰ ہذا۔

مثال (۱) $\frac{فر ما}{فر لا} = لا + ما^{۲}$، جہاں ما = ۰ جبکہ لا = ۰

یہاں $ما = \int_{۰}^{لا} (لا + ما^{۲})\, فرلا$

---

[1] سی۔ رُنجے پروفیسر جامعہ گٹنجن (Gottingen) ترسیمی طریقوں کے لیے مستند مانے جاتے ہیں۔

**پہلا تقرب:** رکھو $\text{لا} + \text{ما}^2$ میں $\text{ما} = 0$ تو

$$\text{ما} = \int_0^{\text{لا}} \text{لا}\ \text{فرلا} = \frac{1}{2}\text{لا}^2$$

**دوسرا تقرب:** رکھو $\text{لا} + \text{ما}^2$ میں $\text{ما} = \frac{1}{2}\text{لا}^2$ تو

$$\text{ما} = \int_0^{\text{لا}} \left(\text{لا} + \frac{1}{4}\text{لا}^4\right)\text{فرلا} = \frac{1}{2}\text{لا}^2 + \frac{1}{20}\text{لا}^5$$

**تیسرا تقرب:** رکھو $\text{لا} + \text{ما}^2$ میں $\text{ما} = \frac{1}{2}\text{لا}^2 + \frac{1}{20}\text{لا}^5$ تو

$$\text{ما} = \int_0^{\text{لا}} \left(\text{لا} + \frac{1}{4}\text{لا}^4 + \frac{1}{20}\text{لا}^7 + \frac{1}{400}\text{لا}^{10}\right)\text{فرلا}$$

$$= \frac{1}{2}\text{لا}^2 + \frac{1}{20}\text{لا}^5 + \frac{1}{160}\text{لا}^8 + \frac{1}{4400}\text{لا}^{11}$$

و علیٰ ہذا۔

مثال (۲)

$$\begin{cases} \dfrac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ی} \\[2ex] \dfrac{\text{فری}}{\text{فرلا}} = \text{لا}^3(\text{ما} + \text{ی}) \end{cases}$$

جہاں $\text{ما} = 1$ اور $\text{ی} = \frac{1}{2}$ جبکہ $\text{لا} = 0$ ۔

یہاں $\text{ما} = 1 + \int_0^{\text{لا}} \text{ی}\ \text{فرلا}$ اور $\text{ی} = \frac{1}{2} + \int_0^{\text{لا}} \text{لا}^3(\text{ما} + \text{ی})\ \text{فرلا}$

**پہلا تقرب:**

$$\text{ما} = 1 + \int_0^{\text{لا}} \frac{1}{2}\ \text{فرلا} = 1 + \frac{1}{2}\text{لا}$$

$$\text{ی} = \tfrac{۱}{۲} + \int_{۰}^{\text{لا}} \text{لا}^{۳} (۱ + \tfrac{۱}{۲})\, \text{فرلا} = \tfrac{۱}{۲} + \tfrac{۳}{۸}\, \text{لا}^{۴}$$

**دوسرا تقرب:**

$$\text{ما} = ۱ + \int_{۰}^{\text{لا}} (\tfrac{۱}{۲} + \tfrac{۳}{۸}\, \text{لا}^{۴})\, \text{فرلا} = ۱ + \tfrac{۱}{۲}\, \text{لا} + \tfrac{۳}{۴۰}\, \text{لا}^{۵}،$$

$$\text{ی} = \tfrac{۱}{۲} + \int_{۰}^{\text{لا}} \text{لا}^{۳} (\tfrac{۳}{۲} + \tfrac{۱}{۲}\, \text{لا} + \tfrac{۳}{۸}\, \text{لا}^{۴})\, \text{فرلا}$$

$$= \tfrac{۱}{۲} + \tfrac{۳}{۸}\, \text{لا}^{۴} + \tfrac{۱}{۱۰}\, \text{لا}^{۵} + \tfrac{۳}{۶۴}\, \text{لا}^{۸}$$

**تیسرا تقرب:**

$$\text{ما} = ۱ + \int_{۰}^{\text{لا}} (\tfrac{۱}{۲} + \tfrac{۳}{۸}\, \text{لا}^{۴} + \tfrac{۱}{۱۰}\, \text{لا}^{۵} + \tfrac{۳}{۶۴}\, \text{لا}^{۸})\, \text{فرلا}$$

$$= ۱ + \tfrac{۱}{۲}\, \text{لا} + \tfrac{۳}{۴۰}\, \text{لا}^{۵} + \tfrac{۱}{۶۰}\, \text{لا}^{۶} + \tfrac{۱}{۱۹۲}\, \text{لا}^{۹}$$

$$\text{ی} = \tfrac{۱}{۲} + \int_{۰}^{\text{لا}} \text{لا}^{۳} (\tfrac{۳}{۲} + \tfrac{۱}{۲}\, \text{لا} + \tfrac{۳}{۸}\, \text{لا}^{۴} + \tfrac{۷}{۴۰}\, \text{لا}^{۵} + \tfrac{۳}{۶۴}\, \text{لا}^{۸})\, \text{فرلا}$$

$$= \tfrac{۱}{۲} + \tfrac{۳}{۸}\, \text{لا}^{۴} + \tfrac{۱}{۱۰}\, \text{لا}^{۵} + \tfrac{۳}{۶۴}\, \text{لا}^{۸} + \tfrac{۷}{۳۶۰}\, \text{لا}^{۹} + \tfrac{۱}{۲۵۶}\, \text{لا}^{۱۲}$$

اور علیٰ ہذا۔

(۹۶)

**مثال (۳)** $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}} = \text{لا}^{۳}\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{ما}\right)$، جہاں $\text{ما} = ۱$ اور $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{۱}{۲}$ جبکہ $\text{لا} = ۰$۔

$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ی}$ رکھنے سے یہ مساوات مثال (۲) کی مساوات میں تحویل ہوتی ہے۔

یہ قابل ذکر ہے کہ پکرڈ کے طریقہ سے تفرقی مساوات ایسی مساواتیں

تبدیل ہوتی ہے جس میں تکملے شامل ہوتے ہیں، اس لیے اس کو تکملی مساوات کہتے ہیں -

**حل طلب مثالیں** - حسب ذیل صورتوں میں تیسرا تقرب معلوم کرو - نیز مثالوں (۱) اور (۲) میں ٹھیک حل معمولی طریقوں سے معلوم کرو -

(۱) فر ما / فر لا = ۲ ما − لا^۲ − ۲ جہاں ما = ۲ جبکہ لا = ۰

(۲) فر ما / فر لا = ۲ − ما / لا جہاں ما = ۲ جبکہ لا = ۱

(۳) فر ما / فر لا = ۲ لا + ی
فر ی / فر لا = ۳ لا ما + لا^۲ ی
} جہاں ما = ۲، ی = ۰ جبکہ لا = ۰

(۴) فر ما / فر لا = ی
فر ی / فر لا = لا^۲ ی + لا^۴ ما
} جہاں ما = ۵ اور ی = ۱ جبکہ لا = ۰

(۵) فر^۲ ما / فر لا^۲ = لا^۲ فر ما / فر لا + لا^۴ ما جہاں ما = ۵ اور فر ما / فر لا = ۱ جبکہ لا = ۰

## ۸۴ - ان تقربوں سے عددی قیمتوں کو معلوم کرنا -

فرض کرو کہ پچھلے دفعہ کی مثال (۱) میں ہم ما کی قیمت، اعشاریہ کے سات صحیح مقاموں تک، معلوم کرنا چاہتے ہیں جبکہ لا = ۰٫۳

لا = ۰٫۳ درج کرنے پر پہلے تقرب سے ½ (۰٫۳)^۲ = ۰٫۰۴۵

حاصل ہوگا۔

دوسرے تقرب کے لیے ب $\frac{1}{20}(0.13)^5 = 0.0001215$ جمع کرنا ہوگا۔

تیسرے تقرب کے لیے ب $\frac{1}{160}(0.13)^8 + \frac{1}{4400}(0.13)^{11} = 0.0000041$ جمع کرنا ہوگا۔

(۹۷) ہم دیکھتے ہیں کہ یہ متواتر تقرب بڑی سرعت سے گھٹ رہے ہیں، اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ چوتھے تقرب میں پہلے سات مقاموں تک کوئی اثر نہیں پڑے گا، اس لیے مطلوبہ قیمت ۰٫۰۴۵۱۲۱۹ ہے۔

بلاشبہ لا کی بڑی قیمتوں کے لیے تین سے زیادہ تقرب لینے ہوں گے تاکہ نتیجہ مطلوبہ درجہ تک صحیح حاصل ہو سکے۔

دسویں باب میں ہم ثابت کریں گے کہ حاصل شدہ تقرب بعض شرطوں کے تحت ایک انتہا کی جانب مائل ہوتے ہیں اور اس انتہا سے حل حاصل ہوتا ہے۔ اس کو مسئلہ موجودگی کہتے ہیں۔

## حل طلب مثال۔

(۱) ثابت کرو کہ دفعہ ۸۳ مثال (۲) میں لا = ۰٫۵ سے ما = ۱٫۱۲۵۲... اور ی = ۰٫۵۲۶.... حاصل ہوتے ہیں اور لا = ۰٫۲ سے ما = ۱٫۱۰۲۵... اور ی = ۰٫۵۰۰۶۳۲.... حاصل ہوتے ہیں۔

## ۸۵ — عددی تقرب راست تفرقی مساوات سے۔

متواتر تقربوں کو تکمیل کرنے کا طریقہ ناکام ہوتا ہے اگر اعمال تکمل ناقابل استعمال ہوں، یہ اکثر ہوتا ہے۔ لیکن دوسرے طریقے ہیں جو ہمیشہ استعمال کیے جا سکتے ہیں۔ اس مسئلہ پر ہندسی طور پر غور کرو۔ تفرقی مساوات

$$\frac{فر\ ما}{فر\ لا} = ف\ (لا،\ ما)$$

سے منحنیوں ("ممیز") کے ایک قبیل کی تعیین ہوتی ہے جو ایک دوسرے کو قطع نہیں کرتے اور ان میں سے

شکل (۲۳)

ایک منحنی مستوی کے ہر نقطہ میں سے گذرتا ہے[۱]۔ اگر ایک نقطہ ف (ا، ب) دیا گیا ہو تو ہم جانتے ہیں کہ نقطہ ف میں سے گذرنے والے ممیز کا ڈھال ف (ا، ب) ہے۔ ہم چاہتے ہیں کہ اسی ممیز پر کسی دوسرے نقطہ کا معین ما = ن ق معلوم کریں جبکہ لا = و ن = ا + ھ (فرض کرو) دیا گیا ہو۔ پہلا تقرب اس طرح حاصل ہو سکتا ہے کہ ہم ممیز ف ق کو لینے کی بجائے مماس ف ر کو لیں یعنے　(۹۸)

ما = ن ل + ل ر = ن ل + ف ل مس ∠ ر ف ل

[۱] یہ اس مفروضہ پر مبنی ہے کہ مستوی کے ہر نقطہ پر ف (لا، ما) کی قیمت بالکل معین ہوتی ہے۔ لیکن اگر ف (لا، ما) ایک یا ایک سے زیادہ نقطوں پر غیر معین ہو جائے تو ان نقطوں کو مساوات کے نادر نقطے کہا جاتا ہے اور ایسے نقطوں پر ممیزوں کا سلوک خاص تحقیقات کا محتاج ہے۔ دیکھو دفعہ ۱۰ —

حاصل ہوگا۔

دوسرے تقرب کے لیے $\frac{1}{20}(0.3)^5 = 0.0001215$ جمع کرنا ہوگا۔

تیسرے تقرب کے لیے $\frac{1}{160}(0.3)^8 + \frac{1}{4400}(0.3)^{11} = 0.00000141$
جمع کرنا ہوگا۔

(۹۷) ہم دیکھتے ہیں کہ یہ متواتر تقرب بڑی سرعت سے گھٹ رہے ہیں، اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ چوتھے تقرب میں پہلے سات مقاموں تک کوئی اثر نہیں پڑے گا، اس لیے مطلوبہ قیمت ۰٫۴۵۱۲۱۹ ہے۔
بلاشبہ لا کی بڑی قیمتوں کے لیے تین سے زیادہ تقرب لینے ہوں گے تاکہ نتیجہ مطلوبہ درجہ تک صحیح حاصل ہو سکے۔
دسویں باب میں ہم ثابت کریں گے کہ حاصل شدہ تقرب بعض شرطوں کے تحت ایک انتہا کی جانب مائل ہوتے ہیں اور اس انتہا سے حل حاصل ہوتا ہے۔ اس کو مسئلہ موجودگی کہتے ہیں۔

## حل طلب مثال۔

(۱) ثابت کرو کہ دفعہ ۸۳ مثال (۲) میں لا = ۰٫۵ سے ا = ۱٫۲۵۲... اور ی = ۰٫۵۲۶... حاصل ہوتے ہیں اور لا = ۰٫۲ سے ا = ۱٫۱۰۲۵... اور ی = ۰٫۱۵۰۰۶۳۲... حاصل ہوتے ہیں۔

## ۸۵ — عددی تقرب راست تفرقی مساوات سے۔

متواتر تقربوں کو تکمیل کرنے کا طریقہ ناکام ہوتا ہے اگر اعمال تکمل ناقابل استعمال ہوں، یہ اکثر ہوتا ہے۔ لیکن دوسرے طریقے ہیں جو ہمیشہ استعمال کیے جا سکتے ہیں۔ اس مسئلہ پر ہندسی طور پر غور کرو۔
تفرقی مساوات

$$\frac{فر ما}{فر لا} = ف (لا، ما)$$

سے منحنیوں ("میزر") کے ایک قبیل کی تعیین ہوتی ہے جو ایک دوسرے کو قطع نہیں کرتے اور ان میں سے

شکل (۲۳)

ایک منحنی مستوی کے ہر نقطہ میں سے گذرتا ہے[1]۔ اگر ایک نقطہ ف (ا، ب) دیا گیا ہو تو ہم جانتے ہیں کہ نقطہ ف میں سے گذرنے والے میزر کا ڈھال ف (ا، ب) ہے۔ ہم چاہتے ہیں کہ اسی میزر پر کسی دوسرے نقطہ کا معین ما = ن ق معلوم کریں جبکہ لا = و ن = ا + ہ (فرض کرو) (۹۸) دیا گیا ہو۔ پہلا تقرب اس طرح حاصل ہو سکتا ہے کہ ہم میزر ف ق کو لینے کی بجائے مماس ف ر کو لیں یعنے

$$ما = ن ل + ل ر = ن ل + ف ل س ڈ ر ف ل$$

[1] یہ اس مفروضہ پر مبنی ہے کہ مستوی کے ہر نقطہ پر ف (لا، ما) کی قیمت بالکل معین ہوتی ہے۔ لیکن اگر ف (لا، ما) ایک یا ایک سے زیادہ نقطوں پر غیر معین ہو جائے تو ان نقطوں کو مساوات کے نادر نقطے کہا جاتا ہے اور ایسے نقطوں پر میزروں کا سلوک خاص تحقیقات کا محتاج ہے۔ دیکھو دفعہ ۱۰۔

= ب + ھ ف (ا، ب) = ب + ھ ف، (فرض کرو)

لیں۔

لیکن جب تک ھ فی الواقع بہت چھوٹا نہ ہو خطائے مماق نظر انداز نہیں کیا جا سکتی۔ اس سے زیادہ مناسب تقرب وتر ف ق کو اس مماس کے متوازی لینے سے حاصل ہوتا ہے جو ف ی کے وسطی نقطہ س میں سے گذرنیوالے مینر کا کھینچا گیا ہو۔

چونکہ س نقطہ (ا + ۱/۲ ھ، ب + ۱/۲ ھ ف) ہے اسلیے

ما = ن ل + ل ق = ن ل + ف ل س د ق ف ل

= ب + ھ ف (ا + ۱/۲ ھ، ب + ۱/۲ ھ ف)

اِس سادہ ضابطے سے بعض صورتوں میں اچھے نتیجے حاصل ہوتے ہیں جیسا کہ حسب ذیل مثالوں سے معلوم ہوگا۔

**مثال (۱)** فر ما / فر لا = لا + ما^۲، اگر ما = ۰ جبکہ لا = ۰ تو ما معلوم کرو جبکہ لا = ۰٫۳

یہاں ا = ب = ۰ اور ھ = ۰٫۳، ف (لا، ما) = لا + ما^۲

اِس لیے ف = ف (ا، ب) = ۰، ا + ۱/۲ ھ = ۰٫۱۵، ب + ۱/۲ ھ ف = ۰

اِس لیے ب + ھ ف (ا + ۱/۲ ھ، ب + ۱/۲ ھ ف) = ۰ + ۰٫۳ × ف (۰٫۱۵، ۰) = ۰٫۰۴۵

دفعہ ۸۴ میں حاصل شدہ قیمت ۰٫۰۴۵۱۲۱۹ تھی، اس لیے خطا ۰٫۰۰۰۱۲... یعنے تقریباً ۱/۴ فیصدی ہے۔

**مثال (۲)** فر ما / فر لا = ۲ − ما/لا، اگر ما = ۲ جبکہ لا = ۱ تو ما معلوم کرو جبکہ لا = ۱٫۲

یہاں ا = ۱، ب = ۲، ھ = ۰٫۲، ف = ۲ − ۲/۱ = ۰

اس لیے ب + ھ ف (۱، + ۱/۲ ھ، ب + ۱/۲ ھ ف) = ۲ + ۲، ۰ × ف (۱،۱، ۲)

= ۲ + ۲، ۰ (۲ − ۲/۱،۱) = .....۲،۰۳۶

یہ تفرقی مساوات آسانی سے تکمل کی جا سکتی ہے چنانچہ ما = لا + ۱/لا

حاصل ہوتا ہے اور اس لیے جب لا = ۱،۲ تو ما = .....۲،۰۳۳۔ پس

خطا ....۰۰۳، ۰ ہے جو ما کے اضافہ کے مقابلہ میں یعنی ۰۳۶، ۰ کے

مقابلہ میں قدرے بڑی ہے۔

**مثال (۳)** فرما/فرلا = ی = ف (لا، ما، ی)، فرض کرو۔

فری/فرلا = لا۲ (ما + ی) = گ (لا، ما، ی)، فرض کرو

اگر ما = ۱ اور ی = ۵، ۰ جبکہ لا = ۰ تو ما اور ی معلوم کرو جبکہ لا = ۵، ۰

یہاں ا = ۰، ب = ۱، ج (ی کی ابتدائی قیمت) = ۵، ۰، ھ = ۵، ۰

اس لیے ف = ف (۰، ۱، ۵، ۰) = ۵، ۰، گ = گ (۰، ۱، ۵، ۰) = ۰

اوپر کے طریقہ کو دو متغیروں کے لیے وسیع کیا جائے تو صریحاً

(۹۹)

ما = ب + ھ ف (ا + ۱/۲ ھ، ب + ۱/۲ ھ ف، ج + ۱/۲ ھ گ)

اور ی = ج + ھ گ (ا + ۱/۲ ھ، ب + ۱/۲ ھ ف، ج + ۱/۲ ھ گ)

اس لیے حاصل شدہ قیمتیں درج کرنے پر

ما = ۱ + ۵، ۰ × ف (۰،۲۵، ۱،۱۲۵، ۰،۵) = ۱،۲۵۰۰

اور ی = ۵، ۰ + ۵، ۰ × گ (۰،۲۵، ۱،۱۲۵، ۰،۵) = ۰،۵۱۲۷

صحیح قیمتیں حسب دفعہ ۸۴

ما = .....۱،۲۵۲۱ اور ی = ....۰،۵۵۲۶

ہیں۔ اس طرح ہمیں ما کے لیے تو بہت اچھا نتیجہ حاصل ہوا لیکن ی کیلئے

بہت ہی خراب

پس ہم دیکھتے ہیں کہ اس طریقہ میں نتیجہ کی صحت کا درجہ غیر متیقن رہتا ہے اور اس لیے اس طریقہ کی بہت کچھ قدر گھٹ جاتی ہے ۔ لیکن یہ صرف اُس طریقہ کی تمہید ہے جو بہت ہی عمدہ اور رُنجے ( Runge ) سے منسوب ہے ۔ اِس کو ہم آئندہ باب میں سمجھائیں گے ۔

## حل طلب مثالیں

(۱) $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = (\text{لا}^2 - \text{ما})^{\frac{1}{2}} - ۱$ ، اگر ما = ۴ جبکہ لا = ۲٫۳ تو قیمت ما = ۴٫۱۲۲ حاصل کرو جبکہ لا = ۲٫۷ ۔ [رُنجے کے طریقہ سے قیمت ۴٫۱۱۸ حاصل ہوگی]

(۲) $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{1}{10} \left\{ \text{ما}^{\frac{1}{2}} - 1 + \text{لوک}_{\text{و}} (\text{لا} + \text{ما}) \right\}$ ، اگر ما = ۲ جبکہ لا = ۰ ا تو قیمت ما = ۲٫۱۹۴ حاصل کرو جبکہ لا = ۱ ۔
[رُنجے کے طریقہ سے قیمت ۲٫۱۹۲ حاصل ہوگی]

(۳) $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = ۲\text{لا} - \frac{\text{ما}}{\text{لا}}$ ، اگر ما = ۲ جبکہ لا = ۱ تو قیمت ما = ۲٫۰۷۶ حاصل کرو جبکہ لا = ۲٫۱ ۔ نیز ثابت کرو کہ $\text{ما} = \frac{۲}{۳}\text{لا}^2 + \frac{۴}{۳\text{لا}}$ ، اِس لیے جب، لا = ۲٫۱ تو ما = ......۲٫۰۷۱ ۔

**۸۶ ۔ رُنجے کا طریقہ** ۔ فرض کرو کہ ما کے تفاعل کو جس کی تعریف[1]

---

[1] وہ شرطیں جن کے تحت تفرقی مساوات اور ابتدائی شرط ایک تفاعل کی فی الواقع تعیین کرتے ہیں دسویں باب میں بیان کی گئی ہیں ۔ پچھلے دفعہ کی ترسیمی بحث میں یہ مان لیا گیا ہے کہ یہ شرطیں پوری ہوتی ہیں ۔

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ف (لا، ما)}،\ \text{ما} = \text{ب جبکہ لا} = \text{ا}$$

سے کی گئی ہے ما = فا (لا) سے تعبیر کیا گیا ہے۔

اگر اس کو ٹیلر کے مسئلہ سے پھیلایا جائے تو

$$\text{فا(ا+ھ)} = \text{فا(ا)} + \text{ھ فاَ(ا)} + \frac{\text{ھ}^2}{\lfloor 2}\text{فاً(ا)} + \frac{\text{ھ}^3}{\lfloor 3}\text{فاًّ(ا)} + \dots$$

اب $\text{فاَ(لا)} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ف (لا، ما)} = \text{ف}$، فرض کرو

اب ہم لا کے لحاظ سے کُل تفرقی سر لیں گے (یعنے یہ سمجھیں گے کہ لا کے تغیر کے ساتھ ما متغیر ہوتا ہے)۔ فرض کرو کہ ہم جزئی تفرقی سروں کو

$$\text{پ} = \frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}}،\ \text{ق} = \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}}،\ \text{ر} = \frac{\text{جف}^2\text{ف}}{\text{جف لا}^2}،$$

$$\text{س} = \frac{\text{جف}^2\text{ف}}{\text{جف لا جف ما}}،\ \text{ت} = \frac{\text{جف}^2\text{ف}}{\text{جف ما}^2}$$

سے تعبیر کرتے ہیں اور ان کی قیمتوں کو جبکہ لا = ا اور ما = ب، پ، ق، ر، .... سے بیان کرتے ہیں۔

$$\text{تب فاَ(لا)} = \frac{\text{فرف}}{\text{فرلا}} = \left(\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{فرما جف}}{\text{فرلا جف ما}}\right)\text{ف} = \text{پ} + \text{ف ق} \qquad (۱۰۰)$$

$$\text{اسی طرح فاً(لا)} = \left(\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}\right)(\text{پ} + \text{ف ق})$$

$$= \text{ر} + \text{پ ق} + \text{ف س} + \text{ف (س} + \text{ق}^2 + \text{ف ت)}$$

اس طرح

$$\text{فا(ا} + \text{ھ)} - \text{فا(ا)}$$

$$= \text{ھ ف} + \frac{1}{2}\text{ھ}^2(\text{پ} + \text{ف ق}) + \frac{1}{6}\text{ھ}^3(\text{ر} + ۲\text{ف س}$$

+ ف ۲ ت + پ ق + ف ق ۲) + ........ (۱)

پہلی رقم سے پہلا تقرب تغیر ہوتا ہے، یہ تقرب دفعہ ۸۵ میں زیر بحث آچکا تھا اور اس کو رد کر دیا گیا تھا۔

دفعہ ۸۵ کے دوسرے تقرب

ما - ب = ھ ف (۱ + ۱/۲ ھ، ب + ۱/۲ ھ ف) = ک۱، فرض کرو

کو پہلا کر اب (۱) کے ساتھ مقابلہ کیا جا سکتا ہے۔

ٹیلر کے مسئلہ (جو دو متنوع متغیروں کے لیے ہے) سے

$$ف (۱ + \frac{۱}{۲} ھ، ب + \frac{۱}{۲} ھ ف)$$

$$= ف + \frac{۱}{۲} ھ پ + \frac{۱}{۲} ھ ف ق + \frac{۱}{\lfloor ۲} (\frac{۱}{۴} ھ^۲ ر$$

$$+ \frac{۱}{۲} ھ^۲ ف س + \frac{۱}{۴} ھ^۲ ف^۲ ت) + ........$$

جس سے $ک_۱ = ھ ف + \frac{۱}{۲} ھ^۲ (پ + ف ق) + \frac{۱}{۸} ھ^۳ (ر + ۲ ف س$

$+ ف^۲ ت) + ........ (۲)$

(۱) اور (۲) کا مقابلہ کرنے سے ظاہر ہے کہ ک۱، ھ۳ کے سر میں ناقص ہے اس کے بعد کا عمل اُن معمولی طریقوں[۱] سے حاصل ہوتا ہے جو سادہ تفرقی مساوات

$$\frac{فر ما}{فر لا} = ف (لا)$$

کے عددی تکمل کے لیے دئے جاتے ہیں۔

**اِس صورت میں دوسرا تقریب منحرفی قاعدہ**

---

[۱] دیکھو گبن یا لیمب کی نصابی کتابیں اعشار پر۔

$$ا - ب = ھ ف (ا + \tfrac{1}{2} ھ)$$

میں تحویل ہوتا ہے۔

اس کے بعد کا تقرب بالعموم سمپسن کے قاعدے سے معلوم کیا جاتا ہے جس کو شکل

$$ا - ب = \tfrac{1}{6} ھ \{ف (ا) + ۴ ف (ا + \tfrac{1}{2} ھ) + ف (ا + ھ)\}$$

میں لکھا جا سکتا ہے۔

اگر ہم دو متغیروں والے متناظر ضابطے

$$\tfrac{1}{6} ھ \{ف ب + ۴ ف (ا + \tfrac{1}{2} ھ، ب + \tfrac{1}{2} ھ ف ب)$$

$$+ ف (ا + ھ، ب + ھ ف ب) \}$$

کو پھیلائیں تو آسانی سے

$$ھ ف ب + \tfrac{1}{2} ھ^2 (پ ب + ف ق ب) + \tfrac{1}{6} ھ^3 (ر ب + ۲ ف س ب$$

$$+ ف^2 ت ب) + \ldots\ldots \quad (۳)$$

حاصل ہوگا جو ک ۱ سے بہتر تقرب ہے لیکن اب بھی $ھ^3$ کا سر (ا) کے مطابق نہیں ہے۔

$ھ^3$ کی زائد رقمیں حاصل کرنے کے لیے رُنجے[1] نے

$$ھ ف (ا + ھ، ب + ھ ف ب)$$

کی بجائے $ک'' = ھ ف (ا + ھ، ب + ک''')$ جہاں $ک''' = ھ ف (ا \ldots$ (۱۰۱)

رکھا جہاں $ک'' = ھ ف (ا + ھ، ب + ھ ف ب)$

اس ترمیم شدہ ضابطہ کو اختصاراً $\tfrac{1}{6} \{ک' + ۴ ک ب + ک''\}$ لکھا جا سکتا ہے

[1] (Math. Ann. Vol. XLVI. pp. 167—178

جہاں ک' = ھ ف یا $\frac{۲}{۳}$ ک۱ + $\frac{۱}{۳}$ ک۲ = ک۱ + $\frac{۱}{۳}$ (ک۲ - ک۱) لکھا جا سکتا ہے جہاں ک۲ = $\frac{۱}{۲}$ (ک' + ک'') -

اب اس امر کی آسانی سے تصدیق ہو سکتی ہے کہ رنجے کے ضابطہ کا پھیلاؤ (۱) کے ساتھ وہاں تک مطابق ہے جہاں تک رقموں ھ، ھ۲، اور ھ۳ کا تعلق ہے -

بلا شبہ اس طریقہ سے خراب نتیجے حاصل ہوں گے اگر سلسلہ (۱) بہت سستی سے مستدق ہو -

اگر عدداً ف > ۱ تو مساوات کو شکل

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} = \frac{۱}{\text{ف (لا، ما)}} = \text{فا (لا، ما)}$$ فرض کرو

میں لکھا جاتا ہے اور اب فا عدداً < ۱ اور ہم ما کو متبوع غیر متغیر لیتے ہیں -

## ۸۷ - رنجے کے طریقہ سے مثالوں کو حل کرنے کا طریقہ -

اعمال حساب کو صاف طور پر ذہن میں رکھنے کے لیے ان کو کسی خاص ترتیب میں مرتب کرنا چاہیئے مثلاً ترتیب ذیل میں:

ترتیب وار محسوب کرو

ک' = ھ ف،

ک'' = ھ ف (۱ + ھ، ب + ک')،

ک''' = ھ ف (۱ + ھ، ب + ک'')،

ک۱ = ھ ف (۱ + $\frac{۱}{۲}$ ھ، ب + $\frac{۱}{۲}$ ک')،

ک۲ = $\frac{۱}{۲}$ (ک' + ک'')،

اور بالآخر ک = ک۱ + $\frac{۱}{۳}$ (ک۲ - ک۱)

چونکہ ک، خود مطلوبہ قیمت کا ایک تقرب ہے اس لیے یہ واضح ہے کہ اگر ک اور ک، کے درمیان فرق یعنے ⅓ (ک۲ ۔ ک۱)، ک اور ک۱ کے مقابلہ میں خفیف ہو تو ک کی خطاء کا خفیف تر ہونا ممکن ہے۔

**مثال (۱)** فرما / فرلا = لا + ما^۲، اگر ما = ۰ جبکہ لا = ۰ تو ما معلوم کرو جبکہ لا = ۰٫۳

یہاں ا = ۰، ب = ۰، ھ = ۰٫۳، ف (لا، ما) = لا + ما^۲، ن = ۰

اس لیے ک′ = ھ ف ب = ۰

ک″ = ھ ف (ا + ھ، ب + ک′) = ۰٫۳ × ف (۰٫۳، ۰)

= ۰٫۳ × ۰٫۳ = ۰٫۰۹۰۰

ک‴ = ھ ف (ا + ھ، ب + ک″) = ۰٫۳ × ف (۰٫۳، ۰٫۰۹)

= ۰٫۳ × (۰٫۳ + ۰٫۰۰۸۱) = ۰٫۰۹۲۴

ک۱ = ھ ف (ا + ½ ھ، ب + ½ ک′) = ۰٫۳ × ف (۰٫۱۵، ۰)

= ۰٫۰۴۵۰

ک۲ = ½ (ک′ + ک‴) = ½ × ۰٫۰۹۲۴

= ۰٫۰۴۶۲

اور ک = ک۱ + ⅓ (ک۲ ۔ ک۱) = ۰٫۰۴۵۰ + ۰٫۰۰۰۴

= ۰٫۰۴۵۴

چونکہ ک = ۰٫۰۴۵۴ اور ک۱ = ۰٫۰۴۵۰ کے درمیان فرق ان میں سے کسی کے مقابلہ میں خاصا کم ہے اس لیے ک کی خطاء کا اس فرق ۰٫۰۰۰۴ سے بھی کم ہونے کا بہت امکان ہے۔ اس کا یہ مطلب ہے کہ ہم قیمت کو اعشاریہ کے تین صحیح مقامات تک ۰٫۰۴۵ لے سکتے ہیں۔ ہم اس نتیجہ کی جانچ دفعہ ۸۴ کے محسلہ نتیجہ ۰٫۰۴۵۱۲۱۹ کے ساتھ (۱۰۲)

مقابلہ کر کے کر سکتے ہیں۔

**مثال (۲)** $\frac{\text{ف} \text{ما}}{\text{ف} \text{لا}} = \frac{\text{ما} - \text{لا}}{\text{ما} + \text{لا}}$ ، اگر ما = ۱ جبکہ لا = ۰ تو ما معلوم کرو جبکہ لا = ۱

یہ مثال رُنجے کے اصلی مقالہ سے لی گئی ہے۔ سعت کو تین حصوں ۰ تا ۲ء۰، ۲ء۰ تا ۵ء۰، ۵ء۰ تا ۱ میں تقسیم کرو۔ ہم نے اول چھوٹا اضافہ لیا ہے کیونکہ ف (لا، ما) ابتدا میں بڑے سے بڑا ہے۔

**پہلا عمل** : ا = ۰، ب = ۱، ھ = ۲ء۰، ف ب = ۱

ک َ = ھ ف ب
= ۲۰۰ء۰

ک ً = ھ ف (ا + ھ، ب + ک َ) = ۲ء۰ × ف (۲ء۰، ۲ء۱)
= ۱۶۳ء۰

ک ٌ = ھ ف (ا + ھ، ب + ک ً) = ۲ء۰ × ف (۲ء۰، ۱۶۳ء۱)
= ۱۶۰ء۰

ک$_1$ = ھ ف (ا + $\frac{1}{2}$ ھ، ب + $\frac{1}{2}$ ک َ) = ۲ء۰ × ف (۱ء۰، ۱ء۱)
= ۱۶۷ء۰

ک$_2$ = $\frac{1}{2}$ (ک َ + ک ٌ) = $\frac{1}{2}$ × ۳۶۰ء۰
= ۱۸۰ء۰

اور   ک = ک$_1$ + $\frac{1}{3}$ (ک$_2$ - ک$_1$) = ۱۶۷ء۰ + ۰۰۱ء۰ = ۱۶۸ء۰

جس سے   ما = ۱۶۸ء۱ جبکہ لا = ۲ء۰

**دوسرا عمل** : ا = ۲ء۰، ب = ۱۶۸ء۱، ھ = ۳ء۰،

ف ب = ف (۲ء۰، ۱۶۸ء۱) = ۷۰۸ء۰
حسب سابق عمل کرنے سے ک$_1$ = ۱۷۰ء۰، ک$_2$ = ۱۷۳ء۰ اور اس لئے
ک = ۱۷۱ء۰

جس سے　ما = ۱،۱۶۸ + ۰،۱۷۱ = ۱،۳۳۹ جبکہ لا = ۰،۵

## تیسرا عمل

: ا = ۰،۵ ، ب = ۱،۳۳۹ ، ھ = ۰،۵

معلوم ہوگا　$\text{ک}_1 = \text{ک}_2 = \text{ک} = ۰،۱۶۰$

جس سے　ما = ۱،۴۹۹ جبکہ لا = ۱

$\text{ک}$ اور $\text{ک}_1$ پر غور کرو تو معلوم ہوگا کہ پہلے اور دوسرے عمل میں خطا ۰،۰۱ سے بھی کم ہے اور تیسرے میں (اعشاریہ کے تین مقامات تک) ناقابل قدر یعنی بہ حیثیت مجموعی ۰،۰۰۲ سے بھی کم۔

واقعہ یہ ہے کہ ما کی قیمت ۱،۴۹۸ اور ۱،۴۹۹ کے درمیان ہے اور اس لیے خطا ۰،۰۱ سے کم ہے۔ ما کی یہ قیمت اس مساوات کے تکمل سے معلوم ہوئی ہے جس سے

$$\pi - ۲\,\text{مس}^{-1}\frac{\text{ما}}{\text{لا}} = \text{لوک}_{\text{و}}\left(\text{لا}^{2} + \text{ما}^{2}\right)$$

حاصل ہوتا ہے۔

## حل طلب مثالیں

حسب ذیل مثالوں کے عددی نتیجے حاصل کرو جن میں اعشاریہ کے اتنے مقامات لو جن کا صحیح ہونا ممکن ہو۔

(۱) $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{1}{10}\left\{\text{ما}^{\frac{1}{2}} - 1 + \text{لوک}_{\text{و}}(\text{لا} + \text{ما})\right\}$، اگر ما = ۲ جبکہ لا =۔ ا تو ما معلوم کرو جبکہ لا = ۱، ھ کو ۲ کے مساوی لو (کیونکہ ف بہت چھوٹا ہے)۔

(۲) پچھلے سوال میں قریب تر تقرب، عمل کو دو حصوں میں تقسیم کرکے حاصل کرو۔

(۳) $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \left(\text{لا}^{2} - \text{ما}\right)^{\frac{1}{2}} - 1$، اگر ما = ۴ جبکہ لا = ۲،۳ تو ما معلوم

کرو جبکہ لا = ۰٫۲ (ا) صرف ایک حصہ عمل سے، (ب) عمل کو دو حصوں میں تقسیم کر کے۔

(۴) ثابت کرو کہ اگر $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = ۲ - \frac{\text{ما}}{\text{لا}}$ اور ما = ۲ جبکہ لا = ۱ تو (۱۰۳)

$\text{ما} = \text{لا} + \frac{۱}{\text{لا}}$

پس رُنجے کے طریقہ سے حاصل شدہ نتیجے کی خطائیں، (ا) ۰٫۰۴ = ھ، (ب) ھ = ۰٫۰۲، (ج) ھ = ۰٫۰۱ لیکر (ہر صورت میں ایک حصہ عمل سے) معلوم کرو اور اِن خطاؤں کا مقابلہ اِن کی محسوبہ بالائی اِنتہاؤں کے ساتھ کرو۔

(۵) اگر پہلے رتبہ کی تفرقی مساوات کو رُنجے کے طریقہ سے حل کیا جائے اور نتیجہ میں ع (ھ) کی خطاء ہو تو ثابت کرو کہ

$$\underset{\text{ھ} \to ۰}{\text{نہا}} \frac{\text{ع}(\text{ھ})}{\text{ع}(\text{ن ھ})} = \frac{۱}{\text{ن}^{۴}}$$

پس ثابت کرو کہ عمل کو دو حصوں میں تقسیم کرنے سے جو خطاء حاصل ہوتی ہے وہ ایک حصہ عمل سے حاصل شدہ خطاء کا تقریباً $\frac{۱}{۸}$ ہے، یعنے عمل کے حصوں کو دُگنا کرنے سے اعشاریہ کے ایک زائد مقام تک صحیح نتیجہ (تقریباً) حاصل ہوتا ہے۔

## ۸۸ — ہمزاد مساواتوں پر توسیع* — اِس طریقہ کی توسیع

ہمزاد مساواتوں پر بہ آسانی عمل میں آسکتی ہے۔ ثبوت چونکہ دفعہ ۸۶ کے مشابہ ہے اور ذرا طویل ہے اِس لیے ہم صرف ایک مثال سے اِس کی توضیح کرتے ہیں۔ یہ مثال اور حل طلب مثالوں میں دی ہوئی مثالیں قدرے ترمیم کے ساتھ رُنجے کے مقالہ سے لی گئی ہیں۔

**مثال** — $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = ۲\text{ی} - \frac{۱}{\text{لا}} = \text{ف}(\text{لا، ما، ی})$، فرض کرو

* اِس باب کا باقی حصہ مطالعہ اول میں ترک کیا جاسکتا ہے۔

$\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{ما}}{(\text{۱} - \text{ما}^{\text{۲}})^{\frac{1}{2}}}$ = گ (لا، ما، ی)، فرض کرو

اگر ما = ۰٫۲۰۲۷ اور ی = ۱٫۰۲۰۲ جبکہ لا = ۰٫۲ تو ما اور ی معلوم کرو جبکہ لا = ۰٫۴

یہاں ا = ۰٫۲، ب = ۰٫۲۰۲۷، ج = ۱٫۰۲۰۲، ف ب = ف(۰٫۲، ۰٫۲۰۲۷، ۱٫۰۲۰۲) = ۱٫۱۰۲۷، گ ب = ۰٫۲۰۷۰، ھ = ۰٫۲

کʹ = ھ ف ب = ۰٫۲ × ۱٫۱۰۲۷ = ۰٫۲۰۵۴

لʹ = ھ گ ب = ۰٫۲ × ۰٫۲۰۷۰ = ۰٫۰۴۱۴

کʺ = ھ ف (ا + ھ، ب + کʹ، ج + لʹ)

= ۰٫۲ × ف (۰٫۴، ۰٫۴۰۸۱، ۱٫۰۶۱۶)

= ۰٫۲۲۰۶

لʺ = ھ گ (ا + ھ، ب + کʹ، ج + لʹ)

= ۰٫۲ × گ (۰٫۴، ۰٫۴۰۸۱، ۱٫۰۶۱۶)

= ۰٫۰۸۹۴

کʹʹʹ = ھ ف (ا + ھ، ب + کʺ، ج + لʺ)

= ۰٫۲ × ف (۰٫۴، ۰٫۴۲۳۳، ۱٫۱۰۹۶)

= ۰٫۲۳۲۲

لʹʹʹ = ھ گ (ا + ھ، ب + کʺ، ج + لʺ)

= ۰٫۲ × گ (۰٫۴، ۰٫۴۲۳۳، ۱٫۱۰۹۶)

= ۰٫۰۹۳۴

ک۱ = ھ ف (ا + ½ ھ، ب + ½ کʹ، ج + ½ لʹ)

= ۰٫۲ × ف (۰٫۳، ۰٫۳۰۵۴، ۱٫۰۴۰۹)

= ۰٫۲۱۲۸

ل۱ = ھ گ (ا + ½ ھ، ب + ½ کʹ، ج + ½ لʹ)

$= ۰٫۲ \times$ گ $(۰٫۲، ۰٫۳۰۵۴، ۱٫۰۴۰۹)$

$= ۰٫۰۶۴۱$

$ک_۴ = \frac{۱}{۲}(کَ + کً) = ۰٫۲۱۸۸$

$ل_۴ = \frac{۱}{۲}(لَ + لً) = ۰٫۰۶۷۴$

$ک = ک_۱ + \frac{۱}{۳}(ک_۲ - ک_۱) = ۰٫۲۱۲۸ + ۰٫۰۰۲۰ = ۰٫۲۱۴۸$

$ل = ل_۱ + \frac{۱}{۳}(ل_۲ - ل_۱) = ۰٫۰۶۴۱ + ۰٫۰۰۱۱ = ۰٫۰۶۵۲$

پس $ما = ۰٫۲۰۲۷ + ۰٫۲۱۴۸ = ۰٫۴۱۷۵$

اور $ی = ۱٫۰۲۰۲ + ۰٫۰۶۵۲ = ۱٫۰۸۵۴$

غالباً اعشاریہ کے تین مقاموں تک صحیح۔

## حل طلب مثالیں

(۱۰۴)

(۱) دفعہ ۸۸ کی مثال میں ثابت کرو کہ اگر $ما = ۰٫۴۱۷۵$ اور $ی = ۱٫۰۸۵۴$ جبکہ $لا = ۰٫۴$ تو $ما = ۰٫۶۶۱۴$ اور $ی = ۱٫۲۱۴۵$ (غالباً اعشاریہ کے تین مقاموں تک صحیح) جبکہ $لا = ۰٫۶$

(۲) $\frac{فرط}{فری} = -۲ ی + \frac{(۱ - ط^۲)^{\frac{۱}{۲}}}{ر}$، $\frac{فرر}{فری} = \frac{ط}{(۱ - ط^۲)^{\frac{۱}{۲}}}$،

اگر $ط = ۰٫۰۰۵۰$ اور $ر = ۰٫۰۶$ جبکہ $ی = ۱٫۲۱۴۵$ تو قیمتیں $ط = ۰٫۵۱۶۳$ اور $ر = ۰٫۷۳۴۸$ حاصل کرو جبکہ ی (جسکو متبوع متغیر لینا ہوگا) $= ۱٫۳۷۴۵$۔ ثابت کرو کہ ر کی قیمت اعشاریہ کے چار مقاموں تک غالباً صحیح ہے لیکن ط کی قیمت میں اعشاریہ کا تیسرا مقام غلط ہوسکتا ہے۔

(۳) پچھلی مثال میں ط = جم فہ اور دفعہ ۸۸ کی مثال میں ما = جب فہ

لا = ر رکھ کر ثابت کرو کہ ہر صورت میں مساواتیں

$$\frac{فری}{فرر} = مس فہ ، ۲ ی ا = \frac{جب فہ}{ر} + جم فہ \frac{فرفہ}{فرر}$$

حاصل ہوتی ہیں۔ اِن سے پانی کے ایک قطرہ کی شکل جو ایک افقی مستوی پر ساکن ہو حاصل ہوتی ہے۔

**۸۹ — ہیون اور کُٹا کے طریقے** [1] ۔ یہ طریقے رُنجے کے طریقہ کے بہت مشابہ ہیں، اس لیے ہم اِن کو اختصاراً بیان کریں گے۔ مسئلہ یہ ہے کہ اگر $\frac{فرما}{فرلا}$ = ف (لا ، ما) اور ما = ب جبکہ لا = ا تو ما کا اضافہ ک معلوم کرنا جبکہ لا کا اضافہ ھ معلوم ہو۔

ہیون نے ترتیب ذیل میں محسوب کیا ہے:

$$کَ = ھ ف (ا ، ب)$$

$$کً = ھ ف (ا + \frac{۱}{۳} ھ ، ب + \frac{۱}{۳} کَ)$$

$$کٗ = ھ ف (ا + \frac{۲}{۳} ھ ، ب + \frac{۲}{۳} کً)$$

اِس کے بعد وہ $\frac{۱}{۴}$ (کَ + ۳ کٗ) کو ک کی تقریبی قیمت کے طور پر لیتا ہے۔

کُٹا نے ترتیب ذیل میں محسوب کیا ہے:

$$کَ = ھ ف (ا ، ب)$$

$$کً = ھ ف (ا + \frac{۱}{۳} ھ ، ب + \frac{۱}{۳} کَ)$$

---

[1] Zeitschrift fur Mathematik und Physik, Vols 45 and 46

$$\text{ک}_3 = \text{ھ ف}\left(\text{ا} + \tfrac{2}{3}\text{ھ}،\ \text{ب} + \text{ک}_2 - \tfrac{1}{3}\text{ک}_1\right)$$

$$\text{ک}_4 = \text{ھ ف}\left(\text{ا} + \text{ھ}،\ \text{ب} + \text{ک}_3 - \text{ک}_2 + \text{ک}_1\right)$$

اِس کے بعد وہ $\frac{1}{8}(\text{ک}_1 + 3\text{ک}_2 + 3\text{ک}_3 + \text{ک}_4)$ کو ک کی تقریبی قیمت کے طور پر لیتا ہے۔

اِن تقریبوں کی تصدیق ٹیلر کے سلسلہ میں پھیلانے سے ہوسکتی ہے جیسا کہ رُنجے کی صورت میں کیا گیا تھا۔

## حل طلب مثالیں

اگر $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{ما} - \text{لا}}{\text{ما} + \text{لا}}$ اور ما = ۱ جبکہ لا = ۰ تو ما کی قیمت رُنجے، ہیون، اور کُٹا کے طریقوں سے (۸ اہم مقاموں تک) معلوم کرو جبکہ لا = ۱٫۲ اور اِن کا مقابلہ صحیح قیمت ۱٫۱۶۷۸۴۱۷ کے ساتھ کرو۔ [کُٹا کے مقالہ سے]

(۱۰۵) **۹۰ — دوسرا طریقہ اور خطاء کے حدود** — اِس کتاب کے مصنف نے چار ضابطے معلوم کئے ہیں[1] جن سے چار عدد حاصل ہوتے ہیں، اِن میں سے بڑے سے بڑے اور چھوٹے سے چھوٹے کے درمیان ما کا مطلوبہ اضافہ واقع ہونا چاہئے۔ جب اس کو رُنجے کی مثال پر استعمال کیا جاتا ہے تو اس نئے ضابطہ سے بمقابلہ کسی پچھلے طریقہ کے زیادہ صحیح نتیجے حاصل ہوتے ہیں۔

یہ طریقہ محدود تکملوں سے متعلق حسب ذیل مشہور نتیجوں کی توسیع ہے۔

---

[1] Phil. Mag. June 1919 اِس مقالہ کا بیشتر حصہ یہاں لیا گیا ہے۔

## ۹۱ — حدود جن کے درمیان ایک محدود تکملہ کی قیمت واقع ہوتی ہے

فرض کرو کہ فا (لا) ایک تفاعل ہے جو لا = ا اور لا = ا + ھ کے درمیان مع اپنے پہلے اور دوسرے تفرقی سروں کے مسلسل (اور اس لیے محدود) ہے۔ فرض کرو کہ اس وقفہ میں فَا (لا) کی علامت نہیں بدلتی۔ شکل میں یہ علامت مثبت ہے چنانچہ منحنی اوپر وار مقعر ہے۔ ل ف، م ق، اور ن ر، محور ما کے متوازی ہیں اور ل ن کا وسطی نقطہ م ہے اور ق پر کا مماس س ق ت ہے۔ و ل = ا، ل ن = ھ

شکل (۲۴)

تب رقبہ ف ل ن ر منحرف س ل ن ت کے رقبہ اور منحرفوں ف ل م ق، ق م ن ر کے رقبوں کے مجموعہ کے درمیان واقع ہے یعنے تکملہ

$$\int_{ا}^{ا+ھ} فا(لا)\, فرلا$$

کٗ = ھ ف (ا + ۲/۳ ھ، ب + کٗ − ۱/۳ کَ)

کٗٗ = ھ ف (ا + ھ، ب + کٗٗ − کٗ + کَ)

اِس کے بعد وہ ۱/۸ (کَ + ۳ کٗ + ۳ کٗٗ + کٗٗٗ) کو ک کی تقریبی قیمت کے طور پر لیتا ہے۔

اِن تقریبوں کی تصدیق ٹیلر کے سلسلہ میں پھیلانے سے ہو سکتی ہے جیسا کہ رُنجے کی صورت میں کیا گیا تھا۔

## حل طلب مثالیں

اگر فرما/فرلا = (ما − لا)/(ما + لا) اور ما = ۱ جبکہ لا = ۰ تو ما کی قیمت رُنجے، ہیون، اور کُٹا کے طریقوں سے (۸ اہم مقاموں تک) معلوم کرو جبکہ لا = ۱،۲ اور اِن کا مقابلہ صحیح قیمت ۱،۱۶۷۸۴۱۷ کے ساتھ کرو۔ [کُٹا کے مقالہ سے]

**۹۰ — دوسرا طریقہ اور خطاء کے حدود۔** (۱۰۵) اِس کتاب کے مصنف نے چار ضابطے معلوم کئے ہیں[۱] جن سے چار عدد حاصل ہوتے ہیں، اِن میں سے بڑے سے بڑے اور چھوٹے سے چھوٹے کے درمیان ما کا مطلوبہ اضافہ واقع ہونا چاہیئے۔ جب اس کو رُنجے کی مثال پر استعمال کیا جاتا ہے تو اس نئے ضابطہ سے بمقابلہ کسی پچھلے طریقہ کے زیادہ صحیح نتیجے حاصل ہوتے ہیں۔

یہ طریقہ محدود تکملوں سے متعلق حسب ذیل مشہور نتیجوں کی توسیع ہے۔

[۱] Phil. Mag. June 1919 اِس مقالہ کا بیشتر حصہ یہاں لیا گیا ہے۔

## ۹۱ – حدود جن کے درمیان ایک محدود تکملہ کی قیمت واقع ہوتی ہے

۔ فرض کرو کہ فا (لا) ایک تفاعل ہے جو لا = ا اور لا = ا + ھ کے درمیان مع اپنے پہلے اور دوسرے تفرقی سروں کے مسلسل (اور اس لیے محدود) ہے۔ فرض کرو کہ اس وقفہ میں فاَا (لا) کی علامت نہیں بدلتی۔ شکل میں یہ علامت مثبت ہے چنانچہ منحنی اوپر وار مقعر ہے۔ ل ف، م ق، اور ن ر محور ما کے متوازی ہیں اور ل ن کا وسطی نقطہ م ہے اور ق پر کا مماس س ق ت ہے۔ و ل = ا، ل ن = ھ

شکل (۲۴)

تب رقبہ ف ل ن ر منحرف س ل ن ت کے رقبہ اور منحرفوں ف ل م ق، ق م ن ر کے رقبوں کے مجموعہ کے درمیان واقع ہے یعنے تکملہ

$$\int_{ا}^{ا+ھ} فا(لا)\, فرلا$$

کً = ھ ف (ا + ۲/۳ ھ، ب + کً − ۱/۳ کَ)

کٌ = ھ ف (ا + ھ، ب + کٌ − کً + کَ)

اِس کے بعد وہ ۱/۸ (کَ + ۳ کً + ۳ کٌ + کٍ) کو ک کی تقریبی قیمت کے طور پر لیتا ہے۔

اِن تقربوں کی تصدیق ٹیلر کے سلسلہ میں پھیلانے سے ہو سکتی ہے جیسا کہ رُنجے کی صورت میں کیا گیا تھا۔

## حل طلب مثالیں

اگر فرما/فرلا = (ما − لا)/(ما + لا) اور ما = ۱ جبکہ لا = ۰ تو ما کی قیمت رُنجے، ہیون، اور کُٹّا کے طریقوں سے (۸ اہم مقاموں تک) معلوم کرو جبکہ لا = ۱٫۲ اور اِن کا مقابلہ صحیح قیمت ۱٫۱۶۷۸۴۱۷ کے ساتھ کرو۔ [کُٹّا کے مقالہ سے]

**۹۰ — دوسرا طریقہ اور خطار کے حدود** — اِس کتاب کے مصنف نے چار ضابطے معلوم کئے ہیں[۱] جن سے چار عدد حاصل ہوتے ہیں، اِن میں سے بڑے سے بڑے اور چھوٹے سے چھوٹے کے درمیان ما کا مطلوبہ اضافہ واقع ہونا چاہئے۔ جب اس کو رُنجے کی مثال پر استعمال کیا جاتا ہے تو اس نئے ضابطہ سے بمقابلہ کسی پچھلے طریقہ کے زیادہ صحیح نتیجے حاصل ہوتے ہیں۔ (۱۰۵)

یہ طریقہ محدود تکملوں سے متعلق حسب ذیل مشہور نتیجوں کی توسیع ہے۔

---

[۱] Phil. Mag. June 1919 اِس مقالہ کا بیشتر حصہ یہاں لیا گیا ہے۔

**۹۱ — حدود جن کے درمیان ایک محدود تکملہ کی قیمت واقع ہوتی ہے** — فرض کرو کہ فا (لا) ایک تفاعل ہے جو لا = ا اور لا = ا + ھ کے درمیان مع اپنے پہلے اور دوسرے تفرقی سروں کے مسلسل (اور اس لیے محدود) ہے۔ فرض کرو کہ اس وقفہ میں فَا (لا) کی علامت نہیں بدلتی۔ شکل میں یہ علامت مثبت ہے چنانچہ منحنی اوپر وار مقعر ہے۔ ل ف، م ق، اور ن ر، محور ما کے متوازی ہیں اور ل ن کا وسطی نقطہ م ہے اور ق پر کا مماس س ق ت ہے۔ و ل = ا، ل ن = ھ

شکل (۲۴)

تب رقبہ ف ل ن ر منحرف س ل ن ت کے رقبہ اور منحرفوں ف ل م ق، ق م ن ر کے رقبوں کے مجموعہ کے درمیان واقع ہے یعنے تکملہ

$$\int_{ا}^{ا+ھ} فا(لا)\, فرلا$$

قیمتوں $ہ$ فا $(۱ + \frac{۱}{۲} ہ) = ۱$ (فرض کرو)

اور $\frac{۱}{۴} ہ \{$ فا $(۱) + ۲$ فا $(۱ + \frac{۱}{۲} ہ) +$ فا $(۱ + ہ)\} =$ ب (فرض کرو)

کے درمیان واقع ہے۔

شکل میں فاً (لا) مثبت ہے اور ۱ زیرین حد اور ب بالائی حد ہے۔

اگر فاً (لا) منفی ہوتا تو ۱ بالائی حد اور ب زیرین حد ہوتی۔ (۱۰۶)

تکملہ کی تقریبی قیمت کو ۱ اور ب کا اوسط حسابی نہیں بلکہ

$\frac{۲}{۳}$ ب + $\frac{۱}{۳}$ ۱ لینا مناسب ترین ہے۔ یہ قیمت ٹھیک ہوتی

ہے جبکہ ف ق ر ایک مکافی کی قوس ہو جس کا محور محور ما کے

متوازی ہو۔ یہ اُس عام تر صورت میں بھی ٹھیک ہے جبکہ

$$\text{فا (لا)} = ۱ + \text{ب لا} + \text{ج لا}^{۲} + \text{ع لا}^{۳}$$

جیساکہ احصاء کی اکثر کتابوں میں سمپسن کے قاعدہ پر بحث کرتے وقت ثابت کیا جاتا ہے۔

## ۹۲ ۔ پچھلے نتیجوں کی توسیع اُن تفاعلوں پر جن کی تعریف تفرقی مساواتوں سے کی گئی ہو

۔ اُس تفاعل پر غور کرو جس کی تعریف

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{ف (لا، ما)}، \quad \text{ما} = \text{ب جبکہ لا} = ۱$$

سے کی گئی ہے جہاں ف (لا، ما)، لا کی قیمتوں ۱ تا ۱ + ہ اور ما کی قیمتوں ب ۔ ہ تا ب + ہ کی سعت میں حسب ذیل قیود کے تحت ہے۔ یہ معلوم ہوگا کہ ما کا اضافہ عدد اً ہ سے کم ہوتا ہے اور اسلیے

ما کی تمام قیمتیں اوپر کی سعت میں واقع ہوتی ہیں۔ قیود حسب ذیل ہیں:

(۱) ف (لا، ما) محدود اور مسلسل ہو، نیز اس کے پہلے اور دوسرے جزئی تفرقی سر بھی محدود اور مسلسل ہوں۔

(۲) وہ کبھی اکائی سے متجاوز نہ ہو۔ اگر یہ شرط پوری نہ ہو تو ہم بالعموم ایک نئی مساوات حاصل کرتے ہیں جس میں لا کی بجائے ما کو متبوع متغیر لینے سے یہ شرط پوری ہوتی ہے۔

(۳) $\frac{\text{فر}^3\,\text{ما}}{\text{فر لا}^3}$ اور $\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}}$ علامت نہ بدلیں۔

فرض کرو کہ م اور مہ کوئی دو ایسے عدد ہیں کہ

$$-1 \leq \text{م} < \text{ف} < \text{مہ} \leq 1$$

تب اگر ما کی قیمتوں کو جبکہ لا، ا + $\frac{1}{2}$ ھ اور ا + ھ ہو علی الترتیب ب + ز اور ب + ک سے تعبیر کیا جائے[1] تو

$$-\tfrac{1}{2}\text{ھ} \leq \tfrac{1}{2}\text{م ھ} < \text{ز} < \tfrac{1}{2}\text{مہ ھ} \leq \tfrac{1}{2}\text{ھ}، \quad \ldots(1)$$

اور

$$-\text{ھ} \leq \text{م ھ} < \text{ک} < \text{مہ ھ} \leq \text{ھ}، \quad \ldots\ldots(2)$$

اب ہم پچھلے دفعہ کے ضابطے استعمال کریں گے اور ما کو وہی تفاعل سمجھیں گے جس کی تعریف

$$\text{ما} = \text{ب} + \int_{\text{ا}}^{\text{ا}+\text{ھ}} \text{فا}(\text{لا})\,\text{فر لا}$$

سے ہوتی ہے، اس لیے

---

[1] نچلی نامساواتیں صرف ھ کے مثبت ہونے کی صورت میں درست ہیں اگر وہ منفی ہو تو ان میں ترمیم کرنی ہوگی لیکن اس دفعہ کا آخری نتیجہ پھر بھی درست رہتا ہے۔

ک = $\int$ فا (لا) فرلا (حدود: ا سے ا + ھ)

ہمیں اِن ضابطوں کو فا کی بجائے ف کی رقوم میں بیان کرنا ہے۔

اب فا (ا) = فرما / فرلا کی قیمت جبکہ لا = ا

اِس لیے فا (ا) = ف (ا، ب)

اسی طرح فا (ا + $\frac{1}{2}$ ھ) = ف (ا + $\frac{1}{2}$ ھ، ب + ز) (۱۰۷)

اور فا (ا + ھ) = ف (ا + ھ، ب + ک)

اب اگر جف ف / جف ما مثبت ہے اور اِس لیے ف، ما کے ساتھ بڑھتا ہے تو مساواتوں (۱) اور (۲) سے

ف (ا + $\frac{1}{2}$ ھ، ب + $\frac{1}{2}$ م ھ) < ف (ا + $\frac{1}{2}$ ھ، ب + ز)

< ف (ا + $\frac{1}{2}$ ھ، ب + $\frac{1}{2}$ مھ) ..... (۳)

اور ف (ا + ھ، ب + م ھ) < ف (ا + ھ، ب + ک)

< ف (ا + ھ، ب + مھ) ...... (۴)

لیکن اگر جف ف / جف ما منفی ہے تو

ف (ا + $\frac{1}{2}$ ھ، ب + $\frac{1}{2}$ م ھ) > ف (ا + $\frac{1}{2}$ ھ،

ب + ز) > ف (ا + $\frac{1}{2}$ ھ، ب + $\frac{1}{2}$ مھ) ..... (۵)

اور ف (ا + ھ، ب + م ھ) > ف (ا + ھ، ب + ک).

> ف (ا + ھ، ب + م ھ) ........ (۶)

پس اگر فاً(لا) = $\frac{\text{ف}^{2}\ \text{ما}}{\text{ف لا}^{2}}$ مثبت ہو اور $\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}}$ بھی مثبت ہو تو

دفعہ ۹۱ کے نتیجہ

ا > ک > ب

کی بجائے

ع > ک > ق، ........ (۷)

کو رکھا جا سکتا ہے جہاں

ع = ھ ف (ا + $\frac{1}{2}$ ھ، ب + $\frac{1}{2}$ م ھ)

اور ق = $\frac{1}{4}$ ھ {ف (ا، ب) + ۲ ف (ا + $\frac{1}{2}$ ھ، ب + $\frac{1}{2}$ م ھ) + ف (ا + ھ، ب + م ھ)}

لیکن اگر فاً(لا) مثبت ہو اور $\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}}$ منفی تو

ع > ک > ق، ........ (۸)

جہاں ع = ھ ف (ا + $\frac{1}{2}$ ھ، ب + $\frac{1}{2}$ م ھ)

اور ق = $\frac{1}{4}$ ھ {ف (ا، ب) + ۲ ف (ا + $\frac{1}{2}$ ھ، ب + $\frac{1}{2}$ م ھ) + ف (ا + ھ، ب + م ھ)}

اسی طرح اگر فاً(لا) اور $\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}}$ دونوں منفی ہوں تو

ع > ک > ق، ........ (۹)

لیکن اگر فاً(لا) منفی اور $\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}}$ مثبت ہو تو

ع > ک > ق، ........ (۱۰)

اِن نتیجوں کو خلاصہ کے طور پر اس طرح بیان کیا جا سکتا ہے کہ

**ہر صورت میں** (اُن قیود کے تحت جن کا ذکر اِس دفعہ کی ابتدا میں کیا جا چکا ہے) ک چار عددوں ب، ع، ق اور ق میں سے بڑے سے بڑے اور چھوٹے سے چھوٹے کے درمیان واقع ہوتا ہے۔

تقریبی ضابطہ کے طور پر ہم ک = $\frac{۲}{۳}$ ب + $\frac{۱}{۳}$ ا کو استعمال کرتے ہیں اور اِس میں ب کی بجائے ق یا ق اور ا کی بجائے ع یا ع درج کرتے ہیں۔

**۹۳ — ایک عددی مثال پر اطلاق** ۔ اُس مثال پر غور کرو جس کو رُنجے اور کُٹا نے اپنے طریقوں کی توضیح میں استعمال کیا ہے یعنے

$$\frac{\text{فہ ما}}{\text{فہ لا}} = \frac{\text{ما} - \text{لا}}{\text{ما} + \text{لا}}\text{، ما = ا جبکہ لا = ۰}$$

ما کا اضافہ ک معلوم کرنا مطلوب ہے جبکہ لا میں ۲ء۰ کا اضافہ ہو۔ یہاں ف (لا، ما) = $\frac{\text{ما} - \text{لا}}{\text{ما} + \text{لا}}$ ۔ یہ تفاعل اُن شرطوں کو پورا کرتا ہے جو پچھلے دفعہ میں بیان ہوئیں[1]

---

[1] چونکہ ف (لا، ما) مثبت ہے اس لیے ما، ا اور ۲ء۱ کے درمیان واقع ہے۔ م اور م کو معلوم کرتے وقت ہم ہمیشہ ما کے لیے وہ کم سے کم سعت لیتے ہیں جو مل سکتی ہے۔ (شرطوں م < ف < م کی بجائے م ≤ ف ≤ م کو لیا جا سکتا ہے اور اس سے آخری نتیجہ پر کوئی اثر نہیں پڑیگا صرف یہ فرق ہوگا کہ < جیسی چند علامتوں کی بجائے ≤ جیسی چند علامتیں ہوں گی ۔)-

ہم لیتے ہیں ھ = ۱، م = $\frac{۱ - ۲،۰}{۰،۲ + ۱،۲} = \frac{۴}{۷}$

تب ع = ۰،۱۶۵۴۳۲۱ (۱۰۸)

ع = ۰،۱۶۶۶۶۶۷

ق = ۰،۱۶۷۴۹۸۷

ق = ۰،۱۶۹۰۴۷۶

اِس طرح ک، ع اور ق کے درمیان واقع ہے۔

| | | خطائیں |
|---|---|---|
| $\frac{۲}{۳}$ ق + $\frac{۱}{۳}$ ع | = ۰،۱۶۷۸۴۲۴ | ۰،۰۰۰۰۰۰۷ |
| کُٹا کی قیمت | ۰،۱۶۷۸۴۴۹ | ۰،۰۰۰۰۰۳۲ |
| رُنجے کی قیمت | ۰،۱۶۷۸۴۸۷ | ۰،۰۰۰۰۰۷۰ |
| ہیون کی قیمت | ۰،۱۶۸۰۲۵۰ | ۰،۰۰۰۱۸۳۳ |

ان میں سے دوسری، تیسری، اور چوتھی قیمتیں کُٹا نے محسوب کی تھیں۔ اب یہ مخصوص مثال محدود رقموں میں تکمیل پذیر ہے چنانچہ حاصل ہوتا ہے

لوک (لا$^{۲}$ + ما$^{۲}$) - ۲ سس$^{-۱}$ ($\frac{ما}{لا}$) = ۰

اِس لیے ہم ک کی صحیح قیمت معلوم کر سکتے ہیں چنانچہ

صحیح قیمت = ۰،۱۶۷۸۴۱۷

ظاہر ہے کہ اِس مثال میں مصنف کے طریقہ سے جو قیمت حاصل ہوئی ہے وہ صحیح قیمت سے قریب ترین ہے، خطائیں ساتھ ساتھ بیان کردی گئی ہیں۔

ہم اِس طریقہ کی جانچ زیادہ بڑے وقفہ ھ = ۱ کو لیکر بھی کرینگے۔ بلا شبہ نتیجہ کو حاصل کرنے کا زیادہ صحیح طریقہ عمل حساب کو کئی حصوں میں تقسیم کرکے مکمل کرنا ہے مثلاً ھ = ۰،۲، ۰،۳ اور بالآخر ۰،۵۔

تاہم یہ دیکھنا دلچسپ ہے کہ بڑے وقفہ کے لیے نتیجے کتنے غلط ہوتے ہیں:

ہم لیتے ہیں م = ۱، م = $\frac{۱-۱}{۱+۲}$ = ۰

تب $\frac{۲}{۳}$ ق + $\frac{۱}{۳}$ ع = ۰٫۵۰۰۰۰۰

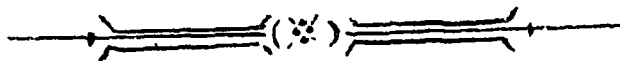
| | | خطائیں |
|---|---|---|
| صحیح قیمت | = ۰٫۴۹۸۲۸ | |
| ہماری قیمت | = ۰٫۵۰۰۰۰ | ۰٫۰۰۱۷۲ |
| کٹا کی قیمت | = ۰٫۴۹۹۱۴ | ۰٫۰۰۰۸۶ |
| ہیون کی قیمت | = ۰٫۵۱۶۱۳ | ۰٫۰۱۷۸۵ |
| رُنجے کی قیمت | = ۰٫۵۲۳۸۱ | ۰٫۰۲۵۵۳ |

اب کٹا کی قیمت قریب ترین ہے اور ہماری اس کے بعد۔

[م اور م کو متعین کرنے کا باقاعدہ طریقہ اور دفعات ۹۰ تا ۹۳ کے طریقہ کی رِیم کی توسیع کے لیے دفعہ ۱۸۳ کا مطالعہ کرو۔]

آڈمس کا عددی طریقہ جو شاید سب میں بہترین ہے دفعہ ۱۸۲ میں بیان کیا گیا ہے۔

(۱۰۹)

# نواں باب

## سلسلوں میں حل فرابنیس کا طریقہ

**۹۴** — ساتویں باب میں ہم نے شکل

$$\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر لا}^2} + \text{ف}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{ق ما} = ٠$$

کی متعدد مساواتوں کو حل کیا جہاں ف اور ق، لا کے تفاعل تھے۔ ہر صورت میں حل شکل

$$\text{ما} = \text{ا ف (لا)} + \text{ب فا (لا)}$$

کا تھا جہاں ا اور ب اختیاری مستقل تھے۔

تفاعل ف (لا)، فا (لا)، لا کی صحیح یا کسری قوتوں، جیوب اور جیوب التمام، قوت نما [illegible] اور لوگارثموں سے بنے تھے مثلاً

$$(\text{۱} + \text{۲لا})\,\text{قو}^{\text{لا}}،\ \text{جب لا} + \text{لاجم لا}،\ \text{لا}^{\frac{1}{2}} + \text{لا}^{-\frac{3}{2}}،\ \text{لا} + \text{لوک لا}،\ \text{قو}^{\frac{1}{\text{لا}}}$$

اِن میں سے پہلے اور دوسرے تفاعل میکلارن کے مسئلہ سے لا کی صحیح عددی اور صعودی قوتوں میں پھیلائے جا سکتے ہیں، باقی دوسرے نہیں پھیلائے جا سکتے اگرچہ آخری تفاعل کو $\frac{1}{\text{لا}}$ کی رقوم میں پھیلایا جا سکتا ہے۔

اِس باب میں ہم فرابنیس[1] (باشندہ برلن) کی اتباع کرتے ہوئے آزمائشی حل

$$\text{م} = \text{لا}^{\text{ج}}\left(\text{ا}_0 + \text{ا}_1\,\text{لا} + \text{ا}_2\,\text{لا}^2 + \ldots\ldots \infty \text{ تک}\right)$$

اختیار کریں گے جس میں تمام ا مستقل[2] ہیں۔

قوت نماج کو ایک دو درجی مساوات سے جس کو **قوت نمائی مساوات** کہتے ہیں معلوم کیا جائے گا۔ اِس مساوات کی اصلیں مساوی، مختلف مگر اِن کا فرق ایک صحیح عدد ہو، یا مختلف مگر اِن کا فرق صحیح عدد نہ ہو ہوسکتی ہیں۔ اِن صورتوں پر علٰحدہ علٰحدہ بحث کرنی ہوگی۔

اِس آزمائشی حل کی خاص خوبی یہ ہے کہ اِس سے حل کی ایک دوسری شکل جس میں لوک لا شامل ہوتا ہے فوراً حاصل ہوتی ہے جبکہ تفرقی مساوات کا حل اِس دوسری شکل کا ہوتا ہے۔

چونکہ $\text{قو}^{\text{لا}}$ جیسے تفاعلوں کو لا کی صعودی قوتوں میں پھیلایا نہیں جا سکتا (۱۱۰)

اِس لیے اُن تفرقی مساواتوں کی صورت میں جن کا حل اِس نوعیت کا ہو یہ طریقہ ناکام رہے گا۔ ہم ایک ایسے طریقہ کا ذکر کریں گے جس سے فوراً یہ معلوم ہوسکیگا کہ کونسی مساواتوں کو فرابنیس کی شکلوں (باقاعدہ تکملوں) میں حل کیا جاسکتا ہے اور لا کی قیمتوں کی کس سعت میں یہ حل متدق ہوں گے۔

اِس باب کا مقصد یہ ہے کہ مثالوں کو کس طرح حل کیا جائے۔ اِس میں جو مسئلے پیش کئے گئے ہیں اُن کے باقاعدہ ثبوت آئندہ باب میں دئے جائیں گے۔

[1] Crelle, Vol. LXXVI., 1873, pp. 214–224

[2] اِس باب میں لاحقوں کو تفرقوں کی تعبیر کے لیے استعمال نہیں کیا جائے گا۔

اِن مثالوں میں بیسل،[1] لیجنڈر[2] اور ریکٹی[3] کی اہم مساواتیں ملیں گی۔ زائد ہندسی گاس[4] کی مساوات اور اس کے چوبیس حلوں کا ایک خاکہ بھی دیا گیا ہے۔

## ۹۵ - صورت (۱) - قوت نمائی مساوات کی اصلیں نامساوی لیکن ان کا فرق ایک صحیح عدد نہیں۔

مساوات

$$(\text{۲لا} + \text{لا}^{۲}) \frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}} - \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - \text{۶لاما} = ۰ \quad \ldots\ldots (۱)$$

پر غور کرو۔

رکھو $\text{ی} = \text{لا}^{\text{ج}}(\text{ا}_{۰} + \text{ا}_{۱}\text{لا} + \text{ا}_{۲}\text{لا}^{۲} + \ldots)$ جہاں $\text{ا}_{۰} \neq ۰$ [5]

تو $$\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}} = \text{ا}_{۰}\text{ج}\,\text{لا}^{\text{ج}-۱} + \text{ا}_{۱}(\text{ج}+۱)\text{لا}^{\text{ج}} + \text{ا}_{۲}(\text{ج}+۲)\text{لا}^{\text{ج}+۱} + \ldots$$

---

[1] فریڈرک ولہم بیسل (مینڈن ۱۷۸۴ء تا ۱۸۴۶ء) کونیشبرگ کی رصدگاہ کے ناظم تھے۔ وہ "بیسل کے تفاعلات" کے لیے بہت مشہور ہیں۔

[2] اڈرین میری لیجنڈر (ٹولوس ۱۷۵۲ء تا ۱۸۳۳ء) اپنے (Zonal Harmonics) یا "لیجنڈر کے سروں" کی وجہ سے بہت مشہور ہیں۔ موصوف نے ناقصی تکملوں اور عددوں کے نظریہ پر بھی بہت کام کیا ہے۔

[3] کاونٹ ریکٹی (وینس ۱۶۷۶ء تا ۱۷۵۴ء) نے "ریکٹی کی مساوات" اور نیز ایک دی ہوئی مساوات کے رتبہ کو گھٹانے کے امکان پر مقالات تحریر کئے۔

[4] کارل فریڈرک گاس (برنسوک ۱۷۷۷ء تا ۱۸۵۵ء) "انیسویں صدی کے ارشمیدش" مشہور ہیں، آپ نے بہت سے مضمونوں پر اپنی تحقیقاتیں شائع کی ہیں، ان میں عددوں کا نظریہ، مقطعات، لا متناہی سلسلے، خطاؤں کا نظریہ، علم ہیئت، ارضیات، برق اور مقناطیس شامل ہیں۔

[5] لا کی صعودی قوتوں کے کسی سلسلہ کو اس طرح رقم بہ رقم تفرق کرنا جائز ہے بشرطیکہ تفرق استدقاق کے علاقہ کے اندر رہو۔ دیکھو برامونج Infinite Series دفعہ ۵۲

اور $\frac{ف^۲ ی}{ف لا^۲} = ا_ج ج (ج - ۱) لا^{ج-۲} + ا_۱ (ج + ۱) ج لا^{ج-۱}$

$+ ا_۲ (ج + ۲) (ج + ۱) لا^{ج} + \ldots\ldots$

(۱) میں درج کرو اور لا کی متواتر قوتوں کے سروں کو صفر کے مساوی رکھو۔

لا کی کم ترین قوت $لا^{ج-۱}$ ہے ۔ اس کے سر کو صفر کے مساوی رکھنے سے

$ا_. \{ ۲ ج (ج - ۱) - ج \} = ۰$

یعنی کیونکہ $ا_. \neq ۰$ $\quad ج (۲ ج - ۳) = ۰ \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$

(۲) کو قوت نمائی مساوات کہتے ہیں ۔ [۱]

$لا^{ج}$ کے سر کو صفر کے مساوی رکھنے سے

$ا_۱ \{ ۲ (ج + ۱) ج - (ج + ۱) \} = ۰$ یعنی $ا_۱ = ۰ \quad \ldots\ldots (۳)$

$لا^{ج+۱}$ کے سر میں زیادہ رقمیں ہیں اور اس سے حاصل ہوتا ہے

$ا_۲ \{ ۲ (ج + ۲) (ج + ۱) - (ج + ۲) \} + ا_. \{ ج (ج - ۱) - ۲ \} = ۰$

یعنی $ا_۲ (ج + ۲) (۲ ج + ۱) + ا_. (ج + ۱) (ج - ۲) = ۰$

یعنی $ا_۲ (۲ ج + ۱) + ا_. (ج - ۲) = ۰ \quad \ldots\ldots\ldots (۴)$

اسی طرح $ا_۳ (۲ ج + ۳) + ا_۱ (ج - ۲) = ۰ \quad \ldots\ldots\ldots (۵)$

$ا_۴ (۲ ج + ۵) + ا_۲ (ج - ۱) = ۰ \quad \ldots\ldots\ldots (۶)$

---

[۱] یا اُس جملہ میں جو ا کی بجائے ی رکھنے سے حاصل ہوتا ہے ۔

علیٰ ہذا۔

(۳)، (۵)، وغیرہ سے

$$۰ = ا_۱ = ا_۳ = ا_۵ = \ldots\ldots = ا_{۲ن+۱}$$

(۴)، (۶) وغیرہ سے

$$\frac{ا_۲}{ا_۰} = -\frac{ج-۳}{۲ج+۱}،\quad \frac{ا_۴}{ا_۲} = -\frac{ج-۱}{۲ج+۵}،$$

$$\frac{ا_۶}{ا_۴} = -\frac{ج+۱}{۲ج+۹}،\ \ldots،\ \frac{ا_{۲ن}}{ا_{۲ن-۲}} = -\frac{ج+۲ن-۵}{۲ج+۴ن-۳}$$

لیکن (۲) سے ج = ۰ یا $\frac{۳}{۲}$

اِس طرح اگر ج = ۰ تو ا۰ کی بجائے ا رکھنے سے

$$ی = ا\left\{۱ + ۳لا^۲ + \frac{۳}{۵}لا^۴ - \frac{۱}{۱۵}لا^۶ + \frac{۱}{۶۵}لا^۸ + \ldots\right\} = اع \text{ (فرض کرو)}$$

اور اگر ج = $\frac{۳}{۲}$ تو ا۰ کی بجائے (جو اختیاری مستقل ہے) ب رکھنے سے

$$ی = ب لا^{\frac{۳}{۲}}\left\{۱ + \frac{۳}{۸}لا^۲ - \frac{۳\times۱}{۸\times۱۲}لا^۴ + \frac{۵\times۳\times۱}{۸\times۱۶\times۲۴}لا^۶ - \ldots\right\}$$

$$= ب و \text{ (فرض کرو)}$$

پس ما = اع + ب و ایسا حل ہے جس میں دو اختیاری مستقل ہیں اور اِس لیے اِس کو کامل ابتدائی سمجھا جا سکتا ہے۔

عام طور پر اگر قوت نمائی مساوات کی دو نا مساوی اصلیں عہ اور بہ ہوں اور اِن کا فرق ایک صحیح عدد نہ ہو تو ج کی اِن قیمتوں کو ی کے سلسلہ میں درج کرنے سے دو غیر تابع حل حاصل ہوتے ہیں۔

## حل طلب مثالیں -

(۱) $۴ لا \frac{فر^۲ ما}{فر لا^۲} + ۲ \frac{فر ما}{فر لا} + ما = ۰$

(۲) $۲ لا (۱ - لا) \frac{فر^۲ ما}{فر لا^۲} + (۱ - لا) \frac{فر ما}{فر لا} + ۳ ما = ۰$

(۳) $۹ لا (۱ - لا) \frac{فر^۲ ما}{فر لا^۲} - ۱۲ \frac{فر ما}{فر لا} + ۴ ما = ۰$

(۴) $لا^۲ \frac{فر^۲ ما}{فر لا^۲} + لا \frac{فر ما}{فر لا} + (لا^۲ - ن^۲) ما = ۰$؛ یہ مساوات یہ ن ویں رتبہ کی بیسل کی مساوات ہے جس میں ۲ ن صحیح عدد نہیں ہے۔

## ۹۶ - پچھلے دفعہ میں حاصل شدہ سلسلہ کا استدقاق

(۱۱۲)

اعلیٰ جبر و مقابلہ یا علم تحلیل کی تقریباً ہر کتاب میں یہ ثابت کیا جاتا ہے کہ لامتناہی سلسلہ $ع_۱ + ع_۲ + ع_۳ + ...$ مستدق ہوتا ہے اگر

$$نہا_{ن \to \infty} \left| \frac{ع_{ن+۱}}{ع_ن} \right| < ۱$$

اُس سلسلہ میں جو گذشتہ دفعہ میں حاصل کیا گیا ہے $ع_ن = ا_{۲ن-۲} لا^{ج+۲ن-۲}$

یعنی

$$\frac{ع_{ن+۱}}{ع_ن} = \frac{ا_{۲ن}}{ا_{۲ن-۲}} لا^۲$$

$$= - \frac{ج + ۲ن - ۵}{۲ج + ۴ن - ۳} لا^۲$$

اور اس کی انتہا جبکہ ن ← ∞، - ۱/۲ لا۲ ہے جو ج کی قیمت پر منحصر نہیں ہے۔ اِس لیے دونوں محصلہ سلسلے |لا| < √۲ کے لیے مستدق ہیں۔

یہ دیکھنا دلچسپ ہے کہ اگر تفرقی مساوات شکل

$$لا^2 \frac{فر^2 ما}{فر لا^2} + لا ع (لا) \frac{فر ما}{فر لا} + ق (لا) ما = ۰$$

میں تحویل ہو تو ع (لا) اور ق (لا) قوت کے مستدق سلسلوں میں پھیلائے جا سکتے ہیں مثلاً اوپر کی مثال میں ایسے سلسلوں میں جو لا کی اُن قیمتوں کے لیے مستدق ہیں جن کا مقیاس |لا| < √۲ ہے

$$ع (لا) = \frac{-۱}{۲ + لا^2}$$

اور

$$ق (لا) = \frac{-۶ لا^2}{۲ + لا^2}$$

یعنے اِس مثال میں استدقاق کا علاقہ اُس علاقہ پر منطبق ہے جس کے لیے ع (لا) اور ق (لا) قوت کے مستدق سلسلوں میں پھیلائے جا سکتے ہیں۔ دسویں باب میں ہم ثابت کریں گے کہ یہ مسئلہ عام طور پر درست ہے۔

## حل طلب مثالیں۔

مثالوں کے پچھلے جٹ کے حلوں کے لیے استدقاق کا علاقہ معلوم کرو۔ ہر صورت میں اِس امر کی تصدیق کرو کہ استدقاق کا علاقہ اُس علاقہ کے مماثل ہے جس کے لیے ع (لا) اور ق (لا) قوت کے مستدق سلسلوں میں پھیلائے جا سکتے ہیں۔

## ۹۷ - صورت (۲) - جبکہ قوت نمائی مساوات کی اصلیں

...ساوی ہوں - مساوات

$$(لا-لا^2)\frac{فر^2 ما}{فر لا^2}+(1-5لا)\frac{فر ما}{فر لا}-4 ما=0$$

پر غور کرو --

رکھو $ی = لا^ج (ا_0 + ا_1 لا + ا_2 لا^2 + \ldots)$

اور تفرقی مساوات میں درج کرنے سے بعد لا کی متواتر قوتوں کے سروں کو صفر کے مساوی رکھو (حسب دفعہ ۹۵)۔ تو

$$ا_0\{ج(ج-1)+ج\}=0 \quad (۱۱۳)$$

یعنی $ج^2=0$ ........................ (۱)

$$ا_1\{(ج+1)ج+ج+1\}-ا_0\{ج(ج-1)+5ج+4\}=0$$

یعنی $ا_1(ج+1)^2-ا_0(ج+2)^2=0$ ........... (۲)

$ا_2(ج+2)^2-ا_1(ج+3)^2=0$ ........... (۳)

$ا_3(ج+3)^2-ا_2(ج+4)^2=0$ ........... (۴)

وعلیٰ ہذا

$$پس\ ی=ا_0 لا^ج\left\{1+\left(\frac{ج+2}{ج+1}\right)^2 لا+\left(\frac{ج+3}{ج+1}\right)^2 لا^2\right.$$

$$\left.+\left(\frac{ج+4}{ج+1}\right)^2 لا^3+\ldots\ldots\right\}$$

ایک حل ہے اگر $ج=0$

اس سے دو کی بجائے صرف ایک سلسلہ حاصل ہوتا ہے۔

لیکن اگر ہم تفرقی مساوات کی دائیں جانب اس سلسلہ کو

درج کریں (ج = ۰ رکھے بغیر) تو ہمیں صرف واحد رقم $ا_۱ ج^2 لا^{ج-1}$ حاصل ہوتی ہے۔ چونکہ اس میں ج کا مربع شریک ہے اس لیے ج کے لحاظ سے اس کا جزئی تفرقی سر یعنی $2 ا_۱ ج لا^{ج-1} + ا_۱ ج^2 لا^{ج-1}$ لوک لا بھی معدوم ہوگا جبکہ ج = ۰ ۔ یعنی

$$\frac{جف}{جف ج}\left[(لا-لا^2)\frac{ف^2}{ف لا^2}+(1-5لا)\frac{ف}{ف لا}-4\right]ی$$

$$= 2 ا_۱ ج لا^{ج-1} + ا_۱ ج^2 لا^{ج-1} لوک لا$$

چونکہ تفرقی عامل تبادلہ پذیر ہوتے ہیں اس لیے اس کو

$$\left[(لا-لا^2)\frac{ف^2}{ف لا^2}+(1-5لا)\frac{ف}{ف لا}-4\right]\frac{جف ی}{جف ج}$$

$$= 2 ا_۱ ج لا^{ج-1} + ا_۱ ج^2 لا^{ج-1} لوک لا$$

لکھا جا سکتا ہے۔

پس $\frac{جف ی}{جف ج}$ تفرقی مساوات کا دوسرا حل ہے اگر تفرق کے بعد ج کو صفر کے مساوی رکھا جائے۔

تفرق کرنے پر

$$\frac{جف ی}{جف ج} = ی لوک لا + ا لا^{ج}\left\{2\left(\frac{ج+2}{ج+1}\right)\frac{-1}{(ج+1)^2}لا\right.$$

$$\left.+2\left(\frac{ج+3}{ج+1}\right)\frac{-2}{(ج+1)^2}لا^2+2\left(\frac{ج+4}{ج+1}\right)\frac{-3}{(ج+1)^2}لا^3+\ldots\right\}$$

اوپر کے دو سلسلوں میں ج = ۰ اور علی الترتیب ا = ۱ اور ب رکھنے سے

ی = ا {ا۲ + ۲۲ لا + ۳۲ لا۲ + ۴۲ لا۳ + ....} = ا ی، فرض کرو

اور $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ج}}$ = ب ی لوک لا - ۲ ب {۱ × ۲ لا + ۲ × ۳ لا۲ + ۳ × ۴ لا۳

+ .... } = ب و، فرض کرو

کامل ابتدائی ا ی + ب و ہے -

(۱۱۴) عام طور پر اگر قوت نمائی مساوات کی دو اصلیں ج = ا مساوی ہوں تو ج کی اس قیمت کو ی میں اور $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ج}}$ میں درج کرنے سے دو غیر تابع حل حاصل ہوتے ہیں - دوسرے حل میں ہمیشہ پہلے حل (یا اس کے عددی ضعف) اور لوک لا کا حاصل ضرب، جمع شدہ شریک ہوگا -

اوپر کی مخصوص مثال پر عود کرو اور ع (لا) اور ق (لا) پر دفعہ ۹۶ کے مطابق غور کرو تو معلوم ہوگا کہ یہ سلسلہ مستدق ہے اگر |لا| < ۱ - یہ آسانی سے ثابت کیا جا سکتا ہے کہ یہ درست ہے -

## حل طلب مثالیں

(۱) (لا - لا۲) $\frac{\text{فر}^2 \text{ ما}}{\text{فر لا}^2}$ + (۱ - لا) $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ - ما = ۰

(۲) صفر رتبہ کی بیسل کی مساوات

لا $\frac{\text{فر}^2 \text{ ما}}{\text{فر لا}^2}$ + $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ + لا ما = ۰

(۳) لا $\frac{\text{فر}^2 \text{ ما}}{\text{فر لا}^2}$ + (۱ + لا) $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ + ۲ ما = ۰

$$(\text{۴})\quad \text{۴}(\text{لا}^{\text{۳}}-\text{لا}^{\text{۲}})\frac{\text{فر}^{\text{۲}}\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}^{\text{۲}}}+\text{۸}\,\text{لا}^{\text{۳}}\frac{\text{فر}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}}-\text{ما}=\text{۰}$$

## ۹۸ - صورت (۳) جبکہ قوت نمائی مساوات کی اصلوں میں صحیح عدد کا فرق ہو اور اِن میں سے ایک اصل سے ی کا ایک سر لا متناہی ہو جائے - ایک رتبہ

کی بیسل کی مساوات

$$\text{لا}^{\text{۲}}\frac{\text{فر}^{\text{۲}}\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}^{\text{۲}}}+\text{لا}\frac{\text{فر}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}}+(\text{لا}^{\text{۲}}-\text{۱})\,\text{ما}=\text{۰}$$

پر غور کرو -

اگر ہم دفعہ ۹۵ کے مطابق عمل کریں تو معلوم ہوگا کہ

$$\text{ا}_{\text{۰}}\left\{\text{ج}(\text{ج}-\text{۱})+\text{ج}-\text{۱}\right\}=\text{۰}$$

یعنے

$$\text{ج}^{\text{۲}}-\text{۱}=\text{۰}\,،\quad\ldots\ldots\quad(\text{۱})$$

$$\text{ا}_{\text{۱}}\left\{(\text{ج}+\text{۱})^{\text{۲}}-\text{۱}\right\}=\text{۰}\quad\ldots\ldots$$

$$\text{ا}_{\text{۱}}\left\{(\text{ج}+\text{۱})^{\text{۲}}-\text{۱}\right\}=\text{۰}$$

یعنے

$$\text{ا}_{\text{۱}}=\text{۰}\,،\quad\ldots\ldots\quad(\text{۲})$$

$$\text{ا}_{\text{۲}}\left\{(\text{ج}+\text{۲})^{\text{۲}}-\text{۱}\right\}+\text{ا}_{\text{۰}}=\text{۰}\,،\quad\ldots\ldots\quad(\text{۳})$$

اور

$$\text{ا}_{\text{ن}}\left\{(\text{ج}+\text{ن})^{\text{۲}}-\text{۱}\right\}+\text{ا}_{\text{ن}-\text{۲}}=\text{۰}\,،\quad\ldots\ldots\quad(\text{۴})$$

اِس لیے

$$\text{ی}=\text{ا}_{\text{۰}}\text{لا}^{\text{ج}}\left\{\text{۱}-\frac{\text{۱}}{(\text{ج}+\text{۱})(\text{ج}+\text{۳})}\text{لا}^{\text{۲}}+\frac{\text{۱}}{(\text{ج}+\text{۱})(\text{ج}+\text{۳})^{\text{۲}}(\text{ج}+\text{۵})}\text{لا}^{\text{۴}}-\frac{\text{۱}}{(\text{ج}+\text{۱})(\text{ج}+\text{۳})^{\text{۲}}(\text{ج}+\text{۵})^{\text{۲}}(\text{ج}+\text{۷})}\text{لا}^{\text{۶}}+\ldots\right\}$$

قوت نما مساوات (۱) کی اصلیں ج = ۱ یا -۱ ہیں -
لیکن اگر ہم اوپر کے سلسلہ میں ج = -۱ رکھتے ہیں تو سر لامتناہی ہو جاتے ہیں کیونکہ نسب نما میں ج + ۱ جزو ضربی ہے - اس لیے[1] اس مشکل سے بچنے کے لیے $\text{ا}_{0}$ کی بجائے (ج + ۱) ک رکھو تو

$$\text{ی} = \text{ک}\,\text{لا}^{\text{ج}}\left\{(\text{ج}+1) - \frac{1}{(\text{ج}+3)}\text{لا}^{2} + \frac{1}{(\text{ج}+3)^{2}(\text{ج}+5)}\text{لا}^{4} - \frac{1}{(\text{ج}+3)^{2}(\text{ج}+5)^{2}(\text{ج}+7)}\text{لا}^{6} \ldots\right\} \ldots \quad (5) \qquad (115)$$

اور

$$\text{لا}^{2}\frac{\text{فر}^{2}\text{ی}}{\text{فر}\,\text{لا}^{2}} + \text{لا}\frac{\text{فر}\,\text{ی}}{\text{فر}\,\text{لا}} + (\text{لا}^{2}-1)\,\text{ی} = \text{ک}\,\text{لا}^{\text{ج}}(\text{ج}+1)(\text{ج}^{2}-1)$$

$$= \text{ک}\,\text{لا}^{\text{ج}}(\text{ج}+1)^{2}(\text{ج}-1)$$

عین صورت (۲) کی طرح مربع دار جزو ضربی $(\text{ج}+1)^{2}$ سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ج}}$ اور ی دونوں تفرقی مساوات کو پورا کرتے ہیں جبکہ ج = -۱ - نیز ی میں ج = ۱ رکھنے سے ایک حل حاصل ہوتا ہے - اس لیے بظاہر یہ معلوم ہوتا ہے کہ اس تفرقی مساوات سے جس کا رتبہ صرف دو ہے تین حل حاصل ہوئے ہیں ان کو حسب ذیل تفصیلاً لکھو:

$$\text{ک}\,\text{لا}^{-1}\left\{-\frac{1}{2}\text{لا}^{2} + \frac{1}{4\times 2^{2}}\text{لا}^{4} - \frac{1}{6\times 4^{2}\times 2^{2}}\text{لا}^{6} + \ldots\right\} = \text{ک}\,\text{ع}' \text{ فرض کرو}$$

$$\text{ک}\,\text{ع}\,\text{لوک}\,\text{لا} + \text{ک}\,\text{لا}^{-1}\left\{1 + \frac{1}{2^{2}}\text{لا}^{2} - \frac{1}{4\times 2^{2}}\left(\frac{2}{2}+\frac{1}{4}\right)\text{لا}^{4}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{6\times 4^{2}\times 2^{2}}\left(\frac{2}{2}+\frac{2}{4}+\frac{1}{6}\right)\text{لا}^{6} + \ldots\right\} = \text{ک}\,\text{و}'$$

فرض کرو

[1] بلاشبہ بشرطیکہ $\text{ا}_{0} \neq 0$ - اس طرح ثابت ہو جاتی ہے ہم اس کو آسانی سے یہ مان لیتے ہیں کہ ک $\neq 0$ -

اور $\text{ک لا}\left\{ ۲ - \frac{۱}{۴}\text{لا}^{۲} + \frac{۱}{۶\times ۴^{۲}}\text{لا}^{۴} - \frac{۱}{۸\times ۶^{۲}\times ۴^{۲}}\text{لا}^{۶} + \dots \right\} = \text{ک ط}$، فرض کرو

یہ ظاہر ہے کہ ط = −۴ ع، اس لیے فی الحقیقت ہم نے صرف دو حل جو خطی طور پر غیر تابع ہیں معلوم کئے ہیں اور کامل ابتدائی ا ع + ب و ہے۔ یہ سلسلے لا کی تمام قیمتوں کے لیے مستدق ہیں اور اس کو آسانی سے ثابت کیا جا سکتا ہے۔

ان سلسلوں کی مماثلت (مستقل ضارب کو چھوڑ کر) جو ی کے جملہ میں علی الترتیب ج = ۱ اور ج = −۱ درج کرنے سے حاصل ہوئے ہیں اتفاقی نہیں ہے۔ یہ چیز ربط (۴)

$$\text{ا}_{\text{ن}}\left\{(\text{ج}+\text{ن})^{۲}-۱\right\}+\text{ا}_{\text{ن}-۲}=۰$$

سے فوراً واضح ہو جاتی ہے۔ چنانچہ اگر ج = ۱ تو اس سے

$$\text{ا}_{\text{ن}}\left\{(۱+\text{ن})^{۲}-۱\right\}+\text{ا}_{\text{ن}-۲}=۰، \quad \dots\dots\dots (۶)$$

اور ج = −۱ تو $\text{ا}_{\text{ن}}\left\{(-۱+\text{ن})^{۲}-۱\right\}+\text{ا}_{\text{ن}-۲}=۰$

اس لیے اس میں ن کی بجائے ن + ۲ رکھنے سے

$$\text{ا}_{\text{ن}+۲}\left\{(۱+\text{ن})^{۲}-۱\right\}+\text{ا}_{\text{ن}}=۰، \quad \dots\dots\dots (۷)$$

اس طرح $\left[\frac{\text{ا}_{\text{ن}+۲}}{\text{ا}_{\text{ن}}}\right]_{\text{ج}=-۱} = \left[\frac{\text{ا}_{\text{ن}}}{\text{ا}_{\text{ن}-۲}}\right]_{\text{ج}=۱} \quad \dots\dots (۸)$

چونکہ $[\text{ی}]_{\text{ج}=-۱}$ میں خطوط وحدانی کے باہر $\text{لا}^{۱}$ جزو ضربی اور $[\text{ی}]_{\text{ج}=۱}$ میں

ایسا جزو ضربی لا ہے اس لیے رشتہ (۸) کا حقیقت میں یہ مطلب
ہے کہ مذکورہ دو سلسلوں میں لا کی متناظر قوتوں کے سر ایک (۱۱۶)
دوسرے کے ساتھ ایک مستقل نسبت رکھتے ہیں۔ پہلے سلسلے میں
بظاہر ایک رقم زائد معلوم ہوتی ہے یعنی وہ جس میں $لا^{ا}$ شریک ہے
لیکن یہ رقم جزو ضربی (ج + ۱) کی وجہ سے معدوم ہو جاتی ہے۔

عام طور پر اگر قوت نمائی مساوات کی دو اصلوں عہ اور به (عہ > به) میں ایک صحیح عدد کا فرق ہو اور اگر ج = به رکھنے سے ی کے بعض سر لامتناہی ہو جائیں تو ہم ا کی بجائے ک (ج - به) رکھ کر ی کی شکل میں ترمیم کرتے ہیں اور پھر ی کی ترمیم شدہ شکل اور $\frac{جف\ ی}{جف\ ج}$ میں ج = به رکھ کر دو غیر تابع حل حاصل کرتے ہیں۔ ی میں ج = عہ رکھنے سے جو نتیجہ حاصل ہوگا وہ صرف اس نتیجہ کا ایک عددی ضعف ہوگا جو ج = به رکھنے سے حاصل ہوتا ہے۔

## حل طلب مثالیں

(۱) رتبہ ۲ کی بیسل کی مساوات

$$لا^{۲}\frac{فر^{۲}ما}{فر\ لا^{۲}} + لا\frac{فر\ ما}{فر\ لا} + (لا^{۲} - ۴)\ ما = ۰$$

(۲) $لا(۱ - لا)\frac{فر^{۲}ما}{فر\ لا^{۲}} - ۳\ لا\frac{فر\ ما}{فر\ لا} - ما = ۰$

(۳) لا (۱ − لا) فر۲ ما / فر لا۲ − (۱ + ۳ لا) فر ما / فر لا − ما = ۰

(۴) (لا + لا۲ + لا۳) فر۲ ما / فر لا۲ + ۳ لا۲ فر ما / فر لا − ا ما = ۰

## ۹۹ ـ صورت (۴) ـ جبکہ قوت نمائی مساوات کی اصلوں میں ایک صحیح عدد کا فرق ہو اور ان میں سے ایک اصل سے ی کا ایک سر غیر متعین ہو جائے۔

مساوات

(۱ − لا۲) فر۲ ما / فر لا۲ + ۲ لا فر ما / فر لا + ما = ۰

پر غور کرو ـ

حسب سابق عمل کرنے پر

ج (ج − ۱) = ۰ . . . . . . . . . . . . (۱)

ا۱ (ج + ۱) ج = ۰ . . . . . . . . . . (۲)

ا۲ (ج + ۲) (ج + ۱) + ا۰ {− ج (ج − ۱) + ۲ ج + ۱} = ۰ (۳)

ا۳ (ج + ۳) (ج + ۲) + ا۱ {− (ج + ۱) ج + ۲ (ج + ۱) + ۱} = ۰ ... (۴)

اور علیٰ ہذا القیاس ـ

(۱) سے ج = ۰ یا ۱

(۲) میں ا۱ کا سر معدوم ہوتا ہے جبکہ ج = ۰۔ لیکن چونکہ مساوات میں کوئی اور رقم نہیں ہے اس لیے اس سے ا۱ لاتناہی ہونے کی بجائے غیر متعین ہو جاتا ہے۔

اگر ج = ۱ تو $\text{ا}_{۱} = ۰$

اس طرح اگر ج = ۰ تو مساواتوں (۳)، (۴)، .... سے

$$۲\,\text{ا}_{۲} + \text{ا}_{۰} = ۰،$$
$$۶\,\text{ا}_{۳} + ۳\,\text{ا}_{۱} = ۰،$$
$$۱۲\,\text{ا}_{۴} + ۳\,\text{ا}_{۲} = ۰،$$

وغیرہ

اور اس لیے

$$[\text{ی}]_{\text{ج}=۰} = \text{ا}_{۰}\left\{۱ - \frac{۱}{۲}\text{لا}^{۲} + \frac{۱}{۸}\text{لا}^{۴} + \frac{۱}{۸۰}\text{لا}^{۶} \ldots\ldots\right\}$$
$$+\,\text{ا}_{۱}\left\{\text{لا} - \frac{۱}{۲}\text{لا}^{۳} + \frac{۱}{۴۰}\text{لا}^{۵} + \frac{۳}{۵۶۰}\text{لا}^{۷} \ldots\ldots\right\} \quad (۱۱۷)$$

اس میں دو اختیاری مستقل ہیں اس لیے اس کو کامل ابتدائی سمجھا جا سکتا ہے۔ اس سلسلہ کو $|\text{لا}| < ۱$ کے لیے مستدق ثابت کیا جا سکتا ہے۔

لیکن ہمیں ایک دوسرا حل، ج = ۱ رکھنے سے ملتا ہے۔ سروں کو محسوب کرنے سے

$$[\text{ی}]_{\text{ج}=۱} = \text{ا}_{۰}\,\text{لا}\left\{۱ - \frac{۱}{۲}\text{لا}^{۲} + \frac{۱}{۴۰}\text{لا}^{۴} + \frac{۳}{۵۶۰}\text{لا}^{۶} + \ldots\ldots\right\}$$

یعنے پہلے حل کے دوسرے سلسلہ کو ایک مستقل جزو ضربی سے ضرب دیا گیا ہے۔

اس کی اسی استدلال سے پیش بینی کی جا سکتی تھی جس کو صورت (۳) میں بیان کیا گیا ہے۔

عام طور پر اگر قوت نمائی مساوات کی دو اصلوں عہ اور بہ (عہ > بہ) میں ایک صحیح عدد کا فرق ہو اور اگر ج = بہ رکھنے سے

ی کا ایک سر غیر متعین ہو جائے تو کامل ابتدائی $\text{ج} = \text{ب}$ رکھنے سے حاصل ہو جاتا ہے کیونکہ اس میں دو اختیاری مستقل شریک ہوتے ہیں۔ ۱۸ میں $\text{ج} = \text{ع}$ رکھنے سے جو نتیجہ حاصل ہوتا ہے وہ صرف (ایک جزو ضربی کے ساتھ) ایسا سلسلہ ہوتا ہے جو پہلے حل کے سلسلوں میں شامل رہتا ہے۔

## حل طلب مثالیں

(۱) رتبہ ایک کی لیجنڈر کی مساوات

$$(1-\text{لا}^2)\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر لا}^2} - 2\,\text{لا}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + 2\,\text{ما} = 0$$

(۲) رتبہ ن کی لیجنڈر کی مساوات

$$(1-\text{لا}^2)\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر لا}^2} - 2\,\text{لا}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{ن}(\text{ن}+1)\,\text{ما} = 0$$

(۳) $$\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر لا}^2} + \text{لا}^2\,\text{ما} = 0$$

(۴) $$(2+\text{لا}^2)\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر لا}^2} + \text{لا}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + (1+11)\,\text{ما} = 0$$

## ۱۰۰ — چند صورتیں جن میں اوپر کا طریقہ ناکام ہوتا ہے

چونکہ $\text{ف}^{\frac{1}{\text{لا}}}$ کو لا کی صعودی قوتوں میں نہیں پھیلایا جا سکتا اس لیے ہمیں اس طریقہ کی ناکامی کی توقع رکھنی چاہئے جبکہ تفرقی مساوات کا

حل ایسی شکل کا ہو - مساوات $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ ما}}{\text{فر لا}^{۲}} - \text{ما} = ۰$ پر غور کرو جس کے حل $\text{وٗ}^{\text{ی}}$ اور $\text{قوٗ}^{\text{ی}}$ ہیں - اس کو $\text{ی} = \frac{۱}{\text{لا}}$ رکھ کر مستحیل کرو تو

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر ی}} = \frac{\text{فر لا}}{\text{فر ی}} \times \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = -\frac{۱}{\text{ی}^{۲}}\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = -\text{لا}^{۲}\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$$

اور

$$\frac{\text{فر}^{۲}\text{ ما}}{\text{فر ی}^{۲}} = \frac{\text{فر لا}}{\text{فر ی}}\,\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}\left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر ی}}\right) = -\text{لا}^{۲}\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}\left(-\text{لا}^{۲}\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)$$

$$= \text{لا}^{۴}\frac{\text{فر}^{۲}\text{ ما}}{\text{فر لا}^{۲}} + ۲\,\text{لا}^{۳}\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$$

پس نئی مساوات

$$\text{لا}^{۴}\frac{\text{فر}^{۲}\text{ ما}}{\text{فر لا}^{۲}} + ۲\,\text{لا}^{۳}\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} - \text{ما} = ۰ \qquad (۱۱۸)$$

ہے -

اگر ہم معمولی طریقہ استعمال کرتے ہیں تو قوت نمائی مساوات $ا_۰ = ۰$ حاصل ہوتی ہے جس کی کوئی اصلیں[۱] نہیں ہیں کیونکہ بموجب فرض $ا_۰ \neq ۰$ -

ہم کہتے ہیں کہ ایسی تفرقی مساوات لا کی صعودی قوتوں میں کوئی باقاعدہ تکملے نہیں رکھتی - بلاشبہ $\text{وٗ}^{\frac{۱}{\text{لا}}}$ اور $\text{قوٗ}^{\frac{۱}{\text{لا}}}$ کو $\frac{۱}{\text{لا}}$ کی قوتوں میں پھیلایا جاسکتا ہے -

حسب ذیل مثالوں سے دوسری ممکن صورتیں جہاں مذکورہ بالا طریقہ ناکام رہتا ہے واضح ہوں گی مثلاً جبکہ قوت نمائی مساوات کی صرف ایک اصل ہو اور اس سے ممکن ہے ایک مستدق سلسلہ

[۱] یا ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ دو لامتناہی اصلیں ہیں -

حاصل ہو یا نہ ہو۔

یہ قابل ذکر ہے کہ مساوات کو ہر صورت میں شکل

$$لا^{۲} \frac{فر^{۲} ما}{فر لا^{۲}} + لاع (لا) \frac{فر ما}{فر لا} + ق (لا) ما = ۰$$

میں رکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ جب طریقہ کامیاب ہوتا ہے تو ع (لا) اور ق (لا)، لا = ۰ کے لیے محدود ہوتے ہیں لیکن ناکامی کی ہر صورت میں یہ شرط پوری نہیں ہوتی۔

مثلاً اوپر کی مثال میں

$$ع (لا) = ۲$$

ق (لا) = $-\frac{۱}{لا^{۲}}$ جو لامتناہی ہو جاتا ہے جبکہ لا = ۰

# حل طلب مثالیں

(۱) بیسل کی مساوات کو اندراج لا = $\frac{۱}{ی}$ سے مستحیل کرو۔

اِس سے ثابت کرو کہ لا کی نزولی قوتوں میں اس کے کوئی باقاعدہ تکملے نہیں ہیں۔

(۲) ثابت کرو کہ حسب ذیل مساوات کا صرف ایک تکملہ ہے جو لا کی صعودی قوتوں میں باقاعدہ ہے۔ اِس کو معلوم کرو۔

$$لا^{۳} \frac{فر^{۲} ما}{فر لا^{۲}} + لا (۱ - ۳ لا) \frac{فر ما}{فر لا} - ۲ ما = ۰$$

(۳) ما = و لا$^{۲}$ (۱ + ۲ لا) رکھ کر پچھلی مثال کا کامل ابتدائی معلوم کرو۔

(۴) ثابت کرو کہ حسب ذیل مساوات کا کوئی ایسا تکملہ نہیں ہے جو لا کی صعودی قوتوں میں باقاعدہ ہو کیونکہ وہ ایک سلسلہ جو حاصل ہوتا ہے لا کی تمام قیمتوں کے لیے متبع ہے:

$$\text{لا}^{2}\,\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}} - (۱ - ۳\text{لا})\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{ما} = ۰$$

(۵) پچھلی مثال کے دو تکملے معلوم کرو جو لا کی نزولی قوتوں میں باقاعدہ ہوں۔

(۶) ثابت کرو کہ حسب ذیل مساوات کے کوئی ایسے تکملے نہیں ہیں جو لا کی صعودی قوتوں میں یا نزولی قوتوں میں باقاعدہ ہوں (119)

$$\text{لا}^{4}(۱ - \text{لا}^{2})\,\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}} + ۲\text{لا}^{3}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - (۱ - \text{لا}^{2})^{3}\,\text{ما} = ۰$$

[یہ وہ مساوات ہے جس کا ابتدائی $\text{ا قو}^{\text{لا}+\text{لا}^{-1}} + \text{ب قو}^{\text{لا}-\text{لا}^{-1}}$ ہے]

## نویں باب پر متفرق مثالیں

(۱) $$۹\text{لا}^{2}\,\frac{\text{فر}^{3}\text{ما}}{\text{فرلا}^{3}} + ۲۷\text{لا}\,\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}} + ۸\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - \text{ما} = ۰$$

کے تین غیر تابع حل معلوم کرو۔

(۲) مساوات $$\text{لا}^{2}\,\frac{\text{فر}^{3}\text{ما}}{\text{فرلا}^{3}} + ۳\text{لا}\,\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}} + (۱ - \text{لا})\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - \text{ما} = ۰$$

کے تین غیر تابع حل، شکل

$$\text{ی}،\ \frac{\text{جفی}}{\text{جفج}}\ \text{اور}\ \frac{\text{جف}^{2}\text{ی}}{\text{جفج}^{2}}$$

کے، معلوم کرو۔

(۳) ثابت کرو کہ استحالہ $\text{ما} = \frac{۱}{\text{ب و}}\,\frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}}$ سے ریکٹی کی مساوات

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{ب ما}^{2} = \text{ج لا}^{\text{م}}$$

خطی شکل فر^۲ و / فر لا^۲ - ب ج و لا^م = ۰

میں تحویل ہوتی ہے۔

(۴) ثابت کرو کہ اگر جہ صفر ہو نہ ایک صحیح عدد تو زائد ہندسی (Hypergeometric) حل

لا(۱-لا) فر^۲ ما / فر لا^۲ + {جہ - (عہ + بہ + ۱) لا} فر ما / فر لا - عہ بہ ما = ۰

کے حل (مستدق اگر |لا| < ۱)

فا(عہ، بہ، جہ، لا) اور لا^(۱-جہ) فا(عہ - جہ + ۱، بہ - جہ + ۱، ۲ - جہ، لا)

ہیں جہاں فا(عہ، بہ، جہ، لا) سے زائد ہندسی سلسلہ

۱ + (عہ بہ / ۱×جہ) لا + (عہ(عہ+۱) بہ(بہ+۱) / ۱×۲×جہ(جہ+۱)) لا^۲

+ (عہ(عہ+۱)(عہ+۲) بہ(بہ+۱)(بہ+۲) / ۱×۲×۳×جہ(جہ+۱)(جہ+۲)) لا^۳ + ...

تعبیر ہوتا ہے۔

(۵) ثابت کرو کہ اندراجات لا = ۱ - ی اور لا = ۱/ی سے زائد ہندسی مساوات علی الترتیب

ی(۱-ی) فر^۲ ما / فر ی^۲ + {عہ + بہ + ۱ - جہ - (عہ + بہ + ۱) ی} فر ما / فر ی

- عہ بہ ما = ۰

اور ی^۲(۱-ی) فر^۲ ما / فر ی^۲ + ی {(۱ - عہ - بہ) - (۲ - جہ) ی} فر ما / فر ی

+ عہ بہ ما = ۰

میں مستحیل ہوتی ہے جن میں پہلی مساوات کی شکل بھی زائد ہندسی ہے۔

(۱۲۰) پس پچھلی مثال سے یہ اخذ کرو کہ ابتدائی مساوات کے چار مزید حل

فا (عہ، بہ، عہ + بہ + ۱ - جہ، ۱ - لا)،

(۱ - لا)^جہ - عہ - بہ^ فا (جہ - بہ، جہ - عہ، ۱ + جہ - عہ - بہ، ۱ - لا)،

لا^-عہ^ فا (عہ، عہ + ۱ - جہ، عہ + ۱ - بہ، لا^-۱^)

اور لا^-بہ^ فا (بہ، بہ + ۱ - جہ، بہ + ۱ - عہ، لا^-۱^)

ہیں -

(۶) ثابت کرو کہ تغیرات ما = (۱ - لا)^ن^ صا سے زائد ہندسی مساوات دوسری زائد ہندسی مساوات میں مستحیل ہوتی ہے اگر

ن = جہ - عہ - بہ

پس ثابت کرو کہ ابتدائی مساوات کے دو مزید حل

(۱ - لا)^جہ - عہ - بہ^ فا (جہ - عہ، جہ - بہ، جہ، لا)

اور لا^۱ - جہ^ (۱ - لا)^جہ - عہ - بہ^ فا (۱ - عہ، ۱ - بہ، ۲ - جہ، لا)

ہیں -

[**نوٹ**: مثال ۵ سے یہ معلوم ہوا کہ زائد ہندسی مساوات کے ابتدائی دو حلوں سے کس طرح دو دوسرے حل استحالوں لا = ۱ - ی اور لا = ۱/ی کے ذریعہ معلوم کئے جا سکتے ہیں۔ اسی طرح لا = ۱/(۱ - ی)، لا = ی/(ی - ۱)، لا = (ی - ۱)/ی میں سے ہر استحالہ سے دو زائد حل حاصل ہوتے ہیں اور اس طرح کل ۱۲ حل ملتے ہیں۔ مثال ۶ کی طرح عمل کرنے پر یہ تعداد دگنی کیجا سکتی ہے اور کل ۲۴ حل حاصل ہوں گے۔ یہ پانچ.

استحالے معہ مماثل استحالہ لا = ی کے ایک گروہ بناتے ہیں یعنے ایسے دو استحالوں کو علی التواتر عمل میں لانے سے ہمیشہ ابتدائی گروہ کا ایک استحالہ حاصل ہوگا ۔]

(۷) ثابت کرو کہ اگر ۲ن ایک طاق صحیح عدد (مثبت یا منفی) نہ ہو تو لیجنڈر کی مساوات

$$(1-\text{لا}^2)\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}^2} - 2\,\text{لا}\,\frac{\text{فر}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}} + \text{ن}(\text{ن}+1)\,\text{ما} = 0$$

کے حل، لا کی نزولی قوتوں میں باقاعدہ،

$$\text{لا}^{-\text{ن}-1}\ \text{فا}\left(\tfrac{1}{2}\text{ن}+\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2}\text{ن}+1,\ \text{ن}+\tfrac{3}{2},\ \text{لا}^{-2}\right)$$

اور

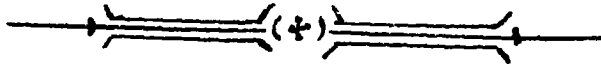
$$\text{لا}^{\text{ن}}\ \text{فا}\left(-\tfrac{1}{2}\text{ن},\ \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\text{ن},\ \tfrac{1}{2}-\text{ن},\ \text{لا}^{-2}\right)$$

ہیں ۔

[وہ حل جو صورت ۲ن = -۱ کے جواب میں ہے اس طرح حاصل ہو سکتا ہے کہ دفعہ ۷ ۹ کی مثال (۴) کے نتیجہ میں لا کو لا$^{-1}$ میں تبدیل کیا جائے ]

(۸) ثابت کرو کہ رتبہ ن کی بیسل کی مساوات کے حل کی شکل اس پر منحصر ہوتی ہے کہ آیا ن صفر ہے، یا صحیح عدد ہے، یا غیر صحیح عدد اگرچہ قوت نما مساوات کی اصلوں کا فرق ن نہ ہو بلکہ ۲ن ہو ۔

(۱۲۱)

# دسواں باب*

## پکرڈ، کوشی[1] اور فرابنیس کے مسائل موجودگی

**۱۰۱ ۔ مسئلہ کی نوعیت** ۔ گذشتہ بابوں میں بعض خاص شکلوں کی تفرقی مساواتوں کے حل حاصل کرنے کے لیے ہم نے متعدد ترکیبیں معلوم کیں ۔ ایک زمانہ میں علماء ریاضی کو ایک ایسے طریقہ کے انکشاف کی امید تھی کہ کسی تفرقی مساوات کا حل معلومہ تفاعلوں یا ان کے تکملوں کی ایک محدود تعداد کی رقوم میں بیان ہو سکے ۔ لیکن جب یہ حقیقت واضح ہوئی کہ یہ ناممکن ہے تو یہ سوال پیدا ہوا کہ آیا تفرقی مساوات کا حل عام طور پر ہوتا بھی ہے یا نہیں اور اگر ہوتا ہے تو کس قسم کا ۔

اس سوال پر بحث کرنے کے دو جدا جدا طریقے ہیں ۔ ایک پکرڈ کا طریقہ ہے جس کو مثالوں کے ذریعہ واضح کیا جا چکا ہے (دفعہ ۸۳ اور ۸۴) ۔ اس میں ہم نے متواتر تقرب حاصل کئے جو بظاہر

---

* مطالعہ اول میں اس باب کو چھوڑ دو ۔

[1] آگسٹن لوئی کوشی (پیرس ۱۷۸۹ء تا ۱۸۵۷ء) کو تفاعلوں کے نظریہ کا اور تفرقی مساواتوں کے موجودہ نظریہ کا موجد سمجھا جا سکتا ہے ۔ موصوف نے محدود تکملوں کو گھیر (Contour) تکمل کے ذریعہ معلوم کرنے کا طریقہ تجویز کیا ۔

ایک انتہا کی طرف مائل تھے۔ اب ہم ثابت کریں گے کہ یہ تقرب فی الواقع ایک انتہا کی طرف مائل ہوتے ہیں اور یہ کہ اس انتہا سے حل حاصل ہوتا ہے۔ اس طرح ہم ثابت کریں گے کہ خاصی عام نمونہ کی تفرقی مساوات کا حل موجود ہوتا ہے۔ اس قسم کے مسئلہ کو [illegible] کہتے ہیں۔ پکرڈ کا طریقہ مشکل نہیں ہے اور اس لیے دوسرے طریقہ کے متعلق کچھ کہنے سے پیشتر ہم فوراً اس پر متوجہ ہوں گے۔ یہ ذہن نشین رہے کہ اس باب کا مقصد مخصوص مساواتوں کے ایسے حل دریافت کرنا نہیں ہے جو عملاً بھی مفید ہوں۔ ہم ثابت کریں گے کہ حلوں کو حاصل کرنے میں جو مفروضے اختیار کئے گئے تھے وہ صحیح تھے اور نیز ہم ان شرطوں کو ٹھیک طور پر بیان کریں گے جو حل کردہ مساواتوں کے مشابہ مساواتوں میں صحت کا یقین دلانے کے لیے کافی ہیں۔ ان مساواتوں کو اس قدر عام شکل میں رکھا گیا ہے جس قدر ممکن ہے۔

(۱۲۲) **۱۰۲ ــ پکرڈ کا متواتر تقرب کا طریقہ۔** اگر $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ف}(\text{لا، ما})$ اور ما = ب جبکہ لا = ا تو لا کی رقوم میں ما کی قیمت کے لیے حسب ذیل متواتر تقرب حاصل ہوتے ہیں:

$$\text{ب} + \int_{\text{ا}}^{\text{لا}} \text{ف}(\text{لا، ب})\,\text{فرلا} = \text{ما}_1 \quad \text{فرض کرو}$$

$$\text{ب} + \int_{\text{ا}}^{\text{لا}} \text{ف}(\text{لا، ما}_1)\,\text{فرلا} = \text{ما}_2 \quad \text{،، ،،}$$

$$\text{ب} + \int_{\text{ا}}^{\text{لا}} \text{ف}(\text{لا، ما}_2)\,\text{فرلا} = \text{ما}_3 \quad \text{،، ،،}$$

اور علیٰ ہذا القیاس۔

ہم اس طریقہ کو مختلف مثالوں پر استعمال کرکے سمجھا چکے ہیں۔ دفعات (۸۳ اور ۸۴) ہم نے وہ صورت لی تھی جس میں ف (لا، ما) = لا + ما² اور ب = ا = ۰

۱ـ Existence Theorem

چنانچہ حاصل ہوا تھا

$$\text{ما}_1 = \frac{1}{2}\text{لا}^2 ,$$

$$\text{ما}_2 = \frac{1}{2}\text{لا}^2 + \frac{1}{20}\text{لا}^5 ,$$

$$\text{ما}_3 = \frac{1}{2}\text{لا}^2 + \frac{1}{20}\text{لا}^5 + \frac{1}{160}\text{لا}^8 + \frac{1}{4400}\text{لا}^{11}$$

یہ تفاعل، لا کی کافی چھوٹی قیمت کے لیے ایک انتہا کی طرف مائل نظر آتے ہیں۔ اِس دفعہ کا مقصد یہ ثابت کرنا ہے کہ یہ امر نہ صرف اِس مخصوص مثال میں درست ہے بلکہ اُس وقت بھی جبکہ ف (لا، ما) چند شرطوں کو جو مشخص کی جائیں گی پورا کرے۔

شرطیں یہ ہیں کہ دو مثبت عدد ھ اور ک کے درست انتخاب کے بعد ہم یہ دعویٰ کرسکیں کہ ا - ھ اور ا + ھ کے درمیان لا کی تمام قیمتوں کے لیے اور ب - ک اور ب + ک کے درمیان ما کی تمام قیمتوں کے لیے ہم ایسے مثبت عدد م اور ا معلوم کرسکتے ہیں کہ

$$(1) \quad |\text{ف}(\text{لا}،\text{ما})| < \text{م}$$

$$(2) \quad |\text{ف}(\text{لا}،\text{ما}) - \text{ف}(\text{لا}،\text{ما}')| < \text{ا}\,|\text{ما} - \text{ما}'|$$

جہاں ما اور ما' زیر بحث سعت میں ما کی کوئی دو قیمتیں ہیں۔

اوپر کی مثال میں $\text{ف}(\text{لا}،\text{ما}) = \text{لا} + \text{ما}^2$، شرط (۱) صریحاً پوری ہوتی ہے اگر م کی بجائے کوئی ایسا مثبت عدد لیا جائے جو $|\text{ا}| + \text{ھ} + (|\text{ب}| + \text{ک})^2$ سے بڑا ہو۔

نیز $|(\text{لا} + \text{ما}^2) - (\text{لا} + \text{ما}'^2)| = |\text{ما} + \text{ما}'|\,|\text{ما} - \text{ما}'| < 2(|\text{ب}| + \text{ک})\,|\text{ما} - \text{ما}'|$

اِس لیے شرط (۲) بھی پوری ہوتی ہے اگر $\text{ا} = 2(|\text{ب}| + \text{ک})$ لیا جائے۔
عام صورت میں ہم اُن فرقوں پر غور کرتے ہیں جو متواتر

تقربوں کے درمیان ہوتے ہیں —

$ا_۱ - ب = \int_{۱}^{لا} ف (لا، ب) فرلا$ بموجب تعریف

لیکن $|ف (لا، ب)| < م$ بموجب شرط (۱)

اس لیے $|ا_۱ - ب| < |\int_{۱}^{لا} م فرلا|$ یعنے $< م|لا - ۱| < م ھ$ ... (۱)

نیز $ا_۲ - ا_۱ = ب + \int_{۱}^{لا} ف (لا، ا_۱) فرلا - ب - \int_{۱}^{لا} ف (لا، ب) فرلا$ (۱۲۳)
بموجب تعریف

$= \int_{۱}^{لا} \{ف (لا، ا_۱) - ف (لا، ب)\} فرلا$

لیکن $|ف (لا، ا_۱) - ف (لا، ب)| < ا |ا_۱ - ب|$ حسب شرط (۲)

$< ا م |لا - ۱|$ (۱) سے

اس لیے $|ا_۲ - ا_۱| < |\int_{۱}^{لا} ا م (لا - ۱) فرلا|$ یعنے $< \frac{۱}{۲} ا م (لا - ۱)^۲$

$< \frac{۱}{۲} ا م ھ^۲ \ldots$ (۲)

اسی طرح $|ا_ن - ا_{ن-۱}| < \frac{۱}{|ن} م ا^{ن-۱} ھ^ن \ldots$ (۳)

اب لامتناہی سلسلہ

$ب + م ھ + \frac{۱}{۲} م ا ھ^۲ + \ldots + \frac{۱}{|ن} م ا^{ن-۱} ھ^ن \ldots$

$= \frac{م}{ا} (ﺀ^{اھ} - ۱) + ب$

ھ، ا، اور م کی تمام قیمتوں کے لیے مستدق ہے۔
اس لیے لامتناہی سلسلہ

$$ب + (ما_1 - ب) + (ما_2 - ما_1) + \ldots\ldots + (ما_ن - ما_{ن-1}) + \ldots\ldots$$

جس کی ہر رقم گذشتہ سلسلہ کی متناظر رقم کے مساوی یا اس سے کم ہے بدرجۂ اولیٰ مستدق ہے۔
اس کا یہ مطلب ہے کہ تواتر

$$ما_1 = ب + (ما_1 - ب)$$

$$ما_2 = ب + (ما_1 - ب) + (ما_2 - ما_1)$$

ایک معین انتہا [فرض کرو ما (لا)] کی طرف مائل ہے اور یہی ثابت کرنا تھا۔

اب یہ ثابت کرنا چاہیے کہ ما تفرقی مساوات کو پورا کرتا ہے۔ پہلی نظر میں یہ بالکل درست معلوم ہوتا ہے لیکن فی الواقع ایسا نہیں ہے کیونکہ ثبوت کے بغیر یہ فرض نہیں کر لینا چاہیے کہ

$$نہا_{ن \to \infty} \int_{ا}^{لا} ف(لا، ما_{ن-1}) فرلا = \int_{ا}^{لا} ف(لا، نہا_{ن \to \infty} ما_{ن-1}) فرلا$$

وہ طالب علم جو یہ جانتا ہے کہ "یکساں استدقاق" کا مفہوم کیا ہے فوراً سمجھ لے گا کہ نامساواتوں (۱)، (۲)، (۳) سے جن کو ہم نے سلسلہ کے صرف استدقاق کو ثابت کرنے کے لیے استعمال کیا ہے فی الحقیقت اس سلسلہ کا یکساں استدقاق ثابت ہوتا ہے۔ پس اگر ف (لا، ما) مسلسل ہے تو $ما_1$، $ما_2$ وغیرہ بھی مسلسل ہیں۔ اور ما مسلسل تفاعلوں کا ایک یکساں مستدق سلسلہ ہے یعنے ما خود بھی مسلسل ہے[۱] اور ما - $ما_{ن-1}$ یکساں طور پر صفر کی طرف مائل ہوتا ہے

[۱] دیکھو براموچ کی کتاب "(Infinite Series)" دفعہ ۴۵۔

جبکہ ن بڑھتا ہے۔

پس شرط (۲) کی رو سے ف(لا، ما) - ف(لا، $م_{ن-۱}$) یکساں طور پر صفر کی جانب مائل ہے۔

اِس سے ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ

(۱۲۴)

$$\int_{لا۰}^{لا} \{ف(لا،ما) - ف(لا، م_{ن-۱})\} فرلا$$

صفر کی جانب مائل ہے۔

اِس طرح رشتہ

$$م_ن = ب + \int_{لا۰}^{لا} ف(لا، م_{ن-۱}) فرلا$$

کی انتہا

$$ما = ب + \int_{لا۰}^{لا} ف(لا، ما) فرلا$$

ہے، اِس لیے[۱] $\frac{فرما}{فرلا} = ف(لا، ما)$ اور ما = ب جبکہ لا = ۱۔

پس ثبوت مکمل ہو چکا۔

## ۱۰۳ - کوشی کا طریقہ - لامتناہی سلسلوں کے لیے مسئلے

کوشی کا طریقہ یہ ہے کہ تفرقی مساوات سے ایک لامتناہی سلسلہ حاصل کیا جاتا ہے اور پھر دوسرے لامتناہی سلسلہ کے ساتھ مقابلہ کر کے اُس کو مستدق ثابت کیا جاتا ہے۔ یہ دوسرا سلسلہ مساوات کا حل نہیں ہوتا لیکن اِس کے سروں کے درمیان رشتہ اصلی سلسلہ کے سروں کے درمیانی رشتہ کی بہ نسبت زیادہ سادہ اور آسان ہوتا ہے۔ اِس طریقہ کی توضیح کے لیے ہم (پہلی مثال) پہلے رتبہ کی خطی مساوات

[۱] تکملہ کو تفرق کرتے وقت طالب علم کو یہ یاد رکھنا چاہئے کہ تکملہ صرف اپنی بالائی حد کے تغیر کی وجہ سے بدلتا ہے۔

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{ع (لا)} \times \text{ما}$$

کو لیں گے۔

بلاشبہ اس مساوات کو متغیروں کی جدائی سے فوراً حل کیا جاسکتا ہے چنانچہ

$$\text{لوک ما} = \text{ج} + \int \text{ع (لا) فر لا}$$

حاصل ہوتا ہے۔

لیکن ہم یہاں اس پر لامتناہی سلسلہ کے ذریعہ اس وجہ سے بحث کر رہے ہیں کہ یہ بحث

$$\frac{\text{فر}^2 \text{ ما}}{\text{فر لا}^2} = \text{ع (لا)} \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{ق (لا)} \times \text{ما}$$

اور اعلیٰ ترتیبوں کی مساواتوں کی ذرا مشکل بحث کے بہت مشابہ ہے۔

قوت کے سلسلوں سے متعلق حسب ذیل مسئلوں کی ضرورت پیش آئے گی۔ متغیر لا کو ملتف فرض کیا گیا ہے۔ مطلق قیمتوں کو |ا$_{\text{ن}}$| کی بجائے اختصاراً بڑے حرفوں ا$_{\text{ن}}$ وغیرہ سے تعبیر کیا جائے گا۔

(ا) قوت کا سلسلہ $\sum^{\infty}$ ا$_{\text{ن}}$ لا$^{\text{ن}}$ اپنے استدقاق کے دائرہ |لا| = ر کے اندر تمام نقطوں پر مطلقاً مستدق ہوتا ہے۔

(ب) اس دائرہ کا نصف قطر ر، مساوات

$$\frac{1}{\text{ر}} = \text{نہا}_{\text{ن} \to \infty} \frac{\text{ا}_{\text{ن}+1}}{\text{ا}_{\text{ن}}}$$

سے حاصل ہوتا ہے بشرطیکہ یہ انتہا موجود ہو۔

(ج) |لا| = ر کے اندر $\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}\left(\sum^{\infty} \text{ا}_{\text{ن}} \text{ لا}^{\text{ن}}\right) = \sum^{\infty} \text{ن ا}_{\text{ن}} \text{ لا}^{\text{ن}-1}$

(د) اگر قوت کے دو سلسلے ہوں تو اُس علاقہ کے اندر جو اِن کے استدقاق کے دائروں میں مشترک ہے

$$(\sum^{\infty} \text{ا}_{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}})(\sum^{\infty} \text{ب}_{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}}) = \sum^{\infty} (\text{ا}_{\text{ن}} \text{ب}_{\text{۰}} + \text{ا}_{\text{ن-۱}} \text{ب}_{\text{۱}} + \cdots + \text{ا}_{\text{۰}} \text{ب}_{\text{ن}}) \text{لا}^{\text{ن}}$$

(ع) اگر دائرہ $|\text{لا}| = \text{ر}$ کے اندر لا کی تمام قیمتوں کے لیے

$$\sum^{\infty} \text{ا}_{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}} = \sum^{\infty} \text{ب}_{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}} \quad \text{تو} \quad \text{ا}_{\text{ن}} = \text{ب}_{\text{ن}}$$

(ف) $\text{ا}_{\text{ن}} < \text{م} \, \text{ر}^{\text{ن}}$ جہاں م، سلسلہ کے اُس حاصل جمع کی مطلق قیمت سے بڑا ہے جو دائرہ $|\text{لا}| = \text{ر}$ پر کے نقطوں کے لیے حاصل ہوتا ہے جبکہ اِس دائرہ پر سلسلہ مستدق ہو۔

اِن مسئلوں کے ثبوت براموچ کی کتاب (Infinite Series) میں ملیں گے:

(ا) دفعہ ۸۲ میں [دوسرے اڈیشن کے دفعہ ۸۴ میں]

(ب)، جو ڈلمبر کی نسبتی جانچ کا صریح نتیجہ ہے، دفعہ ۱۲ میں

(ج) دفعہ ۵۲ میں [دفعہ ۱۲ا دوسرے اڈیشن میں دفعہ ۱۲،۲ ہے]

(د) دفعہ ۵۴ میں

(ع) دفعہ ۵۲ میں

(ف) دفعہ ۸۲ میں [دوسرے اڈیشن کے دفعہ ۸۴ میں]

آئندہ چل کر یکساں استدقاق پر دو مسئلوں کی ضرورت ہوگی لیکن ہم اِس کو یہاں اس وقت تک ملتوی کرتے ہیں جب تک کہ اِن کی ضرورت نہ ہو۔

## ۱۰۴ — $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{ما ع(لا)}$ کے حل (سلسلہ میں) کا استدقاق[1]

فرض کرو کہ ع (لا) کو قوت کے سلسلہ $\sum_{0}^{\infty} \text{ع}_{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}}$ میں پھیلایا جا سکتا ہے جو دائرہ $|\text{لا}| = \text{ر}$ پر اور اِس کے اندر ہر جگہ مستدق ہے۔ ہم ثابت کریں گے کہ ایک حل $\text{ما} = \sum_{0}^{\infty} \text{ا}_{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}}$ حاصل ہو سکتا ہے جو اِس دائرہ کے اندر مستدق ہے۔
تفرقی مساوات میں اندراج کرنے پر

$$\sum \text{ن}\,\text{ا}_{\text{ن}}\,\text{لا}^{\text{ن}-1} = \sum \text{ا}_{\text{ن}}\,\text{لا}^{\text{ن}} \sum \text{ع}_{\text{ن}}\,\text{لا}^{\text{ن}} \qquad \text{(مسئلہ ج)}$$

$$= \sum_{0}^{\infty} (\text{ا}_{\text{ن}}\text{ع} + \text{ا}_{\text{ن}-1}\text{ع}_1 + \text{ا}_{\text{ن}-2}\text{ع}_2 + \dots + \text{ا}\,\text{ع}_{\text{ن}})\,\text{لا}^{\text{ن}}$$

(مسئلہ د)

$\text{لا}^{\text{ن}-1}$ کے سروں کو مساوی رکھنے سے (مسئلہ ع)

$$\text{ن}\,\text{ا}_{\text{ن}} = \text{ا}_{\text{ن}-1}\text{ع} + \text{ا}_{\text{ن}-2}\text{ع}_1 + \text{ا}_{\text{ن}-3}\text{ع}_2 + \dots + \text{ا}\,\text{ع}'_{\text{ن}-1} \qquad \dots\dots (1)$$

اِس لیے $\text{ا}'$، $\text{ا}'_1$، $\text{ا}'_2$ ...... اور $\text{ع}'$، $\text{ع}'_1$، $\text{ع}'_2$ ...... کی مطلق قیمتوں کے لیے جبکہ انہیں متناظر بڑے حرفوں سے تعبیر کیا گیا ہو حاصل ہوتا ہے (۱۲۶)

$$\text{ن}\,\text{ا}_{\text{ن}} \leqslant \text{ا}_{\text{ن}-1}\text{ع} + \text{ا}_{\text{ن}-2}\text{ع}_1 + \text{ا}_{\text{ن}-3}\text{ع}_2 + \dots + \text{ا}\,\text{ع}'_{\text{ن}-1} \qquad \dots\dots (2)$$

---

[1] اِس کو پڑھنے سے پہلے دفعہ ۷ کا مکرر مطالعہ کرو۔

فرض کرو کہ م ایک مثبت صحیح عدد ہے جو دائرہ $|\text{لا}| = \text{ر}$ پر ع(لا) کی جو قیمت ہے اُس سے بڑا ہے۔ تب

$$\text{ع}_{\text{ن}} < \text{م}\,\text{ر}^{-\text{ن}} \quad \ldots\ldots (۳) \quad (\text{مسئلہ ف})$$

اِس لیے (۲) اور (۳) سے

$$\text{ا}_{\text{ن}} < \frac{\text{م}}{\text{ن}}\left(\text{ا}_{\text{ن}-۱} + \text{ا}_{\text{ن}-۲}\,\text{ر}^{-۱} + \text{ا}_{\text{ن}-۳}\,\text{ر}^{-۲} + \ldots + \text{ا}_{۰}\,\text{ر}^{-\text{ن}+۱}\right) \quad \ldots\ldots (۴)$$

فرض کرو کہ $\text{ب}_{\text{ن}}$ $(\text{ن} > ۰)$ (۴) کی بائیں جانب کو تعبیر کرتا ہے
اور فرض کرو کہ $\text{ب}_{۰}$ کوئی مثبت عدد ہے جو $\text{ا}_{۰}$ سے بڑا ہے پس $\text{ا}_{\text{ن}} < \text{ب}_{\text{ن}}$

لیکن

$$\frac{\text{م}}{\text{ن}}\left(\text{ا}_{\text{ن}-۱} + \text{ا}_{\text{ن}-۲}\,\text{ر}^{-۱} + \text{ا}_{\text{ن}-۳}\,\text{ر}^{-۲} + \ldots + \text{ا}_{۰}\,\text{ر}^{-\text{ن}+۱}\right)$$

$$= \frac{\text{م}}{\text{ن}}\,\text{ا}_{\text{ن}-۱} + \frac{\text{ن}-۱}{\text{ن}\,\text{ر}}\cdot\frac{\text{م}}{\text{ن}-۱}\left(\text{ا}_{\text{ن}-۲} + \text{ا}_{\text{ن}-۳}\,\text{ر}^{-۱} + \ldots + \text{ا}_{۰}\,\text{ر}^{-\text{ن}+۲}\right)$$

پس $\text{ب}_{\text{ن}}$ کی اوپر کے مطابق تعریف کرنے سے

$$\text{ب}_{\text{ن}} = \frac{\text{م}}{\text{ن}}\,\text{ا}_{\text{ن}-۱} + \frac{(\text{ن}-۱)}{\text{ن}} \times \frac{\text{ب}_{\text{ن}-۱}}{\text{ر}}$$

اِس لیے $\text{ب}_{\text{ن}-۱}$ سے تقسیم کرنے اور $\frac{\text{ا}_{\text{ن}-۱}}{\text{ب}_{\text{ن}-۱}}$ کی بجائے ک استعمال کرنے سے (تاکہ $۰ \leq \text{ک} < ۱$)

$$\frac{\text{ب}_{\text{ن}}}{\text{ب}_{\text{ن}-۱}} = \frac{\text{مک}}{\text{ن}} + \frac{۱}{\text{ر}} - \frac{۱}{\text{ن}\,\text{ر}}$$

اِس لیے

$$\text{نہا}_{ن \to \infty} \frac{ب_ن}{ب_{ن-۱}} = \frac{۱}{ر}$$

اِس لیے سلسلہ $\sum ب_ن \, لا^ن$ دائرہ $|لا| = ر$ کے اندر مستدق ہے۔

(مسئلہ ب)

اِس لیے سلسلہ $\sum ا_ن \, لا^ن$ اسی دائرہ کے اندر بدرجۂ اولیٰ مستدق ہے کیونکہ

$$ا_ن < ب_ن$$

تمام سروں $ا_۱، ا_۲، \ldots$ کو (۱) سے $ع_۱، ع_۲، \ldots$ کی (جو معلومہ فرض کیے گئے ہیں) اور اختیاری مستقل $ا_۰$ کی رقوم میں معلوم کیا جا سکتا ہے۔

**۱۰۵ — اِس ثبوت کے متعلق چند امور۔** طالب علم کو گذشتہ دفعہ کے سمجھنے میں غالباً بڑی دقت ہوئی ہوگی۔ لیکن کام کی تفصیلات سے پریشان نہیں ہونا چاہیئے۔ خاص بات یہ ہے کہ ہم $\text{نہا} \frac{ا_ن}{ا_{ن-۱}} = \frac{۱}{ر}$ کو ثابت کرنا پسند کرتے لیکن بد قسمتی سے وہ رشتہ جس سے $ا_۱، ا_۲$ وغیرہ کی تعریف ہوتی ہے ذرا پیچیدہ ہے۔ اس کو ہم اول ن مقداروں $ع_۰، ع_۱، ع_۲، \ldots، ع_{ن-۱}$ کو خارج کر کے مختصر بناتے ہیں۔ لیکن اس کے بعد بھی رشتہ پیچیدہ ہی رہتا ہے کیونکہ اس میں ن ا شامل ہوتے ہیں۔ ہمیں تو ایسے رشتہ کی ضرورت ہے جس میں صرف دو ا شامل ہوں۔ $ب_ن$ کی مناسب تعریف اختیار کرنے سے $ب_ن$ اور $ب_{ن-۱}$ کے درمیان ایک ایسا رشتہ مل جاتا ہے (۱۲۷)

جس سے ہم

$$\text{نہا}_{\text{ن}\to\infty}\ \frac{\text{ب}_{\text{ن}}}{\text{ب}_{\text{ن}-۱}} = \frac{۱}{\text{ر}}$$

پر پہنچتے ہیں۔

ہم مکرر یہ کہتے ہیں کہ ایک بہت ہی سادہ مساوات کی اسقدر پیچیدہ بحث کا صرف یہ مقصد ہے کہ ایک نمونہ حاصل ہو جائے تاکہ طالب علم اس کو دوسری صورتوں میں نقل کر سکے۔

## حل طلب مثالیں

(۱) اگر ع (لا) اور ق (لا) کو قوت کے ایسے سلسلوں میں پھیلایا جا سکے جو دائرہ لا = ر کے اندر اور اس کے اوپر تمام نقطوں کے لیے مستدق ہوں تو ثابت کرو کہ ایک ایسا سلسلہ، اُسی دائرہ کے اندر مستدق، پہلے دو سلسلوں کے سروں (اختیاری مستقل) کی رقوم میں معلوم کیا جا سکتا ہے کہ وہ

$$\frac{\text{فر}^۲\,\text{لا}}{\text{فر}\,\text{ما}^۲} = \text{ع}\,(\text{لا}) \times \frac{\text{فر}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}} + \text{ق}\,(\text{لا})\,\text{ما}$$

کو پورا کرے۔

[یہاں $\text{ن}\,(\text{ن}-۱)\,\text{ا}_{\text{ن}} = (\text{ن}-۱)\,\text{ا}_{\text{ن}-۱}\,\text{ع}_۰ + (\text{ن}-۲)\,\text{ا}_{\text{ن}-۲}\,\text{ع}_۱ + \cdots$

$\cdots + \text{ا}_۱\,\text{ع}_{\text{ن}-۲} + \text{ا}_{\text{ن}-۲}\,\text{ق}_۰ + \text{ا}_{\text{ن}-۳}\,\text{ق}_۱ + \cdots + \text{ا}_۰\,\text{ق}_{\text{ن}-۲}$

پس اگر م کوئی عدد ہو جو ع (لا) اور ق (لا) دونوں کی اُن مطلق قیمتوں سے جو دائرہ لا = ر پر حاصل ہوتی ہیں بڑا ہو تو

$$\text{ا}_{\text{ن}} < \frac{\text{م}}{\text{ن}}\left\{(\text{ا}_{\text{ن}-۱} + \text{ا}_{\text{ن}-۲}\,\text{ر}^{-۱} + \cdots + \text{ا}_۱\,\text{ر}^{-\text{ن}+۲})\right.$$

$$+\left(\text{ا}_{\text{ن}-۲}+\text{ا}_{\text{ن}-۳}\,\text{س}^{-۱}+\cdots+\text{ا}_{.}\,\text{س}^{-\text{ن}+۲}\right)$$

$$<\frac{\text{م}}{\text{ن}}(۱+\text{س})\left(\text{ا}_{\text{ن}-۱}+\text{ا}_{\text{ن}-۲}\,\text{س}^{-۱}+\cdots+\text{ا}_{.}\,\text{س}^{-\text{ن}+۱}\right)$$

[اس نامساوات کی بائیں جانب کو $\text{ب}_{\text{ن}}$ سے تعبیر کرکے حسب سابق عمل کرو۔]

(۲) مساوات $\frac{\text{فر}^{۳}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۳}}=\text{ع}(\text{لا})\times\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}}+\text{ق}(\text{لا})\times\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}+\text{ر}(\text{لا})\times\text{ما}$

کے لیے متشابہ نتیجے ثابت کرو۔

## ۱۰۶ — فرابنیس کا طریقہ - ابتدائی بحث۔

اگر طالب علم گذشتہ دفعہ کو خوب سمجھ چکا ہے تو فرابنیس کے طریقہ سے جو سلسلہ حاصل ہوتا ہے اس کے استدقاق کی تحقیق کرنے کا مشکل مسئلہ ذہن نشین کرنے میں آسانی ہوگی۔ گذشتہ باب میں (جس کو آگے بڑھنے سے پہلے اچھی طرح سمجھ لینا ضروری ہے) ہم نے یہ دیکھا کہ بعض صورتوں میں ہمیں دو سلسلے حاصل ہوئے تھے جن میں صرف لا کی قوتیں شریک تھیں لیکن دو صورتوں میں لوکارتم موجود تھے۔

پہلی صورت میں عمل کا طریقہ گذشتہ دفعہ کے طریقہ سے بہت مشابہ ہے۔ لیکن دوسری صورت میں ایک نئی مشکل پیدا ہوتی ہے۔ لوکارتموں والے سلسلے، سلسلوں کو بدل ج کے لحاظ سے تفرق کرنے سے حاصل ہوئے تھے۔ اب تفرق انتہا لینے کا ایک عمل ہے اور ایک لامتناہی سلسلہ کو جمع کرنا بھی انتہا لینے کا دوسرا عمل ہے۔ یہ کسی طرح واضح نہیں کہ نتیجہ وہی ہوگا خواہ ان دو عملوں میں سے کسی ایک کو پہلے کیا جائے اس صورت میں بھی جبکہ تفرقی سروں والا سلسلہ مستدق ہوتا ہے۔ (۲۸۱)

ہم ثابت کریں گے ہم نے جو صورت لی ہے اس میں عمل تفرق

جائز ہے لیکن چونکہ ہمارے سلسلے ان شرطوں کو پورا کرتے ہیں جو رقم بہ رقم تفرق کرنے کے لیے کافی ہیں ورنہ طویل اور پریشان کن ہے۔

مضمون ذیل پڑھتے وقت طالب علم کو اولاً جبر و مقابلہ کی تفصیلات سے چشم پوشی کرنی چاہیئے اور اپنی توجہ کو خاص کر استدلال کے عام رخ پر مرکوز رکھنا چاہیئے۔ جب یہ اچھی طرح ذہن نشیں ہو جائے تو پھر وہ ان تفصیلات پر غور کر کے ان کی تصدیق کر سکتا ہے۔

## ۱۰۷۔ فرابنیس کے سلسلہ میں سروں کو حاصل کرنا جبکہ قوت نما مساوات کی اصلوں میں ایک صحیح عدد یا صفر کا فرق نہ ہو۔

جملہ

$$\text{لا}^2 \frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2} - \text{لا}\,\text{ع(لا)} \times \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - \text{ق(لا)} \times \text{ما}$$

$$= \text{فہ}\left(\text{لا}، \text{ما}، \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}، \frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2}\right)$$ فرض کرو

پر غور کرو جہاں ع(لا) اور ق(لا) دونوں کو قوت کے سلسلوں $\sum_{\text{ن}=0}^{\infty} \text{ع}_{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}}$ اور $\sum_{\text{ن}=0}^{\infty} \text{ق}_{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}}$ میں جو دائرہ $|\text{لا}| = \text{ر}$ کے اندر اور اس کے اوپر مستدق ہیں پھیلایا جا سکتا ہے۔

ہم تفرقی مساوات

$$\text{فہ}\left(\text{لا}، \text{ما}، \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}، \frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2}\right) = 0 \qquad \ldots\ldots (1)$$

کا حل حاصل کرنے کی کوشش کرتے ہیں۔

اگر ما کی بجائے $\text{لا}^{\text{ج}} \sum_{\text{ن}=0}^{\infty} \text{ا}_{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}}$ (جس میں $\text{ا}_0 \neq 0$) رکھا جائے تو $\text{فہ}\left(\text{لا}، \text{ما}، \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}، \frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2}\right)$

$$\sum_{\cdot}^{\infty} \text{ا}_{\text{ن}}\, \text{لا}^{\text{ج}+\text{ن}} \left\{ (\text{ج}+\text{ن})(\text{ج}+\text{ن}-۱) - (\text{ج}+\text{ن})\, \text{ع}(\text{لا}) - \text{ق}(\text{لا}) \right\}$$

ہو جاتا ہے، فرض کرو کہ یہ $= \sum_{\cdot}^{\infty} \text{گ}_{\text{ن}}\, \text{لا}^{\text{ج}+\text{ن}}$

جہاں $\text{گ}_{\cdot} = \text{ا}_{\cdot} \left\{ \text{ج}(\text{ج}-۱) - \text{ع}_{\cdot}\text{ج} - \text{ق}_{\cdot} \right\}$

اور $\text{گ}_{\text{ن}} = \text{ا}_{\text{ن}} \left\{ (\text{ج}+\text{ن})(\text{ج}+\text{ن}-۱) - \text{ع}_{\cdot}(\text{ج}+\text{ن}) - \text{ق}_{\cdot} \right\}$

$$- \text{ا}_{\text{ن}-۱} \left\{ \text{ع}_{۱}(\text{ج}+\text{ن}-۱) + \text{ق}_{۱} \right\}$$

$$- \text{ا}_{\text{ن}-۲} \left\{ \text{ع}_{۲}(\text{ج}+\text{ن}-۲) + \text{ق}_{۲} \right\} \cdots - \text{ا}_{\cdot}(\text{ع}_{\text{ن}}\text{ج} + \text{ق}_{\text{ن}})$$

اختصار کے لیے

$\text{ج}(\text{ج}-۱) - \text{ع}_{\cdot}\text{ج} - \text{ق}_{\cdot}$ کو $\text{ف}(\text{ج})$

سے تعبیر کرو تو

$$(\text{ج}+\text{ن})(\text{ج}+\text{ن}-۱) - \text{ع}_{\cdot}(\text{ج}+\text{ن}) - \text{ق}_{\cdot} = \text{ف}(\text{ج}+\text{ن})$$

تب $\text{گ}_{\text{ن}} = ۰$ اگر

$$\text{ا}_{\text{ن}}\,\text{ف}(\text{ج}+\text{ن}) = \text{ا}_{\text{ن}-۱} \left\{ \text{ع}_{۱}(\text{ج}+\text{ن}-۱) + \text{ق}_{۱} \right\} \qquad (۱۲۹)$$

$$+ \text{ا}_{\text{ن}-۲} \left\{ \text{ع}_{۲}(\text{ج}+\text{ن}-۲) + \text{ق}_{۲} \right\} + \cdots + \text{ا}_{\cdot}(\text{ع}_{\text{ن}}\text{ج} + \text{ق}_{\text{ن}}) \cdots (۲)$$

اگر ہم ا وں کو ایسا منتخب کریں کہ تمام گ معدوم ہو جائیں اور اگر حاصل شدہ سلسلہ $\sum_{\cdot}^{\infty} \text{ا}_{\text{ن}}\, \text{لا}^{\text{ن}}$ مستدق ہو تو گویا (۱) کا حل حاصل ہو جائے گا۔

اب چونکہ $\text{ا}_{\cdot} \neq ۰$ اس لیے $\text{گ}_{\cdot} = ۰$ سے

ج (ج-۱) - ع ج - ق = ۰، ...... (۳)

یہ ج میں دو درجی مساوات ہے اور اس کو قوت نما مساوات کہتے ہیں۔

فرض کرو کہ اس کی اصلیں عہ اور بہ ہیں۔

اگر ج کی ان قیمتوں میں سے کسی ایک کو مساواتوں گ۱ = ۰، گ۲ = ۰، گ۳ = ۰، ..... میں درج کیا جائے تو ا۱، ا۲، ا۳..... کی قیمتیں شکل

$$ا_ن = \frac{ا . \text{ھ}_ن (ج)}{ف (ج+ن) ف (ج+ن-۱) ... ف (ج+۱)} ، ...(۴)$$

میں حاصل ہوتی ہیں جس میں ھن (ج)، ج میں ایک کثیر رقمی ہے۔ اگر طالب علم کو اس موقع پر کوئی مشکل محسوس ہو تو ا۱ اور ا۲ کی قیمتوں کو پوری طرح محسوب کرنا چاہئے۔

اُس عمل میں جس کے ذریعہ اُن کو (۲) سے حاصل کیا جاتا ہے

ف (ج + ن) سے تقسیم کرنے کی ضرورت پڑتی ہے۔ یہ صرف اُس وقت جائز ہے جبکہ ف (ج + ن) ≠ ۰۔

اب چونکہ ف (ج) = (ج - عہ) (ج - بہ)

ف (ج + ن) = (ج + ن - عہ) (ج + ن - بہ)

اس لیے ف (عہ + ن) = ن (عہ + ن - بہ)، ..... (۵)

اور ف (بہ + ن) = ن (بہ + ن - عہ)، ..... (۶)

اس طرح اگر عہ اور بہ میں ایک صحیح عدد کا فرق نہیں ہے تو مقسوم علیہ معدوم نہیں ہو سکتے اور اس لیے ان کو معلوم کرنے کا اوپر کا عمل ٹھیک ہے۔ اگر عہ = بہ تو صرف ایک سلسلہ حاصل ہوگا۔

**۱۰۸ ۔ حاصل شدہ سلسلے کا استدقاق۔** فرض کرو کہ

م ایک مثبت عدد ہے جو اُن تمام نقطوں پر جو دائرہ $|لا| = ر$ پر ہیں
ع (لا) اور ق (لا) کی مطلق قیمتوں سے بڑا ہے ۔

تب
$$ع_س < م ر^{-س}$$
اور
$$ق_س < م ر^{-س}$$

اِس لیے $|ع_س (ج + ن - س) + ق_س| < م (ج + ن - س + ۱) ر^{-س}$

اِن نامساواتوں اور (۲) سے

$$ا_ن < م \{ ا_{ن-۱} (ج + ن) ر^{-۱} + \ldots$$

$$+ ا_۰ (ج + ۱) ر^{-ن} \} \,/\, ف (ج + ن) \quad \ldots\ldots (۷)$$

(۷) کی بائیں جانب کے جملے کو $ب_ن$ سے تعبیر کرو اور فرض کرو کہ
$ا_ن < ب_ن$ ۔ اِس سے $ب_ن$ کی تعریف ملتی ہے اگر $ن > ۰$ ۔ فرض
کرو کہ $ب_۰$ کی تعریف یہ کی گئی ہے کہ وہ کوئی مثبت عدد ہے جو
$ا_۰$ سے بڑا ہے ۔ $ب_ن$ کی اِس تعریف سے حاصل ہوتا ہے

$$ب_{ن+۱} ف (ج + ن + ۱) - ب_ن ف (ج + ن) ر^{-۱} = ا_ن م (ج$$

$$+ ن + ۱) ر^{-۱} = ک ب_ن م (ج + ن + ۱) ر^{-۱} \text{ جہاں } ۰ < ک < ۱$$

$$(۱۳۰) \qquad \text{اِس لیے} \quad \frac{ب_{ن+۱}}{ب_ن} = \frac{ف (ج + ن) + ک م (ج + ن + ۱)}{ر ف (ج + ن + ۱)}$$

$$\text{یعنی} = \frac{|(ج+ن)(ج+ن-۱) - ع(ج+ن) - ق| + ک\,م(ج+ن+۱)}{م\,|(ج+ن+۱)(ج+ن) - ع(ج+ن+۱) - ق|}$$

اب ن کی بڑی قیمتوں کے لیے بائیں جانب کا جملہ قیمت

$$\frac{ن^2}{م\,ن^2} = \frac{۱}{م}$$

کے قریب آتا ہے۔ اِس لیے

$$\text{نہا}_{ن \to \infty} \frac{ب_{ن+۱}}{ب_ن} = \frac{۱}{م}$$

اِس لیے سلسلہ $\sum_{}^{\infty} ب_ن لا^ن$ اور بدرجہ اولیٰ سلسلہ $\sum_{}^{\infty} ا_ن لا^ن$، دائرہ $|لا| = م$ کے اندر مستدق ہیں۔

پس جب، عہ اور بہ میں ایک صحیح عدد کا فرق نہیں ہوتا تو دو مستدق لامتناہی سلسلے حاصل ہوتے ہیں جو تفرقی مساوات کو پورا کرتے ہیں۔

## ۱۰۹ـ ترمیم جبکہ قوت نمائی مساوات کی اصلوں میں فرق صفر ہو یا ایک صحیح عدد ہو۔

جب، عہ اور بہ مساوی ہوتے ہیں تو اس طریقہ سے صرف ایک سلسلہ حاصل ہوتا ہے۔ جب، عہ اور بہ میں ایک صحیح عدد کا فرق ہوتا ہے تو یہ طریقہ بڑی اصل کے لیے درست ہوتا ہے لیکن چھوٹی اصل کے لیے نہیں کیونکہ اگر عہ - بہ = ر (ایک مثبت صحیح عدد) تو (۵) اور (۶) سے

$$ف(عہ+ن) = ن(عہ+ن-بہ) = ن(ن+ر)$$

لیکن $$ف(بہ+ن) = ن(بہ+ن-عہ) = ن(ن-ر)$$

جو معدوم ہوتا ہے جبکہ ن = ر اور اس لیے $ا_ر$ کے نسب نما میں ایک

جزو ضربی صفر ہو جاتا ہے جبکہ ج = بہ۔ جیسا کہ پچھلے باب کے دفعہ ۹۸ اور ۹۹ میں سمجھایا جا چکا ہے اس سے چند ا کی قیمتیں لا متناہی یا غیر معین حاصل ہوتی ہیں۔ اس مشکل کو اس طرح رفع کیا جا سکتا ہے کہ ما کی مفروضہ شکل میں ترمیم کی جائے چنانچہ ا کی بجائے ک (ج - بہ) رکھا جائے۔ اس کا نتیجہ یہ ہوگا کہ $ا، ا_۱، \dots ا_{ر-۱}$ سب کے سب صفر ہوں گے

اور $ا_ر، ا_{ر+۱}، \dots$ سب کے سب محدود ہوں گے جبکہ ج کو بہ کے

مساوی رکھا جائے۔ اس ترمیم سے ما کی مفروضہ شکل میں ا وں کے درمیان جو رشتہ ہے وہ نہیں بدلے گا اور اس لیے اوپر کی استدقاق کی تحقیقات پر کوئی اثر نہیں پڑے گا۔

## ۱۱۰ — ایک لامتناہی سلسلہ کا تفرق بلحاظ مبدل ج کے جبکہ قوت نما مساوات کی اصلوں میں ایک صحیح عدد کا فرق ہو

دفعہ ۱۰۷ میں لامتناہی سلسلہ $لا^{ج} \sum_{ن}^{\infty} ا_ن لا^{ن}$ حاصل ہوا جہاں ا ن ج کے تفاعل ہیں۔ گذشتہ باب کی طرح ج کے لحاظ سے اس سلسلہ کے تفرق پر غور کرنا ہوگا۔ تفرق کے بعد ج کو چھوٹی اصل بہ کے مساوی رکھا جائے۔

(۱۳۱) اب تفرق کے عمل میں ہم لا کو مستقل سمجھ سکتے ہیں۔ اس سلسلہ کو متغیر ج کے تفاعلوں کا ایک سلسلہ خیال کیا جا سکتا ہے۔ فرض کرو کہ

یہ سلسلہ $\sum$ سان (ج) ہے جہاں

$$سان (ج) = لا^{ج+ن} ا_ن$$

$$= \frac{لا^{ج+ن} \; ا_. \; ص_ن (ج)}{ف (ج+ن) ف (ج+ن-۱) \dots ف (ج+۱)} ، \quad (۲) \text{ سے}$$

جس میں ا = ک (ج ۔ ب) اور (ج ۔ ب) کو تقسیم کر کے خارج کرنا ہوگا اگر وہ نسب نما میں واقع ہو۔

اب گرسا نے[1] (Cours d'Analyse Vol. II, p. 98) یہ ثابت کیا ہے کہ اگر (۱) تمام سا ایسے تفاعل ہیں کہ وہ ایک خاص علاقہ میں جو ایک بند گھیرے میں محدود ہے تحلیلی اور کل شکلی[2] (Holomorphie) ہیں اور اس گھیرے پر مسلسل ہیں اور اگر (۲) اِن تفاعلوں سا کا سلسلہ اس گھیرے پر یکساں مستدق ہے تو رقم بہ رقم تفرق کرنے سے ایک مستدق سلسلہ حاصل ہوگا جس کا مجموعہ ابتدائی سلسلہ کے مجموعہ کا تفرقی سر ہوگا۔ کل شکلی اور تحلیلی کی تعریفوں کے لیے گرسا کی محولہ بالا کتاب کا ابتدائی حصہ دیکھو۔ یہ واضح ہے کہ تفاعل سا اِن شرطوں کو پورا کرتے ہیں اور مسلسل ہیں جب تک کہ ہم ج کی اُن قیمتوں سے دور رہتے ہیں جن سے یہ تفاعل لامتناہی ہو جاتے ہیں۔ یہ قیمتیں ع ۔ ۱، ب ۔ ۱، ع ۔ ۲، ب ۔ ۲ وغیرہ ہیں۔ اِن سے بچنے کے لیے علاقہ کو ایک ایسے دائرہ کے اندر لو جس کا مرکز ج = ب اور نصف قطر ایک سے کم ہو۔

اب ہم ثابت کریں گے کہ اس علاقہ کے اندر سلسلہ ہر جگہ یکساں طور پر مستدق ہے۔ اس سے یہ ثابت ہوگا کہ وہ ایک ایسے علاقہ کے گھیرے پر یکساں طور پر مستدق ہے جو پہلے علاقہ کے اندر اور اُس کے مشابہ اور قدر سے چھوٹا ہے۔

فرض کرو کہ س ایک مثبت صحیح عدد ہے جو بڑے علاقہ کے اندر ج کی بڑی سے بڑی قیمت سے بڑا ہے۔

تب اِس علاقہ کے اندر ج کی تمام قیمتوں کے لیے س سے بڑی ن کی قیمتوں کی صورت میں،

$$ف (ج + ن) = | (ج + ن - ۱) (ج + ن) - ع (ج + ن) - ق . ا$$

ف کی تعریف کی بموجب

[1] دوسرا ایڈیشن صفحہ ۹۸ - چوتھا ایڈیشن صفحہ ۹۶
[2] Holomorphic

$\leqslant$ (ج + ن)$^{2}$ - (ع + ۱) (ج + ن) - ق،

کیونکہ |ا - و| $\geqslant$ |ا| - |و|

$>$ (ن - س)$^{2}$ - (م + ۱) (س + ن) - م

کیونکہ ع $<$ م اور ق $<$ م

$>$ ن$^{2}$ + ع ن + ب، فرض کرو ........ (۸)

جہاں ع اور ب،

ن، لا، یا ج پر منحصر نہیں ہیں۔ ........

ن کی کافی بڑی قیمتوں کے لیے (مثلاً فرض کرو ن $>$ م) یہ آخری جملہ ہمیشہ مثبت ہوگا۔

فرض کرو کہ علاقہ میں ج کی تمام قیمتوں کے لیے

م [ا$_{م-۱}$ (ج + م) ر$^{-۱}$ + ا$_{م-۲}$ (ج + م - ۱) ر$^{-۲}$ + ......

+ ا$_{۰}$ (ج + ۱) ر$^{-م}$ ] ........... (۹)

کی اعظم قیمت ھ سے تعبیر ہوتی ہے۔

(۱۳۲) اب اگر ت$_{م}$، ب$_{م}$ سے بڑا کوئی مثبت عدد ہو اور اگر ن کی م سے بڑی قیمتوں کے لیے ت$_{ن}$ کی یہ تعریف کی جائے کہ

$$ت_{ن} = \frac{م\{ت_{ن-۱} (س+ن) ر^{-۱} + \cdots + ت_{م} (س+م+۱) ر^{-ن+م}\} + ھ ر^{-ن+م}}{ن^{۲} + ع ن + ب}$$ ........ (۱۰)

$$\text{تو } ت_{م+۱} = \frac{م ت_{م} (س+م+۱) ر^{-۱} + ھ ر^{-۱}}{(م+۱)^{۲} + ع (م+۱) + ب}$$

جس کا شمار کنندہ، $ب_{م+۱}$ کے شمار کنندہ سے بڑا اور جس کا نسب نما، $ب_{م+۱}$ کے نسب نما سے چھوٹا ہے {(۸) اور (۹) کی رو سے} اور $ب_ن$ کی تعریف سے جو یہ ہے کہ وہ (۷) کے بائیں جانب کے جملہ کو تعبیر کرتا ہے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$ت_{م+۱} > ب_{م+۱}$$

اِسی طرح $ت_ن > ب_ن$، ن کی م سے بڑی تمام قیمتوں کیلیے

(۱۰) سے ثابت ہوتا ہے کہ $\lim_{ن \to \infty} \frac{ت_{ن+۱}}{ت_ن} = \frac{۱}{ر}$ ۔ کام کا یہ حصہ اُس کام کے اِس قدر مشابہ ہے جو دفعہ ۱۰۸ کے آخر میں کیا گیا ہے کہ اِس کو طالب علم کے لیے مشق کے طور پر چھوڑ دیا جاتا ہے۔

پس $\sum_{م}^{\infty} ت_ن ر_۱^ن$ مستدق ہے اگر $ر_۱ < ر$

اِس لیے دائرہ $|لا| = ر_۱$ کے اندر اور اُس علاقہ کے اندر جو ج کے لیے مختص کیا گیا ہے

$$|ا_ن لا^{ج+ن}| < ا_ن ر_۱^{س+ن} < ب_ن ر_۱^{س+ن} < ت_ن ر_۱^{س+ن}$$

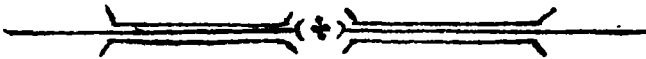
اِس سے معلوم ہوتا ہے کہ $\sum ا_ن لا^{ج+ن}$ سے ویرسٹراس کی م والی جانچ جو یکساں استدقاق (برامویچ دفعہ ۴۴) کے لیے ہے پوری ہوتی ہے کیونکہ $ر_۱$، س اور تمام ت، ج کے غیر تابع ہیں۔

اِس سے اُس ثبوت کی تکمیل ہوتی ہے کہ ح سالی = ح لن لاَ^ج+ن
تمام مقررہ شرطوں کو پورا کرتا ہے، اِس لیے ج کے لحاظ سے تفرق اب جایز ہے۔ یہ دائرہ |لا| = س کے اندر درست ہے۔ ہم دائرہ سا کو اتنا بڑا لے سکتے ہیں کہ دائرہ |لا| = س کے اندر کا ہر نقطہ اسمیں شامل ہو جائے۔

اگر قوت نمائی مساوات کی اصلوں میں ایک صحیح عدد کا فرق ہونے کی بجائے وہ مساوی ہوں تو اوپر کے کام میں صرف یہ فرق پڑے گا کہ اب ا کی بجائے ک (ج - بہ) کو رکھنے کی ضرورت نہیں ہوگی کیونکہ لن کے نسب نما میں کوئی (ج - بہ) جزو ضربی کے طور پر شریک نہیں ہوگا۔

[نویں اور دسویں باب کے تکملہ کے لیے دفعہ ۱۰۱ تا ۱۰۷ کا مطالعہ کرو۔ اِن میں باقاعدہ تکملوں[1]، فوش کا مسئلہ، معمولی اور نادر نقطوں، فوشی نمونہ کی مساواتوں، اختصاصی نمائندہ[2]، طبعی[3] اور زیر طبعی[4] تکملوں سے بحث کی گئی ہے۔]

---

[1] Regular Integrals

[2] Characteristic Index

[3] Normal

[4] Subnormal

(۱۳۳)

# گیارہواں باب

## تین متغیروں والی معمولی تفرقی مساواتیں اور متناظر منحنی اور سطحیں۔

۱۱۱ — اب ہم چند سادہ تفرقی مساواتوں پر غور کریں گے جن سے فضا میں مرتسمہ منحنیوں کے اور اُن سطحوں کے خواص معلوم ہوں گے جن پر منحنی واقع ہیں یا جن کو منحنی علی القوائم قطع کرتے ہیں (جیسا کہ برقی سکونیات میں ہم قوہ سطحیں قوت کے خطوں کو علی القوائم قطع کرتی ہیں)۔ اس باب کی معمولی[۱] تفرقی مساواتوں اور آئندہ باب کی جزئی تفرقی مساواتوں میں قریب کا رشتہ ہے۔

آگے بڑھنے سے پیشتر طالب علم کو ہندسہ مجسمات دُہرالینا چاہئے بالخصوص ہمیں اس واقعہ کی ضرورت پڑے گی کہ ایک منحنی کے مماس کی سمتی جیوب التمام

$$\left( \frac{فرلا}{فرس} ، \frac{فرما}{فرس} ، \frac{فری}{فرس} \right)$$

ہوتی ہیں یعنے وہ نسبت فرلا : فرما : فری میں ہوتی ہیں۔

منتقل سروں والی ہمزاد خطی مساواتوں کو تیسرے باب میں سمجھایا جا چکا ہے۔

---

[۱] یعنے اِن میں جزئی تفرقی سر شریک نہیں ہوتے۔

## ۱۱۲ — ہمزاد مساواتیں $\frac{\text{فرلا}}{\text{ف}} = \frac{\text{فرما}}{\text{ق}} = \frac{\text{فری}}{\text{ر}}$

اِن مساواتوں سے یہ بیان ہوتا ہے کہ ایک خاص منحنی کے کسی نقطہ (لا، ما، ی) پر کے مماس کی سمتی جیوب التمام (ف، ق، ر) کے متناسب ہیں۔ اگر ف، ق، ر مستقل ہوں تو اس طرح ایک خط مستقیم حاصل ہوگا یا زیادہ صحیح یہ ہے کہ خطوط مستقیم کا ایک دوہرا لامتناہی نظام حاصل ہوگا کیونکہ ایسا ایک خط فضاء کے کسی نقطہ میں سے گزرتا ہے۔ لیکن اگر ف، ق اور ر، لا، ما اور ی کے تفاعل ہوں تو منحنیوں کا ایک متشابہ نظام حاصل ہوگا جن میں سے کسی ایک کے متعلق یہ سمجھا جا سکتا ہے کہ وہ ایک متحرک نقطہ سے جو مسلسل اپنی سمت حرکت بدلتا ہے تکوین پاتا ہے۔ برقی سکونیات میں قوت کے خط[۵] ایسا نظام بناتے ہیں۔ (۱۳۴)

مثال (۱) $\frac{\text{فرلا}}{1} = \frac{\text{فرما}}{1} = \frac{\text{فری}}{1}$ (۱)

صریحاً تکملے

لا − ی = ا (۲)

ما − ی = ب (۳)

ہیں یہ دو مستویوں کی مساواتیں ہیں جو خط

$\frac{\text{لا} - \text{ا}}{1} = \frac{\text{ما} - \text{ب}}{1} = \frac{\text{ی}}{1}$ (۴)

---

[۵] قوت کے خطوں کی مساواتیں

$$\frac{\text{فرلا}}{\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}}} = \frac{\text{فرما}}{\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}}} = \frac{\text{فری}}{\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ی}}}$$

ہیں جن میں فہ قوہ تفاعل ہے۔

میں متقاطع ہوتے ہیں۔ اِس خط کو اختیاری مستقلوں ا اور ب کے درست انتخاب سے کسی دئے ہوئے نقطہ میں سے گذارا جاسکتا ہے مثلاً (ف، گ، ھ) میں سے اگر ا = ف ـ ھ اور ب = گ ـ ھ

ذیل ام کا ایک ۔ واحد خط جو دئے ہوئے نقطہ میں سے گذرے منتخب کرنے کی بجائے ہم ایسے خط تعداد میں لا متناہی لے سکتے ہیں جو ایک دئے ہوئے منحنی کو قطع کریں مثلاً دائرہ لا$^2$ + ما$^2$ = ۴، ی = ۰ کو۔

اِس دائرہ کی مساواتوں کو (۲) اور (۳) کے ساتھ لینے سے حاصل ہوتا ہے

لا = ا،
ما = ب،

اور اِس لیے ا$^2$ + ب$^2$ = ۴ (۵)

یہ وہ رشتہ ہے جو ا اور ب کے درمیان درست ہوتا ہے جبکہ خط دائرہ کو قطع کرتا ہے۔ ا اور ب کو (۲)، (۳)، اور (۵) سے ساقط کیا جائے تو

(لا ـ ی)$^2$ + (ما ـ ی)$^2$ = ۴

یہ ایک ناقصی اسطوانہ ہے جو نظام کے اُن خطوں سے بنتا ہے جو دائرہ سے ملتے ہیں۔

اسی طرح نظام کے وہ خط جو منحنی

فہ (لا، ما) = ۰، ی = ۰

سے ملتے ہیں سطح

فہ (لا ـ ی، ما ـ ی) = ۰

کی تکوین کرتے ہیں۔

مثال (۲) فرلا / ی = فرما / ۰ = فری / ـ لا (۶)

صریحاً تکملے

$$لا^2 + ی^2 = ا ، \quad (۷)$$

$$ما = ب \quad (۸)$$

ہیں، ایک قائم مستدیر اسطوانہ اور ایک مستوی جو اس کو ایک دائرہ میں قطع کرتا ہے۔

اس لیے تفرقی مساواتیں دائروں کے ایک نظام کو تعبیر کرتی ہیں جن کے مرکز محور ما پر واقع ہیں اور جن کے مستوی اس محور پر عمود ہیں۔

ایسا ایک دائرہ فضا کے کسی نقطہ میں سے گذرتا ہے۔ وہ جو (ف، گ، ھ) میں سے گذرتا ہے

$$لا^2 + ی^2 = ف^2 + ھ^2 ، \quad ما = گ$$

ہے۔

ایک سطح نظام کے ان دائروں سے بنتی ہے جو ایک دئے ہوئے منحنی کو قطع کرتے ہیں۔

(۱۳۵) اگر دیا ہوا منحنی زائد

$$\frac{لا^2}{ا^2} - \frac{ما^2}{ب^2} = ا ، ی = ۰$$

ہو تو (۷) اور (۸) سے، اس زائد کو قطع کرنے والے دائرہ کے لیے

$$لا^2 = ا ، \quad ما = ب$$

اور اس لیے

$$\frac{ا}{ا^2} - \frac{ب^2}{ب^2} = ۱ \quad (۹)$$

ا اور ب کو (۷)، (۸)، اور (۹) سے ساقط کیا جائے تو زائد نما ایک چادری

$$\frac{لا^2 + ی^2}{ا^2} - \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$$

حاصل ہوتا ہے جو نظام کے ان دائروں سے بنا ہے جو زائد کو قطع کرتے ہیں۔

اسی طرح منحنی فہ (لا^۲، ما) = ۰، ی = ۰ سے ابتدا کی جائے تو

گردشی سطح $\text{ف}(\text{لا}^2 + \text{ی}^2 ، \text{ما}) = 0$ حاصل ہوگی۔

## ۱۱۳ — ایسی مساواتوں کا حل ضاربوں سے۔ اگر

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{ف}} = \frac{\text{فرما}}{\text{ق}} = \frac{\text{فری}}{\text{ر}}$$

تو اِن میں سے ہر کسر

$$\frac{\text{ل فرلا} + \text{م فرما} + \text{ن فری}}{\text{ل ف} + \text{م ق} + \text{ن ر}}$$

کے مساوی ہے۔

یہ طریقہ بعض مثالوں میں اُس وقت استعمال کیا جاتا ہے جبکہ نسب نما کو صفر اور شمار کنندہ کو ایک ٹھیک تفرقہ بنانا ہو یا نسب نما کو غیر صفر اور شمار کنندہ کو اِس کا تفرقہ بنانا ہو۔

**مثال (۱)**

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{ی}(\text{لا}+\text{ما})} = \frac{\text{فرما}}{\text{ی}(\text{لا}-\text{ما})} = \frac{\text{فری}}{\text{لا}^2+\text{ما}^2}$$

ہر کسر

$$= \frac{\text{لا فرلا} - \text{ما فرما} - \text{ی فری}}{\text{لا ی}(\text{لا}+\text{ما}) - \text{ما ی}(\text{لا}-\text{ما}) - \text{ی}(\text{لا}^2+\text{ما}^2)}$$

$$= \frac{\text{لا فرلا} - \text{ما فرما} - \text{ی فری}}{0}$$

اِس لیے $\text{لا فرلا} - \text{ما فرما} - \text{ی فری} = 0$

یعنے $\text{لا}^2 - \text{ما}^2 - \text{ی}^2 = \text{ا}$

اِسی طرح $\text{ما فرلا} + \text{لا فرما} - \text{ی فری} = 0$

یعنے $2\,\text{لا ما} - \text{ی}^2 = \text{ب}$

**مثال (۲)**

$$\frac{\text{فرلا}}{1+\text{ما}} = \frac{\text{فرما}}{1+\text{لا}} = \frac{\text{فری}}{\text{ی}}$$

یہاں

$$\frac{\text{فری}}{\text{ی}} = \frac{\text{فرلا}+\text{فرما}}{2+\text{لا}+\text{ما}} = \frac{\text{فرلا}-\text{فرما}}{\text{ما}-\text{لا}}$$

اس لیے لوک ی = لوک (۲ + لا + ما) + لوک ا = - لوک (لا - ما) + لوک ب

یعنے $ی = ا (۲ + لا + ما) = \frac{ب}{لا - ما}$

(۱۳۶)

## حل طلب مثالیں۔

حسب ذیل ہمزاد تفرقی مساواتوں کو پورا کرنے والے اُن منحنیوں کے نظام حاصل کرو جن کی تعریف دو مساواتوں سے ہوتی ہو جن میں سے ہر ایک میں ایک اختیاری مستقل شریک ہو۔ جہاں ممکن ہو ہندسی تعبیر بیان کرو۔

(۱) $\frac{فرلا}{لا} = \frac{فرما}{ما} = \frac{فری}{ی}$

(۲) $\frac{فرلا}{م ی - ن ما} = \frac{فرما}{ن لا - ل ی} = \frac{فری}{ل ما - م لا}$

(۳) $\frac{فرلا}{ما^۲ + ی^۲ - لا^۲} = \frac{فرما}{-۲ لا ما} = \frac{فری}{-۲ لا ی}$

(۴) $\frac{فرلا}{ما ی} = \frac{فرما}{ی لا} = \frac{فری}{لا ما}$

(۵) $\frac{فرلا}{ما + ی} = \frac{فرما}{ی + لا} = \frac{فری}{لا + ما}$

(۶) $\frac{لا فرلا}{ی^۲ - ۲ ما ی - ما^۲} = \frac{فرما}{ما + ی} = \frac{فری}{ما - ی}$

(۷) مثال ۲ کے اُس دائرہ کا نصف قطر معلوم کرو جو نقطہ (۰، ن، م) میں سے گذرتا ہے۔

(۸) وہ سطح معلوم کرو جو مثال ۴ کے منحنیوں سے جو دائرہ $ما^۲ + ی^۲ = ۱$، $لا = ۰$ کو قطع کرتے ہیں پیدا ہوتی ہے۔

(۹) وہ سطح معلوم کرو جو مثال ۱ کے خطوں سے جو مرغولہ $لا^۲ + ما^۲$

$=$ ر$^{۲}$، ی $=$ ک سس$^{-۱}$ $\frac{ما}{لا}$ کو قطع کرتے ہیں پیدا ہوتی ہے۔

(۱۰) وہ منحنی معلوم کرو جو نقطہ (۱، ۲، -۱) میں سے گذرے اور اِس کے کسی نقطہ پر سے کے مماس کی سمتی جیوب التمام اِس نقطہ کے محددوں کے مربعوں کی نسبت میں ہوں۔

## ۱۱۴ ۔ ایک دوسرا تکملہ جو پہلے تکملہ کی مدد سے معلوم کیا گیا ہو۔

مساواتوں

$$\frac{فلا}{۱} = \frac{فما}{-۲} = \frac{فی}{۳ لا^{۲} جب (ما+۲ لا)} \qquad (۱)$$

پر غور کرو۔

صریحاً ایک تکملہ

$$ما + ۲ لا = ا \qquad (۲)$$

ہے۔ اِس کو استعمال کرنے سے

$$\frac{فلا}{۱} = \frac{فی}{۳ لا^{۲} جب ا}$$

اِس لیے
$$ی - لا^{۳} جب ا = ب$$

ا کی بجائے درج کرنے سے

$$ی - لا^{۳} جب (ما + ۲ لا) = ب \qquad (۳)$$

کیا (۳) حقیقت میں (۱) کا تکملہ ہے؟

(۳) کو تفرق کرنے سے

$$\{ فی - ۳ لا^{۲} فلا جب (ما + ۲ لا) \} - لا^{۳} جم (ما + ۲ لا)$$
$$\times \{ فما + ۲ فلا \} = ۰$$

جو (۱) کی رو سے صحیح ہے۔ اِس لیے (۳) ایک تکملہ ہے۔

اس لیے $\text{لوک ی} = \text{لوک}(۲ + \text{لا} + \text{ما}) + \text{لوک ا} = -\text{لوک}(\text{لا} - \text{ما}) + \text{لوک ب}$

یعنے $\text{ی} = \text{ا}(۲ + \text{لا} + \text{ما}) = \frac{\text{ب}}{\text{لا} - \text{ما}}$

## حل طلب مثالیں۔

(۱۳۶)

حسب ذیل ہمزاد تفرقی مساواتوں کو پورا کرنے والے اُن منحنیوں کے نظام حاصل کرو جن کی تعریف دو مساواتوں سے ہوتی ہو جن میں سے ہر ایک میں ایک اختیاری مستقل شریک ہو۔ جہاں ممکن ہو ہندسی تعبیر بیان کرو۔

(۱) $\frac{\text{فرلا}}{\text{لا}} = \frac{\text{فرما}}{\text{ما}} = \frac{\text{فری}}{\text{ی}}$

(۲) $\frac{\text{فرلا}}{\text{م ی} - \text{ن ما}} = \frac{\text{فرما}}{\text{ن لا} - \text{ل ی}} = \frac{\text{فری}}{\text{ل ما} - \text{م لا}}$

(۳) $\frac{\text{فرلا}}{\text{ما}^۲ + \text{ی}^۲ - \text{لا}^۲} = \frac{\text{فرما}}{-۲\,\text{لا ما}} = \frac{\text{فری}}{-۲\,\text{لا ی}}$

(۴) $\frac{\text{فرلا}}{\text{ما ی}} = \frac{\text{فرما}}{\text{ی لا}} = \frac{\text{فری}}{\text{لا ما}}$

(۵) $\frac{\text{فرلا}}{\text{ما} + \text{ی}} = \frac{\text{فرما}}{\text{ی} + \text{لا}} = \frac{\text{فری}}{\text{لا} + \text{ما}}$

(۶) $\frac{\text{لا فرلا}}{\text{ی}^۲ - ۲\,\text{ما ی} - \text{ما}^۲} = \frac{\text{فرما}}{\text{ما} + \text{ی}} = \frac{\text{فری}}{\text{ما} - \text{ی}}$

(۷) مثال ۲ کے اُس دائرہ کا نصف قطر معلوم کرو جو نقطہ (۰، ن، م) میں سے گزرتا ہے۔

(۸) وہ سطح معلوم کرو جو مثال ۴ کے منحنیوں سے جو دائرہ $\text{ما}^۲ + \text{ی}^۲ = ۱$، $\text{لا} = ۰$ کو قطع کرتے ہیں پیدا ہوتی ہے۔

(۹) وہ سطح معلوم کرو جو مثال ۱ کے خطوں سے جو مرغولہ $\text{لا}^۲ + \text{ما}^۲$

= ر^۲، ی = ک سس ت^۱ ما/لا کو قطع کرتے ہیں پیدا ہوتی ہے۔

(۱۰) وہ منحنی معلوم کرو جو نقطہ (۱، ۲، -۱) میں سے گزرے اور اس کے کسی نقطہ پر سے کے مماس کی سمتی جیوب التمام اس نقطہ کے محددوں کے مربعوں کی نسبت میں ہوں۔

## ۱۱۴ — ایک دوسرا تکملہ جو پہلے تکملہ کی مدد سے معلوم کیا گیا ہو

— مساواتوں

فرلا / ۱ = فرما / -۲ = فری / (۳ لا^۲ جب (ما + ۲ لا)) (۱)

پر غور کرو۔

صریحاً ایک تکملہ

ما + ۲ لا = ل (۲)

ہے۔ اس کو استعمال کرنے سے

فرلا / ۱ = فری / (۳ لا^۲ جب ل)

اس لیے ی - لا^۳ جب ل = ب

ل کی بجائے درج کرنے سے

ی - لا^۳ جب (ما + ۲ لا) = ب (۳)

کیا (۳) حقیقت میں (۱) کا تکملہ ہے؟

(۳) کو تفرق کرنے سے

{فری - ۳ لا^۲ فرلا جب (ما + ۲ لا)} - لا^۳ جم (ما + ۲ لا)

× {فرما + ۲ فرلا} = ۰

جو (۱) کی رو سے صحیح ہے۔ اس لیے (۳) ایک تکملہ ہے۔

## حل طلب مثالیں۔

(۱) $$\frac{\text{فرلا}}{۱} = \frac{\text{فرما}}{۳} = \frac{\text{فری}}{۵\text{ی} + \text{س}(\text{ما}-۳\text{لا})}$$

(۲) $$\frac{\text{فرلا}}{\text{ی}} = \frac{\text{فرما}}{-\text{ی}} = \frac{\text{فری}}{\text{ی}^۲ + (\text{ما}+\text{لا})^۲}$$

(۳) $$\frac{\text{فرلا}}{\text{لای}(\text{ی}^۲+\text{لاما})} = \frac{\text{فرما}}{-\text{مای}(\text{ی}^۲+\text{لاما})} = \frac{\text{فری}}{\text{لا}^۴}$$

(۴) $$\frac{\text{فرلا}}{\text{لاما}} = \frac{\text{فرما}}{\text{ما}^۲} = \frac{\text{فری}}{\text{ی لاما} - ۲\text{لا}^۲}$$

(۱۲۷)

## ۱۱۵ ـــ ہمزاد مساواتوں کے عام اور خاص تکملے۔

اگر ہمزاد مساواتوں

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{ف}} = \frac{\text{فرما}}{\text{ق}} = \frac{\text{فری}}{\text{ر}}$$

کے دو غیر تابع تکملے ع = ا اور و = ب ہوں تو فہ (ع، و) = ۰ سے ایک ایسے سطح تغییر ہوگی جو نظام کے منحنیوں میں سے گذرے گی اور اِس لیے اس ایک دوسرا حل حاصل ہونا چاہیئے خواہ تفاعل فہ کی شکل کچھ ہی ہو۔

اِس کا تحلیلی ثبوت آئندہ باب میں دیا جائے گا کیونکہ اُس کی اہمیت خاص کر جزئی تفرقی مساواتوں سے متعلق ہے۔

فہ (ع، و) = ۰ کو عام تکملہ کہتے ہیں۔ بعض ہمزاد مساواتوں کے ایسے تکملے ہوتے ہیں جن کو خاص تکملے کہا جاتا ہے، یہ تکملے عام تکملہ میں شریک نہیں ہوتے۔

## حل طلب مثالیں

(۱) دفعہ ۱۱۳ کی مثال میں $\text{ع} = \text{لا}^{۲} - \text{ما}^{۲} - \text{ی}^{۲}$ اور $\text{و} = ۲\,\text{لا}\,\text{ما} - \text{ی}^{۲}$،
اِس لیے عام تکملہ

$$\text{فہ}\left(\text{لا}^{۲} - \text{ما}^{۲} - \text{ی}^{۲}،\ ۲\,\text{لا}\,\text{ما} - \text{ی}^{۲}\right) = ۰$$

ہے۔ طالب علم اِس کی تصدیق سادہ صورتوں میں جہاں

$$\text{فہ}(\text{ع}،\text{و}) = \text{ع} - \text{و} \quad \text{یا} \quad \text{فہ}(\text{ع}،\text{و}) = \frac{\text{و}+۱}{\text{ع}-۲}$$

کرسکتا ہے۔

(۲) تصدیق کرو کہ مساوات

$$\frac{\text{فرلا}}{۱+\sqrt{\text{ی}-\text{لا}-\text{ما}}} = \frac{\text{فرما}}{۱} = \frac{\text{فری}}{۲}$$

کے لیے عام تکملہ

$$\text{فہ}\left(۲\,\text{ما} - \text{ی}،\ \text{ما} + ۲\sqrt{\text{ی}-\text{لا}-\text{ما}}\right) = ۰$$

لیا جاسکتا ہے جہاں $\text{ی} = \text{لا} + \text{ما}$ ایک خاص تکملہ ہے۔

## ۱۱۶۔ مساوات

$$\text{ف}\,\text{فرلا} + \text{ق}\,\text{فرما} + \text{ر}\,\text{فری} = ۰$$

## کی ہندسی تعبیر۔

اِس تفرقی مساوات سے یہ بیان ہوتا ہے کہ ایک منحنی کا مماس ایک خاص خط پر عمود ہے اور اس مماس کی سمتی جیوب التمام (فرلا، فرما، فری) کے متناسب اور خط کی سمتی جیوب التمام (ف، ق، ر) کے متناسب ہیں۔

لیکن ہم یہ دیکھ چکے ہیں کہ ہمزاد مساواتوں

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{ف}} = \frac{\text{فرما}}{\text{ق}} = \frac{\text{فری}}{\text{ر}}$$

سے یہ بیان ہوا تھا کہ ایک منحنی کا مماس، خط (ف، ق، ر) کے متوازی تھا۔ اس طرح ہمیں منحنیوں کے دو جُٹ حاصل ہوتے ہیں۔ اگر دو منحنی جن میں سے ایک ایک جُٹ سے اور دوسرا دوسرے جٹ سے لیا گیا ہو متقاطع ہوں تو اُن کو علی القوائم قطع کرنا چاہئے۔
اب دو صورتیں پیدا ہوتی ہیں۔ یہ ہو سکتا ہے کہ مساوات

$$\text{ف فر}_\text{ا} + \text{ق فر}_\text{ما} + \text{ر فر}_\text{ی} = 0$$

(۱۲۸) تکمل پذیر ہو۔ اس کا یہ مطلب ہے کہ سطحوں کا ایک قبیل حاصل ہو سکتا ہے جس پر کے تمام منحنی اُن نقطوں پر ہمزاد مساواتوں سے تعبیر شدہ منحنیوں کے عمود وار ہیں جہاں یہ منحنی سطح کو قطع کرتے ہیں۔ حقیقت میں یہ وہ صورت ہے جبکہ سطحوں کی لامتناہی تعداد کھینچی جا سکے جو کہ منحنیوں کے ایک دوہرے لامتناہی جُٹ کو علی القوائم قطع کرے جیسا کہ برقی سکونیات میں ہم قوہ سطحیں خطوط قوت کو قطع کرتی ہیں۔ اس کے برخلاف یہ ہو سکتا ہے کہ ہمزاد مساواتوں سے تعبیر شدہ منحنیوں سے علی القوائم سطحوں کا کوئی ایسا قبیل حاصل نہ ہو۔ اس صورت میں واحد مساوات تکمل پذیر نہیں ہوتی۔

**مثال** (۱) مساوات فرلا + فرما + فری = ۰
کا تکملہ لا + ما + ی = ج
ہے، یہ متوازی مستویوں کا ایک قبیل ہے۔
دفعہ ۱۱۲ کی مثال (۱) میں ہم نے یہ دیکھا کہ ہمزاد مساواتیں

$$\frac{\text{فرلا}}{1} = \frac{\text{فرما}}{1} = \frac{\text{فری}}{1}$$

متوازی خطوں کے قبیل $$\frac{\text{لا} - \text{ا}}{1} = \frac{\text{ما} - \text{ب}}{1} = \frac{\text{ی}}{1}$$

کو تعبیر کرتی ہیں۔

اوپر کے مستوی اِن خطوں کے علی القوائم مرماۃ ہیں

مثال (۲) ی فرلا - لا فری = ۰

یعنے

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{لا}} - \frac{\text{فری}}{\text{ی}} = ۰$$

اِس لیے ی = ج لا

یہ مستویوں کا ایک قبیل ہے جو محور ما میں سے گذرتے ہیں۔

دفعہ ۱۱۲ مثال (۲) میں ہم نے یہ دیکھا کہ متناظر ہمزاد مساواتیں

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{ی}} = \frac{\text{فرما}}{۰} = \frac{\text{فری}}{-\text{لا}}$$

دائروں کے ایک نظام کو تعبیر کرتی ہیں جن کے محور سب کے سب محور ما پر واقع ہیں، اِس لیے مستوی اِن دائروں کے علی القوائم مرماۃ ہیں۔

# حل طلب مثالیں

حسب ذیل مساواتوں کو تکمل کرو اور جہاں ممکن ہو ہندسی تعبیر بیان کرو، نیز اِس امر کی تصدیق کرو کہ سطحیں اُن منحنیوں کے علی القوائم مرماۃ ہیں جو متناظر ہمزاد مساوات سے تعبیر ہوتے ہیں:

(۱) لا فرلا + ما فرما + ی فری = ۰

(۲) $(\text{ما}^2 + \text{ی}^2 - \text{لا}^2)$ فرلا - ۲ لا ما فرما - ۲ لا ی فری = ۰ [$\text{لا}^2$ سے تقسیم کرو]

(۳) ما ی فرلا + ی لا فرما + لا ما فری = ۰

(۴) (ما + ی) فرلا + (ی + لا) فرما + (لا + ما) فری = ۰

(۵) ی (ما فرلا - لا فرما) = $\text{ما}^2$ فری

(۶) لا فرلا + ی فرما + (ما + ۲ ی) فری = ۰

## ۱۱۷ — تکمل کا طریقہ جبکہ حل واضح نہ ہو — جب شکل

ف فرلا + ق فرما + ر فری = ۰

(۱۳۹) کی تکمیل پذیر مساوات کو معائنہ سے حل نہ کیا جا سکے تو ہم حل کی تلاش اُس سادہ صورت پر غور کر کے کرتے ہیں جس میں ی کو مستقل سمجھا جاتا ہے اور اِس لیے $\text{فری} = ۰$۔

مثلاً اگر ی مستقل ہو تو مساوات $\text{ما ی فرلا} + ۲\ \text{ی لا فرما} - ۳\ \text{لا ما فری} = ۰$،

$$\text{ما فرلا} + ۲\ \text{لا فرما} = ۰$$

ہو جاتی ہے اور $\text{لا ما}^{۲} = \text{ا}$

حاصل ہوتا ہے۔

چونکہ اِس کو یہ فرض کر کے حاصل کیا گیا ہے کہ ی مستقل ہے اِس لیے یہ اغلب ہے کہ ابتدائی مساوات کا حل مستقل ا کی بجائے ی کا کوئی تفاعل رکھنے سے حاصل ہو سکے چنانچہ

$$\text{لا ما}^{۲} = \text{ف (ی)}$$

اور اِس لیے $\text{ما}^{۲}\ \text{فرلا} + ۲\ \text{لا ما فرما} - \frac{\text{فرف}}{\text{فری}}\ \text{فری} = ۰$۔

یہ مساوات ابتدائی مساوات کے مماثل ہوگی اگر

$$\frac{\text{ما}^{۲}}{\text{ما ی}} = \frac{۲\ \text{لا ما}}{۲\ \text{ی لا}} = \frac{-\frac{\text{فرف}}{\text{فری}}}{-۳\ \text{لا ما}}$$

یعنی $\frac{\text{فرف}}{\text{فری}} = \frac{۳\ \text{لا ما}^{۲}}{\text{ی}} = \frac{۳\ \text{ف(ی)}}{\text{ی}}$

$$\frac{\text{فرف}}{\text{ف}} = \frac{۳\ \text{فری}}{\text{ی}}$$

$$\text{ف (ی)} = \text{ج ی}^{۳}$$

اور آخری حل $\text{لا ما}^{۲} = \text{ج ی}^{۳}$

حاصل ہوتا ہے۔

یہ طریقہ تمام تکمل پذیر مساواتوں کے لیے درست ہے، اِس کا ثبوت دفعہ ۱۱۹ میں دیکھو۔

## حل طلب مثالیں

(۱) (ما ی لوگ ی) فرلا − (ی لا لوگ لا) فرما + لا ما فری = ۰

(۲) ۲ ما ی فرلا + ی لا فرما − لا ما ([illegible]) فری = ۰

(۳) (۲ لا$^{2}$ + ۲ لا ما + ۴ لا ی$^{2}$ + ۱) فرلا + فرما + ۲ ی فری = ۰
[پہلے [illegible] کو مستقل فرض کرو]

(۴) (ما$^{2}$ + ما ی) فرلا + (ی لا + ی$^{2}$) فرما + (ی$^{2}$ − لا ما) فری = ۰

(۵) (لا$^{2}$ ما − ما$^{3}$ − ما$^{2}$ ی) فرلا + (لا ما$^{2}$ − لا$^{2}$ ی − لا$^{3}$) فرما + (لا ما$^{2}$ + لا$^{2}$ ما) فری = ۰

(۶) ثابت کروکہ حسب ذیل مساوات کا تکملہ مستویوں کے ایک قبیل کو تعبیر کرتا ہے جن کا خط تقاطع مشترک ہے اور یہ کہ یہ مستوی دفعہ ۱۱۳ کی مثال ۲ کے دائروں کے علی القوائم مرماتہ ہیں:—

(م ی − ن ما) فرلا + (ن لا − ل ی) فرما + (ل ما − م لا) فری = ۰

## ۱۱۸ — وہ ضروری شرط کہ کوئی مساوات تکمل پذیر ہو۔

اگر

ف فرلا + ق فرما + ر فری = ۰ ........ (۱)

کا ایک تکملہ فہ (لا، ما، ی) = ج ہو جس کو تفرق کرنے پر

$$\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}}\ \text{فرلا} + \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}}\ \text{فرما} + \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ی}}\ \text{فری} = 0$$

حاصل ہوتا ہے تو

$$\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} = \text{لہ ف}،\quad \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}} = \text{لہ ق}،\quad \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ی}} = \text{لہ ر}$$

پس $\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}(\text{لہ ر}) = \frac{\text{جف}^2\text{ فہ}}{\text{جف ما جف ی}} = \frac{\text{جف}^2\text{ فہ}}{\text{جف ی جف ما}} = \frac{\text{جف}}{\text{جف ی}}(\text{لہ ق})$

یعنی $\text{لہ}\left(\frac{\text{جف ق}}{\text{جف ی}} - \frac{\text{جف ر}}{\text{جف ما}}\right) + \text{ق}\frac{\text{جف لہ}}{\text{جف ی}} - \text{ر}\frac{\text{جف لہ}}{\text{جف ما}} = ۰$ (۲)

اسی طرح $\text{لہ}\left(\frac{\text{جف ر}}{\text{جف لا}} - \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ی}}\right) + \text{ر}\frac{\text{جف لہ}}{\text{جف لا}} - \text{ف}\frac{\text{جف لہ}}{\text{جف ی}} = ۰$ (۳)

اور $\text{لہ}\left(\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} - \frac{\text{جف ق}}{\text{جف لا}}\right) + \text{ف}\frac{\text{جف لہ}}{\text{جف ما}} - \text{ق}\frac{\text{جف لہ}}{\text{جف لا}} = ۰$ (۴)

مساواتوں (۲)، (۳)، اور (۴) کو علی الترتیب ف، ق، اور ر سے ضرب دو اور جمع کرو تو

$$\text{ف}\left(\frac{\text{جف ق}}{\text{جف ی}} - \frac{\text{جف ر}}{\text{جف ما}}\right) + \text{ق}\left(\frac{\text{جف ر}}{\text{جف لا}} - \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ی}}\right)$$

$$+ \text{ر}\left(\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} - \frac{\text{جف ق}}{\text{جف لا}}\right) = ۰$$

اگر مساوات (۱) تکمل پذیر ہے تو یہ شرط پوری ہونی چاہئے۔ سمتی تحلیل سے جو طالب علم واقف ہیں وہ دیکھیں گے کہ اگر ایک سمتی ا کے اجزائے ترکیبی ف، ق، ر ہوں تو اوپر کی شرط کو

$$\text{ا خم ا} = ۰$$

لکھا جا سکتا ہے۔

**مثال**۔ گذشتہ دفعہ کی حل شدہ مثال میں

ما ی فرلا + ۲ ی لا فرما - ۳ لا ما فری = ۰

ف = ما ی، ق = ۲ ی لا، ر = - ۳ لا ما

شرط سے حاصل ہوتا ہے

ما ی(۲ لا + ۳ لا) + ۲ ی لا(- ۳ ما - ما) - ۳ لا ما(ی - ۲ ی) = ۰

یعنی ۵ لا ما ی - ۸ لا ما ی + ۳ لا ما ی = ۰ جو درست ہے۔

# حل طلب مثالیں

(۱) ثابت کرو کہ مثالوں کے پچھلے دو جٹوں کی مساواتیں اِس شرط کو پورا کرتی ہیں۔

(۲) ثابت کرو کہ $\frac{\text{فرلا}}{\text{ی}} = \frac{\text{فرما}}{\text{لا} + \text{ما}} = \frac{\text{فری}}{\text{۱}}$
سے حاصل شدہ منحنیوں کے علی القوائم، سطحوں کا کوئی جٹ نہیں ہے۔

## ۱۱۹* — تکمل پذیری کی شرط کافی بھی ہے اور ضروری بھی

اب ہم ثابت کریں گے کہ اوپر کی تکمل پذیری کی شرط کافی ہے یعنے یہ کہ جب وہ پوری ہوتی ہے تو دفعہ ۱۱۷ کے طریقہ سے ہمیشہ ایک حل حاصل ہو سکتا ہے۔

تمہیدی مفروضہ کے طور پر اِس واقعہ کی ضرورت پڑے گی کہ اگر ف، ق، ر اِس شرط کو پورا کریں تو $\text{ف}_۱ = \text{لہ ف}$، $\text{ق}_۱ = \text{لہ ق}$، $\text{ر}_۱ = \text{لہ ر}$ بھی اِس شرط کو پورا کریں گے جہاں لہ، لا، ما اور ی کا کوئی تفاعل ہے۔ ہم اِس کا ثبوت طالب علم پر چھوڑتے ہیں۔

(۱۴۱) دفعہ ۱۱۷ میں ہم نے یہ فرض کیا کہ

$$\text{ف فرلا} + \text{ق فرما} = ۰$$

کا ایک حل ی کو مستقل سمجھنے سے حاصل ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ یہ حل فا (لا، ما، ی) = ا ہے تو

$$\frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}}\text{ فرلا} + \frac{\text{جف فا}}{\text{جف ما}}\text{ فرما} = ۰$$

اس لیے

$$\frac{\frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}}}{\text{ف}} = \frac{\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ما}}}{\text{ق}} = \text{لہ، فرض کرو}$$

رکھو ل ف = ف، ل ق = ق، ل ر = ر۱۔
بعد میں ہم نے ا کی بجائے ف (ی) رکھا تھا۔ اِس لیے

فا (لا، ما، ی) = ف (ی)، ......... (۱)

اور اِس لیے $\frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}}$ فرلا + $\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ما}}$ فرما + $\left\{\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ی}} - \frac{\text{فرف}}{\text{فری}}\right\}$ فری = ۰۔

یعنی ف۱ فرلا + ق۱ فرما + $\left\{\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ی}} - \frac{\text{فرف}}{\text{فری}}\right\}$ فری = ۰، ... (۲)

یہ ف فرلا + ق فرما + ر فری = ۰۔
کے مماثل ہو گا اگر

$$\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ی}} - \frac{\text{فرف}}{\text{فری}} = \text{ل ر}_۱ = \text{ر}_۱$$

یعنی اگر $\frac{\text{فرف}}{\text{فری}} = \frac{\text{جف فا}}{\text{جف ی}} - \text{ر}_۱$، ......... (۳)

دفعہ ۱۷ کی مثال میں ہمیں حاصل ہوا

$$\frac{\text{فرف}}{\text{فری}} = \frac{\text{۳ لا ا}^۲}{\text{ی}} = \frac{\text{۳ ف (ی)}}{\text{ی}}$$

جسمیں لا اور ما مساوات لا ما۲ = ف (ی) کی مدد سے خارج کردئے گئے ہیں۔
اب ہمیں صرف یہ ثابت کرنا ہے کہ مساوات (۳) کی بائیں جانب سے لا اور ما کو ہمیشہ مساوات (۱) کی مدد سے خارج کیا جا سکتا ہے۔
دوسرے لفظوں میں ہمیں یہ ثابت کرنا چاہئے کہ $\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ی}}$ - ر۱ میں لا اور ما صرف فا کے تفاعل کے طور پر شامل ہوتے ہیں۔
یہ صورت ہو گی اگر

---

۱ ایڈورڈ کا "ڈفرنشل کیلکولس" دفعہ ۵۱۰

$$\frac{جف\,فا}{جف\,لا}\,\frac{جف}{جف\,ما}\left\{\frac{جف\,فا}{جف\,ی}-ر_1\right\}-\frac{جف\,فا}{جف\,ما}\,\frac{جف}{جف\,لا}\left\{\frac{جف\,فا}{جف\,ی}-ر_1\right\}$$

$= ۰$، متماثلاً ......... (۴)

اب تمہیدی مفروضہ کی رُو سے ف، ق، ر کے درمیان رشتہ سے مشابہ رشتہ

$$ف_1\left\{\frac{جف\,ق_1}{جف\,ی}-\frac{جف\,ر_1}{جف\,ما}\right\}+ق_1\left\{\frac{جف\,ر_1}{جف\,لا}-\frac{جف\,ف_1}{جف\,ی}\right\}+ر_1\left\{\frac{جف\,ف_1}{جف\,ما}-\frac{جف\,ق_1}{جف\,لا}\right\}=۰$$

حاصل ہوتا ہے، نیز چونکہ (۲) تکمل پذیر ہے اس لیے (۱۴۲)

$$ف_1\left\{\frac{جف\,ق_1}{جف\,ی}-\frac{جف}{جف\,ما}\left(\frac{جف\,فا}{جف\,ی}-\frac{جف\,ف}{جف\,ی}\right)\right\}+ق_1\left\{\frac{جف}{جف\,لا}\left(\frac{جف\,فا}{جف\,ی}-\frac{جف\,ف}{جف\,ی}\right)-\frac{جف\,ف_1}{جف\,ی}\right\}+\left(\frac{جف\,فا}{جف\,ی}-\frac{جف\,ف}{جف\,ی}\right)\left\{\frac{جف\,ف_1}{جف\,ما}-\frac{جف\,ق_1}{جف\,لا}\right\}=۰$$

اِن دو آخری مساواتوں کو تفریق کرنے سے

$$ف_1\frac{جف}{جف\,ما}\left(\frac{جف\,فا}{جف\,ی}-\frac{جف\,ف}{جف\,ی}-ر_1\right)-ق_1\frac{جف}{جف\,لا}\left\{\frac{جف\,فا}{جف\,ی}-\frac{جف\,ف}{جف\,ی}-ر_1\right\}-\left\{\frac{جف\,فا}{جف\,ی}-\frac{جف\,ف}{جف\,ی}-ر_1\right\}\left\{\frac{جف\,ف_1}{جف\,ما}-\frac{جف\,ق_1}{جف\,لا}\right\}=۰،\ (۵)$$

لیکن $ف_1=\frac{جف\,قا}{جف\,لا}$، $ق_1=\frac{جف\,فا}{جف\,ما}$، اور $\frac{جف}{جف\,لا}\left(\frac{جف\,ف}{جف\,ی}\right)$

$$= \frac{جف}{جف\ ما} \left( \frac{جف\ ف}{جف\ ی} \right) = ۰$$

کیونکہ ف صرف ی کا تفاعل ہے۔

پس مساوات (۵) مساوات (۴) میں تحویل ہوتی ہے۔

یعنی $\frac{جف\ نا}{جف\ ی}$ - ر کو نا اور ی کے تفاعل کے طور پر بیان کیا جا سکتا ہے، فرض کرو کہ یہ تفاعل سا(نا، ی) ہے۔ پس (۱) اور (۳) سے

$$\frac{فرف}{فری} = سا(ف، ی)$$

اگر اس کا حل ف = ضا(ی) ہے تو نا (لا، ما، ی) = ضا(ی)

مساوات

$$ف\ فرلا + ق\ فرما + ر\ فری = ۰$$

کا ایک حل ہے جس کا تکمیل پذیر ہونا اوپر ثابت کیا جا چکا ہے جبکہ ف، ق، ر دفعہ ۱۱۸ کی شرط کو پورا کریں۔

## ۱۲۰ — ناتکمیل پذیر واحد مساوات - جب تکمیل پذیری کی شرط پوری نہ ہو تو مساوات

$$ف\ فرلا + ق\ فرما + ر\ فری = ۰$$

سے منحنیوں کا ایسا قبیل تعبیر ہوگا جو اس قبیل کے علی القوائم ہوگا جو ہمزاد مساواتوں

$$\frac{فرلا}{ف} = \frac{فرما}{ق} = \frac{فری}{ر}$$

سے تعبیر ہوتا ہے لیکن اس صورت میں سطحوں کا کوئی قبیل ایسا نہیں ہے جو منحنیوں کے دوسرے قبیل کے علی القوائم ہو۔

لیکن ہم ایسے منحنیوں کی لاتناہی تعداد معلوم کر سکتے ہیں جو ایک دی ہوئی سطح پر واقع ہوں اور مساوات (۱) کو پورا کریں خواہ یہ مساوات تکمل پذیر ہو یا نہ ہو۔

مثال۔ ما فرلا + (ی - ما) فرما + لا فری = ۰ (۱)

کے حل سے تعبیر شدہ ایسے منحنی معلوم کرو جو مستوی

۲ لا - ما - ی = ۱ (۲)

میں واقع ہوں۔

(یہ آسانی سے معلوم ہوتا ہے کہ تکمل پذیری کی شرط پوری نہیں ہوتی)

عمل کا طریقہ یہ ہے کہ متغیروں میں سے ایک اور اس کے تفرقہ کو مثلاً (فرض کرو) ی اور فری کو ان دو مساواتوں اور ان میں سے دوسری مساوات کے تفرقہ سے ساقط کیا جائے۔ (۱۴۳)

(۲) کو تفرق کرنے سے

۲ فرلا - فرما - فری = ۰

لا سے ضرب دینے اور (۱) میں جمع کرنے سے

(ما + ۲لا) فرلا + (ی - لا - ما) فرما = ۰

یا (۲) کو استعمال کرنے سے

(ما + ۲لا) فرلا + (لا - ۲ما - ۱) فرما = ۰

اور اس سے لا ما + لا$^{۲}$ - ما$^{۲}$ - ما = ج$^{۲}$ (۳)

اس لیے قبیل کے منحنی جو مستوی (۲) میں واقع ہیں وہ تراشیں ہیں جن کو یہ مستوی قائم زائدی اسطوانوں (۳) میں قطع کرتا ہے۔

اس مثال کے نتیجہ کو یہ کہہ کر بیان کیا جا سکتا تھا کہ لا ما کے مستوی پر ان منحنیوں کے ظل جو مستوی (۲) میں واقع ہیں اور مساوات (۱) کو پورا کرتے ہیں ہم مرکز، مشابہ اور مشابہاً واقع قائم زائدوں کا ایک قبیل ہیں۔

## حل طلب مثالیں

(۱) ثابت کرو کہ فری = ۲ ما فرلا + لا فرما کا کوئی واحد تکملہ نہیں ہے۔

ثابت کرو کہ اس مساوات کے منحنی جو مستوی ی = لا + ما میں واقع ہیں سطحوں کے قبیل

$$(\text{لا} - ۱)^{۲}\,(۲\text{ما} - ۱) = \text{ج}$$

پر بھی واقع ہیں۔

(۲) ثابت کرو کہ

$$\text{لا فرلا} + \text{ما فرما} + \text{ج}\sqrt{\left(۱ - \frac{\text{لا}^{۲}}{\text{و}^{۲}} - \frac{\text{ما}^{۲}}{\text{ب}^{۲}}\right)}\,\text{فری} = ۰$$

کے منحنی جو ناقص نما

$$\frac{\text{لا}^{۲}}{\text{و}^{۲}} + \frac{\text{ما}^{۲}}{\text{ب}^{۲}} + \frac{\text{ی}^{۲}}{\text{ج}^{۲}} = ۱$$

پر واقع ہیں ہم مرکز کروں کے قبیل

$$\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲} + \text{ی}^{۲} = \text{ک}^{۲}$$

پر بھی واقع ہیں۔

(۳) ان منحنیوں کا قائم ظل معلوم کرو جو مکافی نما ۲ی = لا^۲ + ما^۲ پر واقع ہیں اور مساوات

$$\text{فری} = (\text{لا} + \text{ی})\,\text{فرلا} + \text{ما فرما}$$

کو پورا کرتے ہیں۔

(۴) محور ما کے متوازی مکونوں والے اس اسطوانہ کی مساوات معلوم کرو جو نقطہ (۲، ۱، −۱) میں سے گذرے اور نیز ایک ایسے منحنی میں سے گذرے جو کرہ لا^۲ + ما^۲ + ی^۲ = ۴ پر واقع ہے اور مساوات

$$(\text{لا ما} + ۲\,\text{لا ی})\,\text{فرلا} + \text{ما}^{۲}\,\text{فرما} + (\text{لا}^{۲} + \text{ما ی})\,\text{فری} = ۰$$

کو پورا کرتا ہے۔

**نوٹ** ۔ بیل پذیر ا... "تفرقی مساوات

$$\text{ف}(\text{لا، ما، ی})\,\text{فرلا} + \text{ق}(\text{لا، ما، ی})\,\text{فرما} + \text{س}(\text{لا، ما، ی})\,\text{فری} = ۰$$

Total ۱ء

پر دفعہ ۶۹ کی طرح بحث کی جا سکتی ہے اگر دائیں جانب، مثلاً
و (لا، ما، ی) × فرع (لا، ما، ی) = ۰ کے مساوی ہو۔ تب کامل
ابتدائی ع = ج کے علاوہ حل و = ج بھی ہوگا جو یا تو نادر حل (لفاف
کے مفہوم میں) ہوگا یا ایک انتہائی تکمل۔ اگر ہم ف، ق، ر پر
ایسی شرطیں عائد کریں جو دفعہ ۶۹ کے تتمہ میں ف اور ق پر عائد کردہ شرطوں
کے مشابہ ہوں اور ف + ر فی اور ق + ر قی میں ی کی بجائے
ط + ف (لا، ما) رکھنے سے علی الترتیب نتیجے ع (لا، ما، ط) اور
گ (لا، ما، ط) حاصل ہوں تو وہ ضروری اور کافی شرطیں کہ ط = ی - ف (لا، ما)
ایک نادر حل ہو یہ ہیں کہ ع (لا، ما، ۰) = ۰ = گ (لا، ما، ۰) اور یہ کہ
تکملوں $\int_{۰}^{ط} \frac{\text{فرط}}{\text{ع (لا، ما، ط)}}$ اور $\int_{۰}^{ط} \frac{\text{فرط}}{\text{گ (لا، ما، ط)}}$ میں سے کم از کم ایک
اپنی زیریں حد پر زیر بحث علاقہ میں لا اور ما کی تمام قیمتوں کے لیے مستدق
ہو۔ اگر ع (لا، ما، ۰) = ۰ = گ (لا، ما، ۰) لیکن استدقاق کی
شرط پوری نہ ہو تو ط = ۰ ایک خاص تکملہ ہوگا۔ حسب سابق ہم صرف
حقیقی متغیروں پر بحث کر رہے ہیں۔

اس کا ثبوت کسی آئندہ مقالہ میں دیا جائے گا لیکن ہم چند
مثالوں سے اس مسئلہ کی توضیح کر سکتے ہیں۔ چنانچہ

$$\text{فرلا} + \{۱ + (\text{ی} - \text{لا} - \text{ما})^{\frac{۱}{۲}}\}\ \text{فرما} - \text{فری}$$

$$= (\text{ی} - \text{لا} - \text{ما})^{\frac{۱}{۲}} \times \text{فر}\{\text{ما} - ۲(\text{ی} - \text{لا} - \text{ما})^{\frac{۱}{۲}}\} = ۰$$

کا کامل ابتدائی $\text{ما} - ۲(\text{ی} - \text{لا} - \text{ما})^{\frac{۱}{۲}} = \text{ج}$

ہے اور نادر حل $\text{ی} - \text{لا} - \text{ما} = ۰$
ہے جو سطحوں کے اس تعمیل کے لفاف کو تعبیر کرتا ہے جو کامل ابتدائی سے
تعبیر ہوتے ہیں۔

یہاں ع (لا، ما، ط) = ۰ اور گ (لا، ما، ط) = ط^½، اس لیے دوسرا تکملہ مستدق ہے - اس کے برخلاف

ی^½ (فرلا + ۲ ما فرما) + فری = ی^½ فر (لا + ما^۲ - ۲ ی^½) = ۰

کے لیے لا + ما^۲ - ۲ ی^½ = ج کی ایک انتہائی شکل ی = ۰ ہے۔ یہاں ع (لا، ما، ط) = ط^۲ اور گ (لا، ما، ط) = ۲ ما ط^۲، اس لیے دونوں تکملے متسع ہیں - اسی کے مشابہ نتیجے ایسی "تکمل پذیر" شکل "تفرقی مساواتوں" کے لیے بھی درست ہیں جن میں متغیروں کی کوئی تعداد شریک ہو -

اب ہم شکل

ف فرلا + ق فرما + ر فری = ۰

کی اُن مساواتوں کی طرف رجوع ہوتے ہیں جو "تکمل پذیر" ہیں یعنی ایسی ہیں کہ وہ کوئی کامل ابتدائی جس میں اختیاری مستقل شریک ہو نہیں رکھتیں - اس صورت میں

$$ف\left(\frac{جف\ ق}{جف\ ی}-\frac{جف\ ر}{جف\ ما}\right)+ق\left(\frac{جف\ ر}{جف\ لا}-\frac{جف\ ف}{جف\ ی}\right)$$

$$+ر\left(\frac{جف\ ف}{جف\ ما}-\frac{جف\ ق}{جف\ لا}\right)$$

متماثلاً صفر نہیں ہوتا - اس کو و (لا، ما، ی) سے تعبیر کرو - اگر و = ۰ سے تفرقی مساوات پوری ہو تو و = ۰ ایک نادر حل ہوگا - ہم دو مثالوں پر غور کریں گے -

ی فرلا + ی^۲ فرما + فری = ۰

کے لیے و = ی^۲ - اب چونکہ ی = ۰ سے تفرقی مساوات پوری ہوتی ہے اس لیے وہ ایک نادر حل ہے لیکن

ما فرلا + ی فرما + لا فری = ۰

کے لیے

و = ما + ی + لا

یہاں لا + ما + ی = ۰ سے تفرقی مساوات پوری نہیں ہوتی اس لیے وہ نادر حل نہیں ہے۔

یہ بالعموم بیان کیا جاتا ہے کہ کسی ناتکمل پذیر "کُل" تفرقی مساوات کے نادر حل کے لیے و کا صفر ہونا ضروری ہے۔ یہ بیان صرف اس وقت درست ہوتا ہے جبکہ ف، ق، ر چند خاص شرطوں کو پورا کریں۔ اگر ف، ق، ر کو لامتناہی جزوی مشتقات اختیار کرنے دیا جائے تو ایک ایسا نادر حل موجود ہو سکتا ہے جس سے و صفر نہیں ہوتا۔

مثلاً ی^½ فرلا + ی^{۳/۲} فرما + ۲ فری = ۰

کا ایک نادر حل ی = ۰ ہے یعنی ی = ۰ سے و = − ½ ی^{−½} صفر کی بجائے لامتناہی ہو جاتا ہے۔

ہم دیکھتے ہیں کہ تکمل پذیر تفرقی مساواتوں کے لیے اور ناتکمل پذیر تفرقی مساواتوں کے لیے نادر حل کے طریقوں پر پیدا ہوتے ہیں ان میں ایک عجیب فرق ہے۔ اول الذکر مساواتوں کے لیے یہ ضروری ہے کہ سروں ف، ق، ر میں سے کم از کم ایک میں ایک ایسا تفاعل شامل ہونا چاہیے جو ندرت رکھتا ہو لیکن ثانی الذکر مساواتوں کے لیے ایسا نہیں ہے۔ ناتکمل پذیر مساوات منحنیوں کے ایک دوہرے لامتناہی قبیل کو تعبیر کرتی ہے جو قبیل

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{ف}} = \frac{\text{فرما}}{\text{ق}} = \frac{\text{فری}}{\text{ر}}$$

کے منحنیوں کے علی القوائم ہوتے ہیں لیکن سطحوں کا کوئی ایسا قبیل

نہیں ہے جو منحنیوں کے اِس دوسرے قبیل کے علی القوائم ہو۔ اگر نادر حل موجود ہے تو منحنیوں کے پہلے قبیل کے تمام منحنی نادر حل سے تعبیر شدہ سطح کو مس کرتے ہیں۔

# گیارہویں باب پر متفرق مثالیں

(۱) $$\frac{\text{فرلا}}{\text{لای}} = \frac{\text{فرما}}{\text{مای}} = \frac{\text{فری}}{\text{لاما}}$$

(۲) $$\frac{\text{فرلا}}{\text{ما}^{۳}\text{لا} - ۲\text{لا}^{۴}} = \frac{\text{فرما}}{۲\text{ما}^{۴} - \text{لا}^{۳}\text{ما}} = \frac{\text{فری}}{۹\text{ی}(\text{لا}^{۳} - \text{ما}^{۳})}$$

(۳) $$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ی}،\ \frac{\text{فری}}{\text{فرلا}} = \text{ما}$$

(۴) $$(\text{ی} + \text{ی}^{۲})\,\text{جم لا}\,\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} - (\text{ی} + \text{ی}^{۲})\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} + (۱ - \text{ی}^{۲})(\text{ما} - \text{جب لا})\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = ۰$$

(۵) $$(۲\text{لا} + \text{ما}^{۲} + ۲\text{لای})\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} + ۲\text{لاما}\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} + \text{لا}^{۲}\frac{\text{فری}}{\text{فرت}} = ۱$$ (۱۴۴

(۶) ف (ما) کو معلوم کرو اگر ف (ما) فرلا - ی لا فرما - لاما لوک ما فری = ۰ تکمیل پذیر ہو۔
متناظر تکملہ معلوم کرو۔

(۷) ثابت کرو کہ حسب ذیل مساوات ناتکمیل پذیر ہے:

$$۳\,\text{ما فرلا} + (\text{ی} - ۳\text{ما})\,\text{فرما} + \text{لا فری} = ۰$$

ثابت کرو کہ مستوی لا ما پر اُن منحنیوں کے ظِل جو اِس مساوات کو پورا کرتے ہیں اور مستوی ۲ لا + ما - ی = ۱ پر واقع ہیں قائم زائد

$$لا^{۲} + ۳\, لا\, ما - ما^{۲} - ۱\, ما = ب$$

ہیں ۔

(۸) کبھی منحنیوں $ما = ۱\, لا^{۲}$ ، $ما^{۲} = ب\, ی\, لا$ کے قبیل کی تفرقی مساواتیں معلوم کرو ۔ ثابت کرو کہ یہ تمام منحنی ناقص نماؤں کے قبیل

$$لا^{۲} + ۲\, ما^{۲} + ۳\, ی^{۲} = ج^{۲}$$

کو علی القوائم قطع کرتے ہیں ۔

(۹) اُس منحنی کی مساواتیں معلوم کرو جو نقطہ (۳، ۲، ۱) میں سے گذرتا ہے اور سطحوں $لا + ما\, ی = ج$ کے قبیل کو علی القوائم قطع کرتا ہے ۔

(۱۰) $لا = ع\, ی$ ، $ما = و\, ی$ رکھ کر حسب ذیل متجانس مساواتوں کو حل کرو :

(۱) $(لا^{۲} - ما^{۲} - ی^{۲} + ۲\, لا\, ما + ۲\, لا\, ی)\, فرلا + (ما^{۲} - ی^{۲} - لا^{۲} + ۲\, ما\, ی + ۲\, ما\, لا)\, فرما + (ی^{۲} - لا^{۲} - ما^{۲} + ۲\, ی\, لا + ۲\, ی\, ما)\, فری = ۰$

(۲) $(۲\, لا\, ی - ما\, ی)\, فرلا + (۲\, ما\, ی - لا\, ی)\, فرما - (لا^{۲} - لا\, ما + ما^{۲})\, فری = ۰$

(۳) $ی^{۲}\, فرلا + (ی^{۲} - ۲\, ما\, ی)\, فرما + (۲\, ما^{۲} - ما\, ی - لا\, ی)\, فری = ۰$

(۱۱) ثابت کرو کہ اگر مساوات

$$ف_{۱}\, فرلا_{۱} + ف_{۲}\, فرلا_{۲} + ف_{۳}\, فرلا_{۳} + ف_{۴}\, فرلا_{۴} = ۰$$

تکمیل پذیر ہو تو

$$ف_{ر}\left(\frac{جف\, ف_{س}}{جف\, لا_{ت}} - \frac{جف\, ف_{ت}}{جف\, لا_{س}}\right) + ف_{س}\left(\frac{جف\, ف_{ت}}{جف\, لا_{ر}} - \frac{جف\, ف_{ر}}{جف\, لا_{ت}}\right) + ف_{ت}\left(\frac{جف\, ف_{ر}}{جف\, لا_{س}} - \frac{جف\, ف_{س}}{جف\, لا_{ر}}\right) = ۰$$

جہاں ر، س، ت، چار لاحقوں ۱، ۲، ۳، ۴ میں سے کوئی تین ہو سکتے ہیں ۔

اس رشتہ کو $\text{ج}_{\text{رست}} = ۰$ سے تعبیر کرکے تصدیق کرو کہ

$$\text{ف}_{۱}\,\text{ج}_{۲۳۴} - \text{ف}_{۲}\,\text{ج}_{۱۳۴} + \text{ف}_{۳}\,\text{ج}_{۱۲۴} - \text{ف}_{۴}\,\text{ج}_{۱۲۳} = ۰ \quad \text{متماثلاً}$$

جس سے یہ معلوم ہوگا کہ ان چار رشتوں میں سے صرف تین غیر تابع ہیں۔
تصدیق کرو کہ مساوات

$$(\text{لا}_{۱}^{۳} - \text{لا}_{۲}\text{لا}_{۳}\text{لا}_{۴})\,\text{فرلا}_{۱} + (\text{لا}_{۲}^{۳} - \text{لا}_{۱}\text{لا}_{۳}\text{لا}_{۴})\,\text{فرلا}_{۲}$$

$$+ (\text{لا}_{۳}^{۳} - \text{لا}_{۱}\text{لا}_{۲}\text{لا}_{۴})\,\text{فرلا}_{۳} + (\text{لا}_{۴}^{۳} - \text{لا}_{۱}\text{لا}_{۲}\text{لا}_{۳})\,\text{فرلا}_{۴} = ۰$$

کے لیے یہ شرطیں پوری ہوتی ہیں۔

**(۱۲)** مثال (۱۱) کی مساوات کو حسب ذیل عمل سے تکمیل کرو:

(۱) $\text{لا}_{۳}$ اور $\text{لا}_{۴}$ کو مستقل فرض کرو اور اس طرح حاصل کرو

$$\text{لا}_{۱}^{۳} + \text{لا}_{۲}^{۳} - ۳\,\text{لا}_{۱}\text{لا}_{۲}\text{لا}_{۳}\text{لا}_{۴} = \text{ا}$$

(۲) ا کی بجائے $\text{ف}(\text{لا}_{۳}، \text{لا}_{۴})$ رکھو۔ تفرق کرکے اور ابتدائی مساوات کے ساتھ مقابلہ کرکے $\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}_{۳}}$ ، $\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}_{۴}}$ کو حاصل کرو اور پھر ف اور حل

$$\text{لا}_{۱}^{۳} + \text{لا}_{۲}^{۳} + \text{لا}_{۳}^{۳} + \text{لا}_{۴}^{۳} - ۳\,\text{لا}_{۱}\text{لا}_{۲}\text{لا}_{۳}\text{لا}_{۴} = \text{ج}$$

کو معلوم کرو۔

(۱۴۵) **(۱۳)** $\text{لا}_{۱} = \text{ع}\,\text{لا}_{۴}$، $\text{لا}_{۲} = \text{و}\,\text{لا}_{۴}$، $\text{لا}_{۳} = \text{ط}\,\text{لا}_{۴}$ رکھ کر مثال ۱۱ کی مساوات کو تکمیل کرو۔

**(۱۴)** ثابت کرو کہ حسب ذیل مساوات تکمیل پذیری کی شرطوں کو

پورا کرتی ہے اور اس کا تکملہ حاصل کرو :

ما جیب ط فرلا + لا جیب ط فرما - لا ما جیب ط فری - لا ما جم ط فر ط = ۰

(۱۵) ثابت کرو کہ مساوات

ا فرلا۲ + ب فرما۲ + ج فری۲ + ۲ ف فرما فری + ۲ گ فری فرلا
+ ۲ ھ فرلا فرما = ۰

شکل ف فرلا + ق فرما + سا فری = ۰

کی دو مساواتوں میں تحویل ہوتی ہے اگر

ا ب ج + ۲ ف گ ھ - ا ف۲ - ب گ۲ - ج ھ۲ = ۰

(مخروطات کے نتیجہ سے مقابلہ کرو)

پس ثابت کرو کہ

لا ما ی (فرلا۲ + فرما۲ + فری۲) + لا (ما۲ + ی۲) فرما فری + ما (ی۲
+ لا۲) فری فرلا + ی (لا۲ + ما۲) فرلا فرما = ۰

کا حل ( لا۲ + ما۲ + ی۲ - ج ) ( لا ما ی - ج ) = ۰

ہے - (دفعہ ۵۲ کے ساتھ مقابلہ کرو)

(۱۶) ثابت کرو کہ ف فرلا + ق فرما + سا فری = ۰ ..... (۱)

کی تکمیل پذیری کی شرط سے متقاطع منحنیوں کے قبیلوں

فرلا / ف = فرما / ق = فری / سا (۲)

اور فرلا / (جف ق / جف ی - جف سا / جف ما) = فرما / (جف سا / جف لا - جف ف / جف ی) = فری / (جف ف / جف ما - جف ق / جف لا) ..... (۳)

کے کسی زوج کا علی القوائم متقاطع ہونا لازم آتا ہے -

اس سے ثابت کرو کہ (۳) کے منحنی سب کے سب (۱) کی سطح پر واقع ہیں -

اس نتیجہ کی تصدیق ف = ن ا - م ی، ق = ل ی - ن لا، س = م لا - ل ا کے لیے کرو۔

[متماثل مساواتوں کے حل کے لیے اس باب کی ابتدائی مثالوں کو دیکھو]

(۱۷) گذشتہ مثال سے معلوم ہوتا ہے کہ اگر مساواتوں (۳) کے دو تکملے ع = مستقل، ب = مستقل ہوں تو مساوات (۱) کا تکملہ شکل ف (ع، ب) = مستقل میں بیان ہو جانا چاہیے۔ اور اس لیے

ف فرلا + ق فرا + س فری

ا فرع + ب فرب کے طور پر بیان ہونا چاہیے جہاں ا اور ب، ع اور ب کے تفاعل ہیں۔

اس کی تصدیق صورت

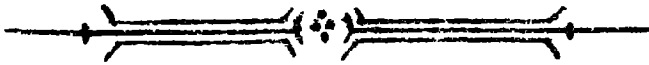
ف = ا ی لوک ی، ق = - ی لا لوک ی، س = لا ا،

ع = ا ی^۲، ب = لا ی^۲ لوک ی، ا = - ب، ب = ع

میں کرو۔

اس لیے (۱) کا تکملہ شکل ع = ج میں یعنی ا = ج لا لوک ی میں حاصل کرو۔

[اس باب کے تکملہ کے لیے دفعہ ۱۶۸ تا ۱۷۰ کا مطالعہ کرو۔ ان میں مئیر کا طریقہ اور متجانس مساواتوں کے لیے متکمل جزو ضربی کا بیان ملیگا]

# بارھواں باب

## پہلے رتبہ کی جزئی تفرقی مساواتیں مخصوص طریقے

(۱۴۶)

**۱۲۱** — ہم چوتھے باب میں یہ بیان کر چکے ہیں کہ اختیاری تفاعلوں یا اختیاری مستقلوں کو ساقط کر کے جزئی تفرقی مساواتیں کس طرح حاصل کی جاتی ہیں۔ ہم یہ بھی بتا چکے ہیں کہ بعض ایسی مساواتوں میں جو ریاضیاتی طبیعیات میں بڑی اہم ہیں سادہ مخصوص حل کس طرح معلوم کئے جا سکتے ہیں اور ان کی مدد سے زیادہ پیچیدہ حل جو ان ابتدائی اور حدودی شرطوں کو پورا کرتے ہیں جو بالعموم طبیعیاتی مسئلوں میں واقع ہوتی ہیں کس طرح حاصل کئے جا سکتے ہیں۔

اس باب میں خاص طور پر ان مساواتوں سے بحث کی جائے گی جو ہندسی دلچسپی کی حامل ہیں اور مختلف شکلوں "عام" "کامل" اور "نادر" تکملوں کو معلوم کیا جائے گا اور ان کی ہندسی تعبیر بیان کی جائیگی۔ مستثنیٰ مساواتوں کے متعلق یہ معلوم ہوگا کہ ان کے تکملے مختلف شکل کے ہوتے ہیں، ان کو ہم "مخصوص تکملے" کہیں گے۔

**۱۲۲** — **وہ ہندسی مسئلے جن کی ضرورت پڑیگی۔** طالب علم کو ہندسہ مجسمات کے حسب ذیل مسئلوں کا مطالعہ کرنا چاہئے۔

(۱) سطح ف (لا، ما، ی) = ۰ کے نقطہ (لا، ما، ی) پر اس کے عماد کی سمتی جیوب التمام نسبت

$$\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}} : \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} : \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ی}}$$

میں ہوتی ہیں -

چونکہ

$$-\frac{\dfrac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}}}{\dfrac{\text{جف ف}}{\text{جف ی}}} = \frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} = \text{ع (فرض کرو) اور } -\frac{\dfrac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}}}{\dfrac{\text{جف ف}}{\text{جف ی}}} = \frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}}$$

= ق (فرض کرو)

اس لیے اوپر کی نسبت کو ع : ق : -۱ بھی لکھا جا سکتا ہے -
اس پورے باب میں ع اور ق کو ان معنوں میں جس کی تعریف اوپر کی گئی ہے استعمال کیا جائے گا -

(۲) سطحوں ف (لا، ما، ی، ا، ب) = ۰
کے نظام کا لفاف جہاں ا اور ب متغیر مبدل ہیں دی ہوئی مساوات اور

$$\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ا}} = ۰، \quad \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ب}} = ۰$$

سے ا اور ب کو ساقط کر کے معلوم کیا جاتا ہے - (۱۴۷)

نتیجہ میں لفاف کے علاوہ دوسرے طریق بھی شامل ہو سکتے ہیں (دیکھو چھٹا باب) -

## ۱۲۳ - لگرانج کی خطی مساوات اور اس کی ہندسی تعبیر -

یہ عام مساوات

ف ع + ق ق = س، ........ (۱)

کے لیے استعمال کیا جاتا ہے جس میں ف ، ق ، ر تینوں لا ، ما ، ی کے تفاعل ہیں ۔

اس کی ہندسی تعبیر یہ ہے کہ ایک خاص سطح کا عماد اُس خط پر عمود ہے جس کی سمتی جیوب التمام میں نسبت ف : ق : ر ہے ۔ لیکن گذشتہ باب میں ہم نے یہ دیکھا ہے کہ ہمزاد مساواتیں

$$\frac{فرلا}{ف} = \frac{فرما}{ق} = \frac{فری}{ر} \quad \ldots\ldots (۲)$$

منحنیوں کے ایسے قبیل کو تعبیر کرتی ہیں کہ کسی نقطہ پر کے مماس کی سمتی جیوب التمام نسبت ف : ق : ر میں ہوتی ہیں اور مساوات فہ (ع ، و) = ۰ (جہاں ع = مستقل اور و = مستقل ان ہمزاد مساواتوں کے دو خاص تکملے ہیں) ایک سطح کو تعبیر کرتی ہے جو ان منحنیوں میں سے گذرتی ہے ۔ ایسی کسی سطح کے ہر نقطہ میں سے قبیل کا ایک منحنی گذرتا ہے جو کُلاً اس سطح پر واقع ہوتا ہے ۔ اس لیے سطح کا عماد اس منحنی کے مماس پر عمود ہونا چاہیے یعنے ایک ایسے خط پر جس کی جیوب التمام میں نسبت ف : ق : ر ہے ۔ یہ عین وہی ہے جو جزئی تفرقی مساوات کے لیے مطلوب تھی ۔

اس لیے مساوات (۱) کی سطحیں وہ ہیں جن میں سے دو دو کو لیا جائے تو مساوات (۲) کے منحنی حاصل ہوتے ہیں ۔ جب مساوات (۱) دیجاتی ہے تو مساواتوں (۲) کو ذیلی مساواتیں کہا جاتا ہے ۔

اس طرح (۱) کا ایک تکملہ فہ (ع ، و) = ۰ ہے اگر ع = مستقل اور و = مستقل ذیلی مساواتوں (۲) کے کوئی دو غیر تابع حل ہوں اور فہ کوئی اختیاری تفاعل ہو ۔ اس کو لگرانج کی خطی مساوات کا عام تکملہ کہتے ہیں ۔

مثال (۱)    ع + ق = ۱

ذیلی مساواتیں

$$\frac{فرلا}{۱} = \frac{فرما}{۱} = \frac{فری}{۱}$$

ہیں جو متوازی خطوط مستقیم کے ایک قبیل کو تعبیر کرتی ہیں۔ ان پر دفعہ ۱۱۲ مثال (۱) میں بحث کی جا چکی ہے۔

(۱۴۸) دو غیر تابع تکملے

لا - ی = ا

ما - ی = ب

ہیں جو مستویوں کے دو قبیلوں کو تعبیر کرتے ہیں جن میں یہ خطوط مستقیم واقع ہیں۔

عام تکملہ فہ (لا - ی، ما - ی) = ۰ ہے جو اس سطح کو تعبیر کرتا ہے جو منحنی

فہ (لا، ما) = ۰، ی = ۰

میں سے گذرنے والے خطوں کے قبیل سے بنی ہے۔

اگر کوئی معین منحنی دیا جائے مثلاً دائرہ

لا$^2$ + ما$^2$ = ۴، ی = ۰

تو اس کے متناظر ہم خاص تکملہ

(لا - ی)$^2$ + (ما - ی)$^2$ = ۴

حاصل کر سکتے ہیں، یہ تکملہ اس ناقصی اسطوانہ کو تعبیر کرتا ہے جو قبیل کے ان خطوں سے بنتا ہے جو دئے ہوئے دائرہ سے ملتے ہیں۔

مثال (۲) ی ع = - لا (دیکھو دفعہ ۱۱۲ مثال ۲)

ذیلی مساواتیں

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{ی}} = \frac{\text{فرما}}{\text{۰}} = \frac{\text{فری}}{-\text{لا}}$$

ہیں جن کے دو تکملے لا$^2$ + ی$^2$ = ا اور ما = ب ہیں۔

عام تکملہ فہ (لا$^2$ + ی$^2$، ما) = ۰۔ اس گردشی سطح کو تعبیر کرتا ہے جو منحنی

فہ (لا$^2$، ما) = ۰، ی = ۰

کو قطع کرنے والے منحنیوں کے قبیل (اس صورت میں دائروں کے قبیل) سے مبنی ہے۔

مثال (۳) اُن سطحوں کو معلوم کرو جن کے مماس مستوی ی کے محور سے مستقل طول ک کا مقطوعہ کریں۔

(لا، ما، ی) پر مماس مستوی

ے - ی = ع (ﻻ - لا) + ق (ما - ما)

ہے۔

رکھو ﻻ = ما = ۰، ے = ی - ع لا - ق ما = ک

ذیلی مساواتیں

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{لا}} = \frac{\text{فرما}}{\text{ما}} = \frac{\text{فری}}{\text{ی - ک}}$$

ہیں جن کے تکملے ما = ا لا، ی - ک = ب لا ہیں۔

عام تکملہ فہ $\left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}}, \frac{\text{ی - ک}}{\text{لا}}\right) = 0$ ایک مخروط کو جس کا راس (۰، ۰، ک) پر ہے تعبیر کرتا ہے اور یہ سطحیں صریحاً مطلوبہ خاصیت رکھتی ہیں۔

# حل طلب مثالیں

حسب ذیل مساواتوں کے عام تکملے معلوم کرو: (گیارہویں باب میں مثالوں کا پہلا جٹ دیکھو)

(۱) لا ع + ما ق = ی

(۲) (م ی - ن ما) ع + (ن لا - ل ی) ق = ل ما - م لا

(۳) (ما² + ی² - لا²) ع - ۲ لا ما ق + ۲ لا ی = ۰

(۴) ما ی ع + ی لا ق = لا ما

(۵) (ما + ی) ع + (ی + لا) ق = لا + ما

(١٤٩)

(٦) (ی² − ٢ ما ی − ما²) ع + (لا ما + لا ی) ق = لا ما − لا ی

(٧) ع + ٣ ق = ٥ ی + س (ما − ٣ لا)

(٨) ی ع − ی ق = ی² + (ما + لا)²

(٩) مثال (١) کا وہ حل معلوم کرو جو ایک سطح کو جو مکافی ما² = ٤ لا ، ی = ا سے ملے تعبیر کرے۔

(١٠) مثال (٤) کا عام ترین حل معلوم کرو جو ایک مخروطی نما کو تعبیر کرے۔

(١١) ثابت کرو کہ اگر مثال (٦) کا حل ایک کرہ کو تعبیر کرے تو مرکز مبدا پر ہوگا۔

(١٢) وہ سطحیں معلوم کرو جن کے تمام عماد محور ی کو قطع کریں۔

**١٢٤ — عام تکملہ کی تحلیلی تصدیق** — اب ہم اختیاری تفاعل فہ (ء، و) = ۰ سے ساقط کریں گے اور اس طرح اس امر کی تصدیق تحلیلی طور پر کریں گے کہ یہ ف ع + ق ق = ر کو پورا کرتا ہے بشرطیکہ ء = ا اور و = ب، ذیلی مساوات

فرلا / ف = فرما / ق = فری / ر

کے دو غیر تابع تکملے[1] ہوں۔

فہ (ء، و) = ۰ کو لا کے لحاظ سے، ما کو مستقل رکھ کر جزوی تفرق کرو تو لا کے تغیر کی وجہ سے ی بدلے گا۔ اس لیے حاصل ہوگا

[1] اگر ء اور و غیر تابع نہ ہوں تو (جف ء / جف ما · جف و / جف ی − جف ء / جف ی · جف و / جف ما) اور دیگر دو مشابہ جملے سب متماثلاً معدوم ہوتے ہیں (ایڈورڈ کا ڈفرنشیل کیلکولس دفعہ ٥١٠) اور اس سے مساوات (١)، = ۰ میں تحویل ہوتی ہے۔

$$\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ء}}\left(\frac{\text{جف ء}}{\text{جف لا}}+\frac{\text{جف ء}}{\text{جف ی}}\cdot\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}}\right)+\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف و}}\left(\frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}}+\frac{\text{جف و}}{\text{جف ی}}\cdot\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}}\right)=0$$

یعنی

$$\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ء}}\left(\frac{\text{جف ء}}{\text{جف لا}}+\text{ع}\,\frac{\text{جف ء}}{\text{جف ی}}\right)+\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف و}}\left(\frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}}+\text{ع}\,\frac{\text{جف و}}{\text{جف ی}}\right)=0$$

اسی طرح

$$\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ء}}\left(\frac{\text{جف ء}}{\text{جف ما}}+\text{ق}\,\frac{\text{جف ء}}{\text{جف ی}}\right)+\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف و}}\left(\frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}}+\text{ق}\,\frac{\text{جف و}}{\text{جف ی}}\right)=0$$

نسبت $\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ء}}:\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف و}}$ کو ان دو مساواتوں سے ساقط کیا جائے تو

$$\left(\frac{\text{جف ء}}{\text{جف ما}}+\text{ق}\,\frac{\text{جف ء}}{\text{جف ی}}\right)\left(\frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}}+\text{ع}\,\frac{\text{جف و}}{\text{جف ی}}\right)=\left(\frac{\text{جف ء}}{\text{جف لا}}+\text{ع}\,\frac{\text{جف ء}}{\text{جف ی}}\right)\left(\frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}}+\text{ق}\,\frac{\text{جف و}}{\text{جف ی}}\right)$$

یعنی

$$\left(\frac{\text{جف ء}}{\text{جف ما}}\,\frac{\text{جف و}}{\text{جف ی}}-\frac{\text{جف ء}}{\text{جف ی}}\,\frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}}\right)\text{ع}+\left(\frac{\text{جف ء}}{\text{جف ی}}\,\frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}}-\frac{\text{جف ء}}{\text{جف لا}}\,\frac{\text{جف و}}{\text{جف ی}}\right)\text{ق}=\frac{\text{جف ء}}{\text{جف لا}}\,\frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}}-\frac{\text{جف ء}}{\text{جف ما}}\,\frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}}\ ،\quad \ldots\ldots\ (1)$$

لیکن ء = ا سے،

$$\frac{\text{جف ء}}{\text{جف لا}}\,\text{فرلا}+\frac{\text{جف ء}}{\text{جف ما}}\,\text{فرما}+\frac{\text{جف ء}}{\text{جف ی}}\,\text{فری}=0$$

اِس لیے ذیلی مساواتوں سے جن کا ایک تکملہ ع = ا ہے

$$\text{ف}\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} + \text{ق}\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} + \text{ر}\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ی}} = ۰$$

اسی طرح

$$\text{ف}\frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}} + \text{ق}\frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}} + \text{ر}\frac{\text{جف و}}{\text{جف ی}} = ۰ \qquad (۱۵۰)$$

پس

$$\text{ف} : \text{ق} : \text{ر}$$

$$= \left(\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}\frac{\text{جف و}}{\text{جف ی}} - \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ی}}\frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}}\right) : \left(\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ی}}\frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}} - \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}\frac{\text{جف و}}{\text{جف ی}}\right) : \left(\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}\frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}} - \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}\frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}}\right)$$

اِس لیے مساوات (۱) ہو جاتی ہے

$$\text{ف ع} + \text{ق ق} = \text{ر}$$

جو مطلوبہ مساوات ہے۔

**۱۲۵ ــ خصوصی تکملے** ــ بعض اوقات یہ بیان کیا جاتا ہے کہ لگرانج کی خطی مساوات کے تمام تکملے عام تکملے فہ(ع، و) = ۰ میں شامل ہوتے ہیں لیکن ایسا نہیں ہے۔

مثلاً مساوات

$$\text{ع} - \text{ق} = ۲\sqrt{\text{ی}}$$

کی ذیلی مساواتیں

$$\frac{\text{فرلا}}{۱} = \frac{\text{فرما}}{-۱} = \frac{\text{فری}}{۲\sqrt{\text{ی}}}$$

ہیں۔

اس طرح ہم ع = لا + ما، و = لا − $\sqrt{\text{ی}}$ لے سکتے ہیں اور عام تکملہ کو شکل

$$\text{فہ}\left(\text{لا} + \text{ما}، \text{لا} - \sqrt{\text{ی}}\right) = ۰$$

میں کہہ سکتے ہیں ۔

لیکن ی = ۰ جزئی تفرقی مساوات کو پورا کرتا ہے اگرچہ یہ صریحاً ناممکن ہے کہ اس کو عام تکملہ سے حاصل کیا جائے ۔

ایسے تکملہ کو مخصوص تکملہ کہتے ہیں ۔ یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ سمروں ف، ق، ر پر بعض مناسب قیود عائد کر کے تمام مخصوص تکملے معلوم کئے جا سکتے ہیں اور یہ اس طرح کہ سمروں کی اُن قیموں کو جن میں ندرت ہو (مثلاً ا/ی) صفر کے مساوی رکھا جائے ۔ اس کے برخلاف یہ ہو سکتا ہے کہ ایسی رقم سے کوئی خاص تکملہ حاصل نہ ہو ۔ مسٹر ایم جے ایم ہل[1] نے کام کو جاری رکھتے ہوئے[2] ضروری اور کافی شرطیں منضبط کی ہیں کہ ایسی رقم سے خاص تکملہ حاصل ہو اور نیز تکملوں کی مختلف قسموں کی جدید تقسیم کی ہے جس کی ضرورت مسٹر فورسائتھ[3] نے بتائی تھی ۔

## حل طلب مثالیں

ثابت کرو کہ حسب ذیل مساواتوں کے عام تکملے اور مخصوص تکملے وہ ہیں جو ساتھ ہی درج کئے گئے ہیں :

(۱) ع + ۲ ق ی$^{\frac{1}{2}}$ = ۳ ی$^{\frac{2}{3}}$ ، فہ(لا - ی$^{\frac{1}{2}}$ ، ما - ی$^{\frac{3}{2}}$) = ۰ ، ی = ۰

(۲) ع + ق $\{$۱ + (ی - ما)$^{\frac{1}{2}}$$\}$ = ۱ ، فہ $\{$لا - ی ، ۲ لا + ۳ (ی - ما)$^{\frac{3}{2}}$$\}$ = ۰ ، ی = ما

---

[1] Proc. London Math. Soc 1917

[2] Journal Lond. Math. Soc, 1939

[3] Proc. London Math. Soc. 1905—6

(۳) $\{ ۲ ما - ی \}$ فہ ۲ = ع + ق $\{ \sqrt{ی - لا - ما} + ۱ \}$، ما

$+ ۲ \sqrt{ی - لا - ما} \} = ۰$، ی = لا + ما [Chrystal]

(۴) کرسٹل کی مساوات (مثال ۳) میں $(ی - لا - ما)^{\frac{۱}{۲}} =$ ط رکھ کر

$$ط \left[ ۲ (۱ + ط) \frac{جف ط}{جف لا} + ۲ \frac{جف ط}{جف ما} + ۱ \right] = ۰$$ (۱۵۱)

کو حاصل کرو۔

اِس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ ابتدائی مساوات کا ایک حل ی - لا - ما = ۰ ہے۔ (Hill)

(۵) ثابت کرو کہ کرسٹل کی مساوات (مثال ۳) کی لگرانجی ذیلی مساواتوں کو

$$\frac{فرلا}{فرما} = ۱ + (ی - لا - ما)^{\frac{۱}{۲}}، \quad \frac{فری}{فرما} = ۲$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اخذ کرو

$$\frac{فر}{فرما}(ی - لا - ما) = -(ی - لا - ما)^{\frac{۱}{۲}}$$

جس کا ایک مخصوص حل ی - لا - ما = ۰ ہے۔

(۶) مساوات ع - ق = $۲ \sqrt{ی}$ کے عام اور مخصوص تکملے بل کے طریقہ کی نقل کر کے جیسا کہ مثال ۴ اور ۵ میں کیا گیا ہے حاصل کرو۔

## ۱۲۶ — ن متبوع متغیروں کی خطی مساوات۔ مساوات

$$ف_۱ ع_۱ + ف_۲ ع_۲ + ف_۳ ع_۳ + \ldots + ف_ن ع_ن = س$$

کا عام تکملہ

$$\text{ف}\,(\text{ع}_1 ،\ \text{ع}_2 ،\ \text{ع}_3 ،\ ....\ \text{ع}_{\text{ن}}) = 0$$

ہے جہاں $\text{ع}_1 = \dfrac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}_1}$ ، $\text{ع}_2 = \dfrac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}_2}$ ، ......

$\text{ف}_1$ ، $\text{ف}_2$ ، $\text{ف}_3$ ، .... اور س ، $\text{لا}_1$ ، $\text{لا}_2$ .... اور ی کے تفاعل ہیں اور

اور $\text{ع}_1 =$ مستقل ، $\text{ع}_2 =$ مستقل ، ....

ذیلی مساواتوں $\dfrac{\text{فر لا}_1}{\text{ف}_1} = \dfrac{\text{فر لا}_2}{\text{ف}_2} = \dfrac{\text{فر لا}_3}{\text{ف}_3} = .... = \dfrac{\text{فر ی}}{\text{س}}$

کے کوئی ن غیرتابع تکملے ہیں۔

اس کی تصدیق حسب دفعہ ۱۲۴ کی جاسکتی ہے۔ طالب علم کو چاہیے کہ وہ ن متبوع متغیروں کی صورت لیکر اس کو ثابت کرو۔

اس عام تکملہ کے علاوہ استثنائی مساواتوں کے مخصوص تکملے عین اسی طرح موجود ہوتے ہیں جس طرح دو متبوع متغیروں کی صورت میں۔

## حل طلب مثالیں

(۱) $\text{ع} + \text{ع}_2 = 1 + \text{ع}_1$

(۲) $\text{لا}_1\text{ع}_1 + 2\,\text{لا}_2\text{ع}_2 + 3\,\text{لا}_3\text{ع}_3 + 4\,\text{لا}_4\text{ع}_4 = 0$

(۳) $(\text{لا}_3 - \text{لا}_2)\,\text{ع}_1 + \text{لا}_2\text{ع}_2 - \text{لا}_2\text{ع}_3 = \text{لا}_2(\text{لا}_1 + \text{لا}_3) - \text{لا}_2^2$

(۴) $\text{لا}_2\text{لا}_3\text{ع}_1 + \text{لا}_3\text{لا}_1\text{ع}_2 + \text{لا}_1\text{لا}_2\text{ع}_3 + \text{لا}_1\text{لا}_2\text{لا}_3 = 0$

(۵) $\text{ع}_1 + \text{لا}_1\text{ع}_2 + \text{لا}_1\text{لا}_2\text{ع}_3 = \text{لا}_1\text{لا}_2\sqrt{\text{لا}_3\,\text{ی}}$

$$(\text{۶})\quad \text{ع}_{\text{۱}} + \text{ع}_{\text{۲}} + \text{ع}_{\text{۳}} \left\{ \text{۱} + \sqrt{\text{ی} - \text{لا}_{\text{۱}} - \text{لا}_{\text{۲}} - \text{لا}_{\text{۳}}} \right\} = \text{۳}$$

## (۱۵۲) ۱۲۷ ـ مساوات $\text{ف} \dfrac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}} + \text{ق} \dfrac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} + \text{س} \dfrac{\text{جف ف}}{\text{جف ی}} = \text{۰}$

ـ اگر ف، ق، اور س، لا، ما، اور ی کے تفاعل ہوں لیکن ف کے نہ ہوں تو اس مساوات پر دو مختلف طریقوں سے بحث کی جا سکتی ہے ـ

مثلاً مساوات

$$\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}} - \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} + \text{۲}\sqrt{\text{ی}}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ی}} = \text{۰} \quad \ldots (\text{۱})$$

پر غور کرو ـ

ہم یہ سمجھ سکتے ہیں کہ یہ مساوات، سہ بُعدی مساوات

$$\text{ع} - \text{ق} = \text{۲}\sqrt{\text{ی}} \qquad (\text{۲})$$

کے معادل ہے جس کا عام تکملہ

$$\text{فہ}\,(\text{لا} + \text{ما}،\ \text{لا} - \sqrt{\text{ی}}) = \text{۰}$$

ہے اور ایک مخصوص تکملہ $\text{ی} = \text{۰}$ ہے ـ

اِس کے برخلاف اگر ہم (۱) کو چار متغیروں کی ایک مساوات سمجھیں تو عام تکملہ

$$\text{فہ}\,(\text{ف}،\ \text{لا} + \text{ما}،\ \text{لا} - \sqrt{\text{ی}}) = \text{۰}$$

حاصل ہوتا ہے جو $\text{ف} = \text{سا}\,(\text{لا} + \text{ما}،\ \text{لا} - \sqrt{\text{ی}})$ کے معادل ہے جہاں سا ایک اختیاری تفاعل ہے لیکن یہ صرف اُس صورت میں جبکہ

$$\text{ف} = \text{ی}،\quad \frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}} - \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} + \text{۲}\sqrt{\text{ی}}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ی}} = \text{۲}\sqrt{\text{ی}} = \text{۲}\sqrt{\text{ف}}$$

اِس طرح ف = ی، (۱) کا تکملہ نہیں ہے، اگرچہ ف = ی = ۰ سے یقیناً ایک حل حاصل ہوتا ہے۔

عام طور پر یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ اگر

$$\text{ف}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}}+\text{ق}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}}+\text{ر}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ی}}=0$$

کو چار بُعدی سمجھا جائے اور ف، ق، اور ر میں ف شریک نہ ہو تو اِس کے کوئی مخصوص تکملے نہیں ہوتے[۱] متعدد متبوع متغیروں کے لیے مشابہ مسئلہ بھی درست ہے۔

# حل طلب مثالیں

(۱) ثابت کرو کہ اگر ف = لا تو ف = ۰ ایک ایسی سطح ہے جو

$$\overline{\text{ہ لا}}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}}+\overline{\text{ہ ما}}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}}+\overline{\text{ہ ی}}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ی}}=0$$

کو پورا کرتی ہے اور پھر اِس سے یہ ثابت کرو کہ اِس تفرقی مساوات کے تین مخصوص تکملے

$$\text{لا}=0,\quad \text{ما}=0,\quad \text{ی}=0$$

ہیں اور عام تکملہ $\text{فہ}\left(\overline{\text{ہ ی}}-\overline{\text{ہ لا}},\ \overline{\text{ہ ی}}-\overline{\text{ہ ما}}\right)=0$ ہے اگر اِس تفرقی مساوات کو سہ بُعدی سمجھا جائے۔

(۲) ثابت کرو کہ گذشتہ مثال کا عام تکملہ اُن منحنیوں میں سے گذرنے والی سطحوں کو تعبیر کرتا ہے جو (اگر وہ مبداء میں سے نہیں گذرتے تو) محددوں کے مستویوں کو مس کرتے ہیں یا ان میں سے ایک میں کُلّاً واقع ہیں۔

---

[۱] دیکھو ضمیمہ ب۔

[اشارہ - ثابت کرو کہ $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}} = \sqrt{\frac{\text{لا}}{\text{لا}+\text{ما}+\text{ی}}}$ اور یہ کہ $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}} = ۰$ اگر لا = ۰ . الا آنکہ لا، ما، ی سب صفر ہوں - ]

۱۵۳

(۳) ثابت کرو کہ اگر $\sqrt{\text{لا}}\,\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} + \sqrt{\text{ما}}\,\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}} = ۰$ کو دو بُعدی سمجھا جائے تو وہ مکافیوں کے قبیل $\sqrt{\text{ما}} = \sqrt{\text{لا}} + \text{ج}$ اور ان کے لفاف اور محددوں کے محوروں لا = ۰، ما = ۰ کو تعبیر کرتی ہے لیکن اگر اس کو سہ بُعدی سمجھا جائے تو وہ سطحوں $\text{ی} = \text{فہ}\,(\text{ما}^{\frac{1}{2}} - \text{لا}^{\frac{1}{2}})$ کو تعبیر کرتی ہے -

**۱۲۸ - غیر خطی مساواتیں** - اب ہم ایسی مساواتوں پر غور کریں گے جن میں ع اور ق پہلے درجہ میں واقع نہیں ہوتے بلکہ کسی اور درجہ میں - عام طریقہ بیان کرنے سے پیشتر ہم چار معیاری شکلوں پر بحث کرینگے جن کے لیے "ایک کامل تکملہ"؎ (یعنے جس میں دو اختیاری مستقل شامل ہوں) صرف معائنہ کرنے سے یا دوسرے معمولی ذریعوں سے حاصل ہوسکتا ہے - دفعہ ۱۳۳ تا دفعہ ۱۳۵ میں ہم یہ بتائیں گے کہ کامل تکملوں سے عام اور نادر تکملے کس طرح اخذ کیے جا سکتے ہیں -

**۱۲۹ - معیاری شکل (۱) - صرف ع اور ق موجود -**

مثلاً مساوات

$$\text{ق} = ۳\,\text{ع}^2$$

پر غور کرو -

سب سے زیادہ واضح حل یہ ہے کہ ع اور ق کو ایسے مستقل سمجھا جائے جو مساوات کو پورا کریں مثلاً

$$\text{ع} = \text{ا} \quad \text{اور} \quad \text{ق} = ۳\,\text{ا}^2$$

؎ Complete Integral

اب چونکہ

$$\text{فی} = \text{ع فلا} + \text{ق فما} = \text{ا فلا} + ۳\,\text{ا}^{2}\,\text{فما}$$

اس لیے

$$\text{ی} = \text{ا لا} + ۳\,\text{ا}^{2}\,\text{ما} + \text{ج}$$

یہ کامل تکملہ ہے جس میں دو اختیاری مستقل ا اور ج شریک ہیں۔
عام طور پر ف (ع، ق) = ۰ کا کامل تکملہ

$$\text{ی} = \text{ا لا} + \text{ب ما} + \text{ج}$$

ہے جہاں ا اور ب میں رشتہ ف (ا، ب) = ۰ ہے۔

## حل طلب مثالیں

تب ذیل مساواتوں کے کامل تکملے معلوم کرو:

(۱) $\text{ع} = ۲\,\text{ق}^{2} + ۱$ (۲) $\text{ع}^{2} + \text{ق}^{2} = ۱$

(۳) $\text{ع} = \text{ق}^{\text{ق}}$ (۴) $\text{ع}^{2}\,\text{ق}^{3} = ۱$

(۵) $\text{ع}^{2} - \text{ق}^{2} = ۴$ (۶) $\text{ع ق} = \text{ع} + \text{ق}$

## ۱۳۰ — معیاری شکل (۲)۔ صرف ع، ق اور ی موجود

مساوات

$$\text{ی}^{2}\,(\text{ع}^{2}\,\text{ی}^{2} + \text{ق}^{2}) = ۱ \qquad (۱)$$

پر غور کرو۔
آزمائشی حل کے طور پر فرض کرو کہ ی، لا + ا ما کا ایک تفاعل ہے جہاں ا ایک اختیاری مستقل ہے۔ فرض کرو کہ یہ تفاعل ۶ ہے۔

تب
$$\text{ع} = \frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف ی}}{\text{جف ۶}} \times \frac{\text{جف ۶}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف ی}}{\text{جف ۶}}$$

$$\text{ق} = \frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}} = \frac{\text{جف ی}}{\text{جف ۶}} \times \frac{\text{جف ۶}}{\text{جف ما}} = \text{ا}\,\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ۶}}$$

(۱) میں درج کرنے پر

$$ی^۲ \left(\frac{فری}{فر۶}\right)^۲ (ی^۲ + ۱^۲) = ۱$$

یعنے $\frac{فر۶}{فری} = \pm ی (ی^۲ + ۱^۲)^{\frac{۱}{۲}}$

یعنے $۶ + ب = \pm \frac{۱}{۳} (ی^۲ + ۱^۲)^{\frac{۳}{۲}}$

یعنے $۹ (لا + ۱ ما + ب)^۲ = (ی^۲ + ۱^۲)^۳$

(۱۵۴) عام طور پر اس طریقے سے مساوات ف (ی، ع، ق) = ۰، معمولی تفرقی مساوات

$$ف \left(ی، \frac{فری}{فر۶}، ۱ \frac{فری}{فر۶}\right) = ۰$$

میں تحویل ہوتی ہے۔

## حل طلب مثالیں

حسب ذیل مساواتوں کے کامل تکملے معلوم کرو:

(۱) $۴ ی = ع ق$ (۲) $ی^۲ = ۱ + ع^۲ + ق^۲$

(۳) $ق^۲ = ی^۲ ع^۲ (۱ - ع^۲)$ (۴) $ع^۳ + ق^۳ = ۲۷ ی$

(۵) $ع (ی + ع) + ق = ۰$ (۶) $ع^۲ = ی ق$

## ۱۳۱ — معیاری شکل (۳)۔ ف (لا، ع) = فا (ما، ق)

مساوات $ع - ۳ لا^۲ = ق^۲ - ما$ پر غور کرو۔ آزمائشی حل کے طور پر اس مساوات کی ہر جانب کے جملہ کو ایک اختیاری مستقل ۱ کے مساوی رکھو تو

$$ع = ۳ لا^۲ + ۱، \quad ق = \pm \sqrt{ما + ۱}$$

لیکن $فری = ع فرلا + ق فرما$

= (۳ لا^۲ + ۱) فرلا ± √(ما + ۱) فرما

اِس لیے ی = لا^۳ + لا ± ۲/۳ (ما + ۱)^(۳/۲) + ب

اور یہ مطلوبہ کامِل تکملہ ہے۔

## حل طلب مثالیں

حسبِ ذیل مساواتوں کے کامل تکملے معلوم کرو:

(۱) ع^۲ = ق + لا (۲) ع ق = لا ما

(۳) ما ع = ۲ ما لا + لوگ ق (۴) ق = لا ما ع^۲

(۵) ع فو^ما = ق فو^لا (۶) ق (ع - جم لا) = جم ما

## ۱۳۲ ـــ معیاری شکل (۴) - جزئی تفرقی مساواتیں جو کلیرو کی شکل کے مشابہ ہیں

چوتھے باب میں ہم نے یہ بتایا تھا کہ

ما = ع لا + ف (ع)

کا کامِل ابتدائی ما = ج لا + ف (ج)

ہے اور یہ خطوطِ مستقیم کا ایک قبیل ہے۔

اِسی طرح جزئی تفرقی مساوات

ی = ع لا + ق ما + ف (ع، ق)

کا کامِل تکملہ ی = ا لا + ب ما + ف (ا، ب)

ہے اور یہ مستویوں کا ایک قبیل ہے۔

مثالاً ی = ع لا + ق ما + ع^۲ + ق^۲

کا کامِل تکملہ ی = ا لا + ب ما + ا^۲ + ب^۲

ہے۔

کلیروی شکل کے نادر حل کے جواب میں جس سے خطوط مستقیم کے
قبیل کا لفاف حاصل ہوتا ہے آئندہ دفعہ میں یہ معلوم ہوگا کہ جزئی تفرقی
مساوات کا ایک "نادر تکملہ" ہوتا ہے جس سے مستویوں کے قبیل کا
لفاف حاصل ہوتا ہے۔

## حل طلب مثالیں

(۱) ثابت کرو کہ ی = ع لا + ق ما − ۲ ع − ۳ ق کا کامل تکملہ
ان تمام مستویوں کو تعبیر کرتا ہے جو نقطہ (۲، ۳، ۰) میں سے گذرتے ہیں۔

(۲) ثابت کرو کہ ی = ع لا + ق ما + √(ع² + ق² + ۱) کا کامل تکملہ
ان تمام مستویوں کو تعبیر کرتا ہے جو مبدا سے اکائی فاصلہ پر ہیں۔

(۳) ثابت کرو کہ ی = ع لا + ق ما + ع ق / (ع ق − ع − ق) کا کامل تکملہ
ایسی تمام مستوی سطحوں کو تعبیر کرتا ہے کہ محددوں کے تین محوروں پر ان کے
مقطوعوں کا جبری مجموعہ ایک ہے۔

**۱۳۳ — نادر تکملے** — چھٹے باب میں ہم نے یہ ثابت کیا تھا
کہ اگر منحنیوں کا وہ قبیل جو پہلے رتبہ کی ایک معمولی تفرقی مساوات کے
کامل ابتدائی سے تعبیر ہوتا ہے ایک لفاف رکھے تو اس لفاف کی
مساوات تفرقی مساوات کا ایک نادر حل ہوتی ہے۔ اس کے مشابہ
مسئلہ سطحوں کے ایک ایسے قبیل کے متعلق درست ہے جو پہلے
رتبہ کی ایک جزئی تفرقی مساوات کے کامل تکملہ سے تعبیر ہوتا ہو۔
اگر ان سطحوں کا لفاف ہے تو اس کی مساوات کو "نادر تکملہ" کہتے ہیں
یہ معلوم کرنے کے لیے کہ وہ فی الواقع ایک تکملہ ہے صرف یہ دیکھنے کی

ضرورت ہے کہ لفاف کے کسی نقطہ پر قبیل کی ایک سطح ہے جو اس کو مس کرتی ہے۔ اِس لیے لفاف کا عماد اور اس سطح کا عماد ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں اور اِس لیے لفاف کے کسی نقطہ پر ع اور ق کی قیمتیں وہی ہوتی ہیں جو قبیل کے کسی خاص سطح کی ہیں اور اِس لیے اُسی مساوات کو پورا کرتی ہیں۔

ہم نے نادر حلوں کو معلوم کرنے کے دو طریقے، ایک ج ممیز سے اور دوسرا ع ممیز سے، بیان کئے تھے اور یہ بتایا تھا کہ اِن طریقوں سے عقدہ طریق، قرن طریق، اور تماسی طریق بھی حاصل ہوتے ہیں جن کی مساواتیں تفرقی مساواتوں کو پورا نہیں کرتیں۔ چھٹے باب کے ہندسی استدلال کی توسیع سطحوں پر کی جا سکتی ہے لیکن اُن زائد طریقوں (Loci) کی بحث جن سے نادر حل حاصل نہیں ہوتے زیادہ پیچیدہ[1] ہے۔ جہاں تک کہ لفاف کا تعلق ہے وہ طالب علم جس نے چھٹے باب کو خوب سمجھا ہو یہ سمجھنے میں کوئی مشکل محسوس نہیں کرے گا کہ یہ سطح اُن میں شامل ہے جو ا اور ب کو کامل تکملہ اور دو مشتق مساواتوں

ف (لا، ما، ی، ا، ب) = ۰،

جف ف / جف ا = ۰،

جف ف / جف ب = ۰،

سے ساقط کرنے سے حاصل ہوتی ہیں یا ع اور ق کو تفرقی مساوات ۱۵۶ اور دو مشتق مساواتوں

فا (لا، ما، ی، ع، ق) = ۰،

جف فا / جف ع = ۰،

جف فا / جف ق = ۰

[1] دیکھو یم۔ جے یم۔ ہل کا مضمون Phil. Trans. (A), 1893

سے ساقط کرنے سے حاصل ہوتی ہیں۔

کسی حقیقی مثال میں اس کا امتحان کرلینا چاہیئے کہ آیا نادر تکملہ حقیقت میں تفرقی مساوات کو پورا کرتا ہے۔

**مثال (۱)** دفعہ ۱۳۲ کی مساوات کا کامل تکملہ

ی = ا لا + ب ما + ا$^2$ + ب$^2$

تھا۔

ا کے لحاظ سے تفرق کرنے پر ۰ = لا + ۲ ا

اسی طرح ب کے لحاظ سے تفرق کرنے پر ۰ = ما + ۲ ب

ا اور ب کو ساقط کرنے سے ۴ ی = − (لا$^2$ + ما$^2$)

اس کی آسانی سے تصدیق ہو سکتی ہے کہ یہ تفرقی مساوات

ی = ع لا + ق ما + ع$^2$ + ق$^2$

کو پورا کرتا ہے اور اس سے ایک گردشی مکافی نما تعبیر ہوتا ہے جو ان تمام مستویوں کا لفاف ہے جن کو کامل تکملہ تعبیر کرتا ہے۔

**مثال (۲)** دفعہ ۱۳۰ کی مساوات کا کامل تکملہ

۹ (لا + ا ما + ب)$^2$ = (ی$^2$ + ا$^2$)$^3$ (۱)

تھا۔

ا کے لحاظ سے تفرق کرنے پر

۱۸ ما (لا + ا ما + ب) = ۶ ا (ی$^2$ + ا$^2$)$^2$ (۲)

اسی طرح ۱۸ (لا + ا ما + ب) = ۰ (۳)

اس لیے (۲) سے ا = ۰

(۱) میں (۳) اور (۴) سے اندراج کرنے پر

ی = ۰

لیکن ی = ۰ سے ع = ق = ۰ اور یہ قیمتیں تفرقی مساوات

ی$^2$ (ع$^2$ ی$^2$ + ق$^2$) = ۱

کو پورا نہیں کرتیں۔

اِس لیے ی = ۰ نادر تکملہ نہیں ہے۔

**مثال (۳)** مساوات $ع^2 = ی ق$ پر غور کرو۔

ع کے لحاظ سے تفرق کرنے پر ۲ ع = ۰

اسی طرح ۰ = ی

اِن مساواتوں سے ع اور ق کو ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے

ی = ۰

یہ تفرقی مساوات کو پورا کرتا ہے اور اِس لیے وہ حقیقت میں نادر تکملہ ہے

لیکن وہ $ی = ب و^{ا لا + ا^2 ما}$

میں ب = ۰ رکھنے سے ماخوذ ہو سکتا ہے جو ایک کامل تکملہ ہے۔

اِس لیے ی = ۰ ایک نادر تکملہ بھی ہے اور کامل تکملہ کی ایک مخصوص صورت بھی۔

(۱۵۷)

## حل طلب مثالیں

حسب ذیل مساواتوں کے نادر تکملے معلوم کرو:

(۱) ی = ع لا + ق ما + لوگ ع ق

(۲) $ی = ع لا + ق ما + ع^2 + ع ق + ق^2$

(۳) $ی = ع لا + ق ما + \frac{1}{2} ع^2 ق^2$

(۴) $ی = ع لا + ق ما + \frac{ع}{ق}$

(۵) ۴ ی = ع ق (۶) $ی^2 = ۱ + ع^2 + ق^2$

(۷) $ع^3 + ق^3 = ۲۷ ی$

(۸) ثابت کرو کہ کسی ایسی مساوات کا نادر تکملہ نہیں ہوتا جو معیاری شکل (۱) یا (۳) سے متعلق ہو۔ [معمولی عمل سے مساوات ۰ = ۱ حاصل ہوتی ہے]

(۹) ثابت کرو کہ ی = ۰ مساوات $ق^2 = ی^2 ع^2 (۱ - ع^2)$ کا ایک

نادر حل بھی ہے اور اِس کے کامل تکملہ کی ایک مخصوص صورت بھی۔

**۱۳۴ — عام تکملے۔** گزشتہ دفعہ کی مثال (۱) میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ کامل تکملہ

$$ی = ا\,لا + ب\,ما + ا^{2} + ب^{2} \qquad (۱)$$

سے تعبیر شدہ تمام مستوی اُس گردشی مکافی نما کو مس کرتے ہیں جو نادر تکملہ

$$۴\,ی = -(لا^{2} + ما^{2}) \qquad (۲)$$

سے تعبیر ہوتا ہے۔

اب تمام مستویوں پر نہیں بلکہ صرف اُن مستویوں پر غور کرو جو مستوی ما = ۰ پر عمود ہیں۔ یہ مستوی (۱) میں ب = ۰ رکھنے سے حاصل ہوتے ہیں چنانچہ

$$ی = ا\,لا + ا^{2}$$

اور لفاف مکافی اسطوانہ

$$۴\,ی = -لا^{2} \qquad (۳)$$

ہے۔

مستویوں کا دوسرا جٹ لو یعنے وہ جو نقطہ (۰، ۰، ۱) میں سے گزرتے ہیں

$$(۱) \text{ سے } \quad ۱ = ا^{2} + ب^{2}$$

اِس لیے مساوات (۱) ہو جاتی ہے

$$ی = ا\,لا \pm ما\,(۱ - ا^{2})^{\frac{1}{2}} + ۱$$

اور لفاف قائم مستدیر مخروط

$$(ی - ۱)^{2} = لا^{2} + ما^{2} \qquad (۴)$$

آسانی سے معلوم ہوتا ہے۔

عام طور پر ہم ب = ف (ا) رکھ سکتے ہیں جہاں ف، ا کا کوئی تفاعل ہے چنانچہ

$$ی = ا\,لا + ما\,ف(ا) + ا^{2} + \{ف(ا)\}^{2} \qquad (۵)$$

(۵) کا لفاف ' ا کو مساوات (۵) اور اُس مساوات سے ساقط کر کے حاصل کیا جاتا ہے جو (۵) کو ا کے لحاظ سے جزئی طور پر تفرق کرنے سے حاصل ہوتی ہے یعنی

۰ = لا + ما فَ (ا) + ۲ ا + ۲ ف (ا) فَ (ا) (۶)

اگر ف کو بالکل اختیاری تفاعل خیال کیا جائے تو اس حاصل اسقاط کو ابتدائی تفرقی مساوات کا "عام تکملہ" کہتے ہیں۔ مساواتیں (۳) اور (۴) خاص تکملے ہیں جو اس عام تکملہ سے ماخوذ ہیں۔

ہم پہلے رتبہ کی ایک جزئی تفرقی مساوات کے عام تکملہ کی تعریف کرسکتے ہیں کہ وہ ایک ایسی مساوات ہے جو اُن سطحوں کے ہر ممکن اکہرے لامتناہی جتھ کے لفافوں کے مجموعہ کو تعبیر کرتی ہے جو کامل تکملہ سے تعبیر شدہ سطحوں کے دوہرے لامتناہی جتھ سے منتخب کیا جاسکتے ہیں۔ یہ جتھ کامل تکملہ میں ب = ف (ا) رکھنے سے حاصل ہوتے ہیں۔

ا کو اُن دو مساواتوں سے جن سے لفافہ حاصل ہوتا ہے فی الواقع ساقط کرنا' اختیاری تفاعل ف اور اس کے تفرقی سر کی وجہ سے' بالعموم ناممکن ہے۔ یہ صرف مخصوص صورتوں میں جبکہ ف' ا کا ایک معین (بہتر ہے کہ مفرد) تفاعل ہو ہمارے دلچسپی کا موجب ہوتا ہے۔ (۱۵۸)

**۱۳۵ — محیز** — اُن دو متصلہ سطحوں کے تقاطع کے خط کو محیز کہتے ہیں جو سطحوں کے کسی ایسے اکہرے لامتناہی جتھ سے متعلق ہوتی ہے جن کو کامل ابتدائی سے تعبیر شدہ سطحوں کے دوہرے لامتناہی جتھ سے منتخب کیا گیا ہو۔

اب ایسے کسی منحنی کو سطحوں کے قبیل کی مساوات سے اُن ہی دو مساواتوں کے ذریعہ معلوم کیا جاتا ہے جن سے لفافہ حاصل ہوتا ہے۔ مثلاً گذشتہ دفعہ کی مساواتوں (۵) اور (۶) کو لو تو ا کی کسی معین عددی قیمت کے لیے ف (ا) اور فَ (ا) سے

ایک خط مستقیم (دو مستویوں کے خط تقاطع کے طور پر) حاصل ہوگا اور یہ خط مستقیم ایک ممیز ہوگا۔ اس مثال میں ممیز خطوط مستقیم کے تہرے لامتناہی جٹ پر مشتمل ہیں جو گردشی مکافی نما (۲) کو مس کرتے ہیں۔

مکافی اسطوانہ (۳) ممیزوں کے ایک اکہرے لامتناہی جٹ سے تکوین پاتا ہے یعنی اُن سے جو ... پر عمود ہیں اور مخروط (۴) دوسرے جٹ سے تکوین پاتا ہے یعنی اُن سے جو ثابت نقطہ (۰، ۰، ۱) میں سے گذرتے ہیں۔ اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ **عام تکملہ تمام ایسی سطحوں کے مجموعہ کو تعبیر کرتا ہے جو ممیزوں سے تکوین پاتی ہیں۔**

**اگر ایک نادر تکملہ موجود ہو تو تمام ممیز اس کو مس کرنے چاہئیں** اور اس لیے وہ تمام سطحیں اس کو مس کرنی چاہئیں جو عام تکملہ سے تعبیر شدہ سطحوں کے مخصوص جٹوں سے تکوین پاتی ہیں۔ اس کی آسانی سے تصدیق ہوسکتی ہے کہ گذشتہ دفعہ کا مکافی اسطوانہ اور قائم مستدیر مخروط گردشی مکافی نما کو مس کرتے ہیں۔

## ۱۳۶ – خطی مساوات کی خصوصیات۔ خطی مساوات

$$ف ع + ق ق = ر$$

پر غور کرو۔ فرض کرو کہ

$$ع = \text{مستقل}$$

اور

$$و = \text{مستقل}$$

ذیلی مساواتوں کے دو غیر تابع تکملے ہیں[1]۔

[1] چونکہ ع اور و غیر تابع ہیں ان میں سے کم از کم ایک میں ی شریک ہونا چاہیے۔ فرض کرو کہ ی، ع میں ہے۔ یہ ہم اس وجہ سے کرتے ہیں کہ ع + ا و + ب، حرف لا اور یا کا تفاعل نہ ہونے پائے کیونکہ اگر ایسا ہو تو ع + ا و + ب = ۰ سے (۱) کی رقمیں غیر متعین ہوجائیں گی اور معمولی طریقہ پر مساوات (۱) پوری نہ ہوسکے گی۔

اب اِس کی آسانی سے تصدیق ہو سکتی ہے کہ (۱) کا ایک تکملہ

۶ + ا و + ب = ۰ (۲)

ہے۔

(۱۵۹) اِس کو کامل تکملہ کے طور پر لیا جا سکتا ہے۔ عام تکملہ کو

۶ + ا و + ف (ا) = ۰ (۳)

و + فَ (ا) = ۰ (۴)

سے معلوم کیا جاتا ہے۔

(۴) سے ظاہر ہے کہ ا، صرف و کا ایک تفاعل ہے، فرض کرو

ا = فا (و)

(۳) میں درج کرنے سے

۶ = (و کا ایک تفاعل)

اِس لیے فرض کرو کہ ۶ = سا (و)

یہ اُس عام تکملہ فہ (۶، و) = ۰ کے مماثل ہے جو اِس باب کے شروع میں حاصل ہوا تھا۔

خطی مساوات اِس امر میں استثنائی ہے کہ اِس کا کامل تکملہ (۲)، عام تکملہ کی ایک مخصوص صورت ہے۔ دوسری خصوصیت یہ ہے کہ ممیز، جو یہاں وہ منحنی ہیں جو ذیلی مساواتوں سے تعبیر ہوتے ہیں تعداد میں تہرے لامتناہی ہونے کی بجائے صرف دوہرے لامتناہی ہیں۔ صرف ایک ممیز ایک دیے ہوئے نقطہ میں سے (عام طور پر) گذرتا ہے حالانکہ غیر خطی صورت میں جس کی تمثیل گذشتہ دفعہ میں دی گئی ہے ایک معلومہ نقطہ میں سے ممیزوں کی لامتناہی تعداد گذر سکتی ہے اور اِن سے ایک سطح بن سکتی ہے۔

## حل طلب مثالیں

(۱) وہ سطح معلوم کرو جو

ی = ع لا + ق ما + ع$^{2}$ + ع ق + ق$^{2}$

کے اُن ممیزوں سے تکوین پاتی ہے جو محور لا کے متوازی ہیں۔ اس امر کی تصدیق کرو کہ وہ حقیقت میں تفرقی مساوات کو پورا کرتی ہے اور اُس سطح کو مس کرتی ہے جو نادر تکملہ سے تعبیر ہوتی ہے۔

(۲) ثابت کرو کہ ی^۲ = ۴ لا ما، مساوات

ی = ع لا + ق ما + لوک ع ق

کا ایک تکملہ ہے جو اُن مستویوں کے لفافہ کو تعبیر کرتا ہے جو کامل تکملہ میں شامل ہیں اور مبداء میں سے گذرتے ہیں۔

(۳) ثابت کرو کہ ق = ۳ ع^۲ کے وہ ممیز جو نقطہ (۰، ۰، -۱) میں سے گذرتے ہیں مخروط (لا + ۱)^۲ + ۱۲ ما ی = ۰ کی تکوین کرتے ہیں۔

(۴) مساوات  ی = ع لا + ق ما + ع/ق

کے تکملہ (ما + ۱)^۲ + ۴ لا ی = ۰ کی نوعیت کیا ہے؟

(۵) ثابت کرو کہ مساواتوں

ی = (لا + ما)^۲ + ا لا + ب ما

ی = (لا + ما)^۲ + (م لا^۲ + ن ما^۲)/(لا + ا)

میں سے کسی ایک کو ایک خاص تفرقی مساوات کے کامل تکملہ کے طور پر لیا جا سکتا ہے اور اس سے دوسری مساوات کو عام تکملہ کی ایک مخصوص صورت کے طور پر ماخوذ کیا جا سکتا ہے۔ [لندن]

(۶) ثابت کرو کہ تفرقی مساوات ع^۲ = ۴ ی قو^(ق ما/ی) کا ایک کامل تکملہ

ی = (لا + ا)^۲ قو^(ب ما)

ہے۔ (۱۶۰)

ثابت کرو کہ ما^۲ ی = ۴ (لا ما/(۲-۱))^(۲-ما) اسی مساوات کے عام تکملہ کا

حصہ ہے، اِس کو اوپر دئے ہوئے کامل تکملہ سے اخذ کرو۔ [لندن]

**نوٹ:** جزئی تفرقی مساواتوں پر اُن طریقوں کے مشابہ طریقے استعمال کئے جا سکتے ہیں جنکا ذکر دفعہ ۶۷ کے ختم پر نوٹ میں کیا گیا ہے۔ مثلاً

$$ی^2 (ع^2 ی^2 + ق^2) = 1$$

کو لو جس میں $ع \equiv \frac{جف ی}{جف لا}$ اور $ق \equiv \frac{جف ی}{جف ما}$

حل کا معمولی طریقہ یہ ہے کہ ی کو لا + ا ما (= و فرض کرو) کا ایک تفاعل فرض کیا جائے۔ اِس سے حاصل ہوگا

$$ی^2 \left(\frac{فر ی}{فر و}\right)^2 (ی^2 + ا^2) = 1$$

اب متغیروں کو جدا کرنے سے $و + ب = \pm \frac{1}{3} (ی^2 + ا^2)^{\frac{3}{2}}$ حاصل ہوتا ہے جس سے کامل ابتدائی $(ی^2 + ا^2)^3 = 9 (لا + ا ما + ب)^2$ ملتا ہے۔ وہ طریقہ اختیار کرو جو دفعہ ۸۱ کے ختم پر نوٹ میں درج کیا گیا ہے۔ ب کی بجائے $\frac{1}{3} ا^3 - ا ک$ رکھو، $3 ا^2$ سے تقسیم کرو اور پھر ا کو لا متناہی بناؤ تو $ی^2 = 2 (ما - ک)$ حاصل ہوگا جو تفرقی مساوات کو یقیناً پورا کرتا ہے۔ ممکن ہے یہ فرض کر لیا جائے کہ یہ عام تکملہ کی ایک مخصوص صورت ہے جو اکہرے لا متناہی ذیلی قبیل[1]

$$(ی^2 + ا^2)^3 = 9 (لا + ا ما + \frac{1}{3} ا^3 - ا ک)^2$$

کے لفاف کو تعبیر کرتی ہے۔ لیکن اِس سطح پر کے کسی نقطہ کے عماد کی سمتی جیوب التمام میں نسبت

$$18 (لا + ا ما + \frac{1}{3} ا^3 - ا ک) : 18 ا (لا + ا ما + \frac{1}{3} ا^3 - ا ک) :$$

ہے اور $ی^2 = 2 (ما - ک)$ پر کے کسی نقطہ کے عماد کی سمتی جیوب التمام میں نسبت $- 6 ی (ی^2 + ا^2)^2$

[1] Sub-family

ہے۔ نتیجتاً [illegible] یہ [illegible] جبکہ ن ک کی کسی قیمت کے لیے ایک ہی
[illegible] سوا سوائے قیمت ∞ کے ۔ اس لیے ی$^{2}$ = ۲ (ما − ک)
[illegible] کو تعبیر نہیں کرتا ۔ اس کو بقیہ تکملہ[1] کہہ سکتے ہیں ۔

طالب علم کو یہ گمان ہو سکتا ہے کہ کامل تکملہ کے اخذ کرنے میں منطقی نقص حسب سابق متغیروں کو جدا کرنے میں موجود ہے ۔ لیکن حقیقت میں ہم نے استدلال کے ایک مختلف حصہ میں ایک غلط مفروضہ اختیار کیا ہے یعنے وہاں جہاں ہم نے یہ مان لیا کہ ا$^{1}$لا + ا ما ایک تفاعل ہے ۔ یہ مفروضہ جائز نہیں اگر ا$^{1}$ صرف ما کا ایک تفاعل ہو اور یہ وہی مستثنیٰ صورت ہے جس سے بقیہ تکملہ حاصل ہوتا ہے ۔ اسی طرح شکل

فا (لا ، ع ، ق) = ۰

کی کسی جزئی تفرقی مساوات پر بحث کی جا سکتی ہے ۔

## بارہویں باب پر متفرق مثالیں

(۱) ی = ع لا + ق ما − ع$^{2}$ ق  (۲) ۰ = ع لا + ق ما − (ع لا + ی)$^{2}$ ق

(۳) ی (ی$^{2}$ + لا ما) (ع لا − ق ما) = لا$^{4}$  (۴) ع$^{\frac{1}{2}}$ − ق$^{\frac{1}{2}}$ = ۳ لا − ۲ ما

(۵) ع$_{1}^{2}$ + ۲ لا$_{2}$ ع$_{2}$ + لا$_{3}^{2}$ ع$_{3}$ = ۰  (۶) لا$_{3}$ ع$_{1}$ + لا$_{2}$ ع$_{2}$ + لا$_{1}$ ع$_{3}$ = ۰

(۷) ع$^{3}$ + ق$^{3}$ − ۳ ع ق ی = ۰  (۸) ع$_{1}^{2}$ + ع$_{2}^{2}$ + ع$_{3}^{2}$ = ۴ ی

(۹) ع$_{1}$ + ع$_{2}$ + ع$_{3}$ = ۴ ی  (۱۰) ع$^{2}$ + ۲ ع + ۲ ق + ۴ = ۰

(۱۱) ی$^{2}$ ع$^{2}$ ما + ۲ ی ع لا ما + ۲ ی ق لا$^{2}$ + ۴ لا$^{2}$ ما = ۰

(۱۲) ی ع ما$^{2}$ = لا (ما$^{2}$ + ی$^{2}$ ق$^{2}$)  (۱۳) ع$^{2}$ ی$^{2}$ + ق$^{2}$ = ع$^{2}$ ق

[1] Residual Integral

(۱۴) (ی − ع لا − ق ما) لا$^{۳}$ ما$^{۲}$ = ق$^{۲}$ ی لا$^{۳}$ − ۳ ع$^{۳}$ ی$^{۲}$ ما$^{۲}$

(۱۵) ع + ق = ع ق، کے عام تکملہ کی وہ مخصوص صورت معلوم کرو جو اُن مستویوں کے لفاف کو تعبیر کرے جو کامل تکملہ میں شامل ہیں اور نقطہ (۱، ۱، ۱) میں سے گذرتے ہیں۔

(۱۶) ثابت کرو کہ اگر مساوات ف فرلا + ق فرما + س فری = ۰ تکمل پذیر ہو تو اس سے سطحوں کا ایک ایسا قبیل تعبیر ہوگا جو

ف ع + ق ق، = س

سے تعبیر شدہ قبیل کے علی القوائم ہوگا۔

اس سے وہ قبیل معلوم کرو جو

فر{ ی (لا + ما)$^{۲}$، لا$^{۲}$ − ما$^{۲}$ } = ۰

کے علی القوائم ہے۔

(۱۷) وہ سطحیں معلوم کرو جن کے مماس مستوی سب کے سب مبدا میں سے گذریں۔

(۱۸) وہ سطحیں معلوم کرو جن کے عماد سب کے سب دائرہ

لا$^{۲}$ + ما$^{۲}$ = ۱، ی = ۰

کو قطع کریں۔

(۱۹) وہ سطحیں معلوم کرو جن کے مماس مستوی محددوں کے مستویوں کے ساتھ مل کر مستقل حجم کا ایک ذو اربعۃ السطوح بنائیں۔

(۲۰) ثابت کرو کہ ایسی کوئی غیر کشادپذیر (Non-developable) سطح نہیں کہ ہر مماس مستوی، محوروں پر ایسے مقطوعے قطع کرے جن کا جبری مجموعہ صفر ہو۔

(۲۱) ثابت کرو کہ اگر دو درجی لا$^{۲}$ + ما$^{۲}$ = ۲ ی کے لحاظ سے دو سطحیں قطبی متکافی ہوں اور اگر (لا، ما، ی)، (لا، ما، ے) دو ایسے نظیری نقطے (ایک ایک سطح میں، دوسرا دوسری سطح میں) ہوں کہ ان میں سے کسی ایک نقطہ پر کا مماس مستوی، دوسرے کا قطبی مستوی ہو تو

لا = ع، ما = ق، ے = ع لا + ق ما − ی، لا = ف، ما = ق

اِس سے ثابت کرو کہ اگر ایک سطح' مساوات

ف (لا، ما، ی، ع، ق) = ۰

کو پورا کرے تو دوسری سطح' مساوات

ف (ف، ق، ف لا + ق ما - ے، لا، ما) = ۰

کو پورا کرے گی۔

[ہم کہتے ہیں کہ یہ مساواتیں ایک دوسرے سے ثنویت کے اصول سے اخذ پذیر ہیں]

۱۶۱

(۲۲) ثابت کرو کہ وہ مساوات جو

ی = ع لا + ق ما + ع ق

سے ثنویت کے اصول سے ماخوذ ہوتی ہے

ے + لا ما = ۰

ہے جس سے

لا = ف = جف ے / جف لا = - ما، ما = ق = - لا،

اور ی = ف لا + ق ما - ے = - لا ما

حاصل ہوتے ہیں۔

اِس سے (پہلی مساوات کے ایک تکملہ کے طور پر) ی = - لا ما کو اخذ کرو۔

(۲۳) ایک جزئی تفرقی مساوات کے ذریعہ مساوات

لا + ما + ی = ف (لا² + ما² + ی²)

سے اختیاری تفاعل ساقط کرو۔

[لا اور ما کے لحاظ سے جزئی طور پر تفرق کرنے سے

۱ + ع = {فَ (لا² + ما² + ی²)} (۲ لا + ۲ ی ع)،

اور ۱ + ق = {فَ (لا² + ما² + ی²)} (۲ ما + ۲ ی ق)،

اِس لیے (۱ + ع) (ما + ی ق) = (۱ + ق) (لا + ی ع)

یا (ما - ی) ع + (ی - لا) ق = لا - ما ]

(۲۴) مثال (۲۳) کا طریقہ صفحہ ۲۹۳ کی مثالوں کے حلوں کی تصدیق کرنے میں استعمال کرو۔

(۲۵) حسب ذیل جزئی تفرقی مساواتوں کے خاص تکملے معلوم کرو جو دئے ہوئے منحنیوں میں سے گذرنے والی سطحوں کو تعبیر کریں :-

(ا) ع + ق = ۱، لا = ۰، ما$^{۲}$ = ی

(۲) لا ع + ما ق = ی، لا + ما = ۱، ما ی = ۱

(۳) (ما - ی) ع + (ی - لا) ق = لا - ما، ی = ۰، ما = ۲ لا

(۴) لا (ما - ی) ع + ما (ی - لا) ق = ی (لا - ما)، لا = ما = ی

(۵) ما ع - ۲ لا ما ق = ۲ لا ی، لا = ت، ما = ت$^{۲}$، ی = ت$^{۳}$

(۶) (ما - ی) {۲ لا ما ع + (لا$^{۲}$ - ما$^{۲}$) ق} + ی (لا$^{۲}$ - ما$^{۲}$) = ۰،

لا = ت$^{۲}$، ما = ۰، ی = ت$^{۳}$

[ لا، ما، ی کو منحنی کی دو مساواتوں اور ذیلی مساواتوں کے دو غیر تابع تکملوں ع(لا، ما، ی) = ا، و(لا، ما، ی) = ب سے ساقط کرو۔ اس سے ا اور ب میں ایک رشتہ ملے گا۔ ا کی بجائے ع(لا، ما، ی) اور ب کی بجائے و(لا، ما، ی) رکھو تو مطلوبہ تکملہ حاصل ہوگا۔

مثلاً (ا) کے لیے ع(لا، ما، ی) ≡ لا - ی = ا، و(لا، ما، ی) ≡ ما - ی = ب (دیکھو صفحہ ۲۹۲)

ان سے اور منحنی کی مساواتوں لا = ۰، ما$^{۲}$ = ی سے ا = - ما$^{۲}$ اور ب = ما - ما$^{۲}$ اور اس لیے (ب - ا)$^{۲}$ = - ا

ا کی بجائے لا - ی اور ب کی بجائے ما - ی رکھو تو تکملہ

(ما - لا)$^{۲}$ = ی - لا

حاصل ہوگا۔

اسی طرح (۲َ)، (۳َ)، اور (۴َ) کے لیے عمل کرو۔ (۵َ) اور (۶َ) میں ہم لا، ما، ی، ت کو پانچ مساواتوں سے ساقط کرتے ہیں۔]

**جواب :-**

(۲َ) ما ی = (لا + ما)$^{2}$

(۳َ) ۵ (لا + ما + ی)$^{2}$ = ۹ (لا$^{2}$ + ما$^{2}$ + ی$^{2}$)

(۴َ) (لا + ما + ی)$^{3}$ = ۲۷ لا ما ی

(۵َ) (لا$^{2}$ + ما)$^{5}$ = ۳۲ ما$^{2}$ ی$^{2}$

(۶َ) لا$^{3}$ − ۳ لا ما$^{2}$ = ی$^{2}$ − ۲ ما ی

(۱۶۲)

# تیرہواں باب

## پہلے رتبہ کی جزئی تفرقی مساواتیں۔ عام طریقے

**۱۳۷** — اب ہم چارپی اور جیکوبی کے طریقوں کی وضاحت کریں گے۔
چارپی کے طریقہ میں دو متبوع متغیروں والی مساواتوں سے بحث کی جاتی ہے اور جیکوبی کا طریقہ متعدد متبوع متغیروں والی مساواتوں کے لیے ہے جیکوبی کے طریقہ سے فطرتاً ہم ہمزاد جزئی تفرقی مساواتوں کی بحث پر پہنچتے ہیں۔
اس باب کے طریقے پچھلے باب کے طریقوں کی بہ نسبت بہت زیادہ پیچیدہ اور دقیق ہیں۔ اس لیے ہم ان کو ان کی سادہ ترین شکل میں پیش کریں گے اور متعدد امور کا صرف سرسری ذکر کریں گے اگرچہ کہ ان پر بہت کچھ لکھا جاسکتا ہے۔

**۱۳۸** — **چارپی کا طریقہ**[۱] — دفعہ ۱۳۱ میں ہم نے مساوات

[۱] یہ طریقہ کچھ لگرانج سے منسوب ہے لیکن چارپی نے اس کی تکمیل کی۔ چارپی کا مقالہ پیارس اکاڈیمی آف سائنس کو ۱۷۸۴ء میں پیش کیا گیا لیکن اس کے کچھ عرصہ کے بعد ہی مصنف کا انتقال ہوا اور یہ مقالہ نہ چھپا۔

$$ع - ۳ لا^۳ = ق^۲ - ما \text{، } \dots\dots\dots (۱)$$

کو ایک زائد تفرقی مساوات

$$ع - ۲ لا^۲ = ا \text{، } \dots\dots\dots (۲)$$

استعمال کرکے حل کیا ع اور ق کو لا اور ما کی رقوم میں حل کرکے ان کی قیمتوں کو

$$فری = ع \, فرلا + ق \, فرما \text{، } \dots\dots\dots (۳)$$

میں درج کیا جس سے یہ مساوات تکمل پذیر ہو جاتی ہے اگر اس کو تین متغیروں لا، ما، ی میں ایک معمولی تفرقی مساوات سمجھا جائے۔

اب ہم کچھ اس کے مشابہ طریقہ پہلے رتبہ اور دو متنوع متغیروں والی عام جزئی تفرقی مساوات

$$فا (لا، ما، ی، ع، ق) = ۰ \text{، } \dots\dots\dots (۴)$$

پر استعمال کریں گے۔

ہمیں ایک دوسری مساوات

$$ف (لا، ما، ی، ع، ق) = ۰ \text{، } \dots\dots\dots (۵)$$

ایسی معلوم کرنی چاہئے کہ ع اور ق کو (۴) اور (۵) سے لا، ما، ی کے تفاعلوں کے طور پر معلوم کیا جا سکے جو (۳) کو تکمل پذیر بنا دیں۔ (۱۶۳)

وہ ضروری اور کافی شرط کہ (۳) تکمل پذیر ہو یہ ہے کہ

$$ف \left( \frac{جف\, ق}{جف\, ی} - \frac{جف\, ر}{جف\, ما} \right) + ق \left( \frac{جف\, ر}{جف\, لا} - \frac{جف\, ف}{جف\, ی} \right)$$

$$+ ر \left( \frac{جف\, ف}{جف\, ما} - \frac{جف\, ق}{جف\, لا} \right) = ۰ \quad (\text{متماثلاً})$$

جہاں $ف = ع \text{، } ق = ق \text{، } ر = -۱ \text{،}$

یعنی

$$ع \frac{جف\, ق}{جف\, ی} - ق \frac{جف\, ع}{جف\, ی} - \frac{جف\, ع}{جف\, ما} + \frac{جف\, ق}{جف\, لا} = ۰ \text{، } \dots (۶)$$

ما اور ی کو مستقل رکھ کر لیکن ع اور ق کو لا، ما، ی کے وہ تفاعل

سمجھ کر جو (۴) اور (۵) کو حل کرنے سے حاصل ہوئے ہیں (۴) کو لا کے لحاظ سے جزئی طور پر تفرق کرو تو

$$\frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}}+\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ع}}\,\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}+\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ق}}\,\frac{\text{جف ق}}{\text{جف لا}}=0 \text{ ،} \quad \ldots(7)$$

اسی طرح

$$\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}}+\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ع}}\,\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}+\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ق}}\,\frac{\text{جف ق}}{\text{جف لا}}=0 \text{ ،} \quad \ldots(8)$$

(۷) اور (۸) سے

$$\text{ج}\,\frac{\text{جف ق}}{\text{جف لا}}=\frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ع}}-\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ع}}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}} \text{ ،} \quad \ldots(9)$$

جہاں ج، $\dfrac{\text{جف فا}}{\text{جف ع}}\,\dfrac{\text{جف ف}}{\text{جف ق}}-\dfrac{\text{جف فا}}{\text{جف ق}}\,\dfrac{\text{جف ف}}{\text{جف ع}}$ کو تعبیر کرتا ہے۔

اسی طرح

$$\text{ج}\,\frac{\text{جف ق}}{\text{جف ی}}=\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ی}}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ع}}-\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ع}}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ی}} \text{ ،} \quad \ldots(10)$$

$$\text{ج}\,\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}=-\frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ق}}+\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ق}}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}} \text{ ،} \quad \ldots(11)$$

$$\text{ج}\,\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ی}}=-\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ی}}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ق}}+\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ق}}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ی}} \text{ ،} \quad \ldots(12)$$

(۶) کو ج سے ضرب دو اور اُن میں اندراج کرو تو

$$\text{ع}\left(\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ی}}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ع}}-\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ع}}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ی}}\right)-\text{ق}\left(\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ی}}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ق}}-\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ق}}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ی}}\right)$$

$$+\frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ع}}-\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ع}}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}}+\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ما}}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ق}}-\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ق}}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}}=0$$

---

[1] ج متماثلاً معدوم نہیں ہو سکتا کیونکہ اگر ایسا ہو تو اس سے یہ لازم آئے گا کہ فا اور ف جن کو ع اور ق کے تفاعل سمجھا گیا ہے غیر تابع نہیں تھے ۔ یہ ہمارے اس مفروضہ کے خلاف ہے کہ مساواتوں (۴) اور (۵) کو ع اور ق کے لیے حل کیا جا سکتا ہے ۔

یعنی

$$-\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ع}}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}}-\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ق}}\,\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ما}}-\left(\text{ع}\,\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ع}}+\text{ق}\,\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ق}}\right)\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ی}}$$

$$+\left(\frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}}+\text{ع}\,\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ی}}\right)\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ع}}+\left(\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ما}}\right.$$

$$\left.+\text{ق}\,\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ی}}\right)\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ق}}=0 \quad \ldots\ldots (۱۳)$$

(۱۲۴) یہ اُس شکل کی ایک خطی مساوات ہے جس پر دفعہ ۱۲۶ میں غور کیا گیا تھا، اِس میں لا، ما، ی، ع، ق متبوع متغیر ہیں اور ف تابع متغیر۔ متناظر ذیلی مساواتیں

$$\frac{\text{فرلا}}{-\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ع}}}=\frac{\text{فرما}}{-\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ق}}}=\frac{\text{فری}}{-\text{ع}\,\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ع}}-\text{ق}\,\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ق}}}=\frac{\text{فرع}}{\frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}}+\text{ع}\,\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ی}}}$$

$$=\frac{\text{فرق}}{\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ما}}+\text{ق}\,\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ی}}}=\frac{\text{فرف}}{0}\,،\quad \ldots\ldots (۱۴)$$

ہیں۔

اگر اِن مساواتوں کا کوئی تکملہ معلوم ہوسکے جس میں ع یا ق یا دونوں شامل ہوں تو اِس تکملہ کو زائد تفرقی مساوات (۵) کے طور پر لیا جا سکتا ہے اور پھر اِس مساوات اور مساوات (۴) سے ع اور ق حاصل ہوتے ہیں جن سے مساوات (۳) تکمل پذیر ہو جاتی ہے۔ اِس سے (۴) کا کامل تکملہ حاصل ہوگا جس سے عام اور نادر تکملے معمولی طریقہ پر اخذ کیے جا سکتے ہیں۔

**۱۲۹**۔ اِس طریقہ کا استعمال حسب ذیل مثال سے واضح ہوگا:

$$\text{۲ لا ی} - \text{ع لا}^{2} - \text{۲ ق لا ما} + \text{ع ق} = 0\,، \quad \ldots\ldots (۱)$$

اِس مساوات کی دائیں جانب کے جملہ کو فا لیکر پچھلے دفعہ کی ہمزاد مساواتوں (۱۴) میں اندراج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^{2}-\text{ق}}=\frac{\text{فرما}}{۲\,\text{لا ما}-\text{ع}}=\frac{\text{فری}}{\text{ع لا}^{2}+۲\,\text{لا ما ق}-۲\,\text{ع ق}}=\frac{\text{فرع}}{۲\,\text{ی}-۲\,\text{ق ما}}$$

$$=\frac{\text{فرق}}{۰}=\frac{\text{فرف}}{}$$

جس کا ایک تکملہ $\text{ق}=\text{ا}،$ . . . . . . . . . . (۲) ہے۔

(۱) اور (۲) سے $$\text{ع}=\frac{۲\,\text{لا}(\text{ی}-\text{ا ما})}{\text{لا}^{2}-\text{ا}}$$

اس لیے $$\text{فری}=\text{ع فرلا}+\text{ق فرما}=\frac{۲\,\text{لا}(\text{ی}-\text{ا ما})\,\text{فرلا}}{\text{لا}^{2}-\text{ا}}+\text{ا فرما}$$

یعنی $$\frac{\text{فری}-\text{ا فرما}}{\text{ی}-\text{ا ما}}=\frac{۲\,\text{لا فرلا}}{\text{لا}^{2}-\text{ا}}$$

یعنی $$\text{ی}=\text{ا ما}+\text{ب}(\text{لا}^{2}-\text{ا})$$

یہ کامل تکملہ ہے۔ اِس سے نادر حل

$$\text{ی}=\text{لا}^{2}\,\text{ما}$$

اخذ کرنا آسان ہے۔

کامل تکملہ کی شکل سے ظاہر ہے کہ (۱) کو استحالہ

$$\text{ف}=\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}^{2}}=\frac{۱}{\text{لا}}\,\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}}$$

سے شکل $$\text{ی}=\text{ف لا}^{2}+\text{ق ما}-\text{ف ق}$$

میں تحویل کیا جا سکتا ہے جو ایک معیاری شکل کی ایک مخصوص صورت ہے۔ مساواتیں جو چارپی کے طریقہ سے حل ہو سکتی ہیں اکثر کسی ایسے ہی استحالہ سے زیادہ آسانی کے ساتھ حل کی جا سکتی ہیں۔

## حل طلب مثالیں

حسب ذیل مثالوں میں کامل تکملہ معلوم کرنے میں چارپی کا طریقہ استعمال کرو:

(۱) ۲ ی + ع^۲ + ق ما + ۲ ما^۲ = ۰ ، (۲) ما ی ع^۲ = ق ،

(۳) ع لا ما + ع ق + ق ما = ما ی ، (۴) ۲ لا (ی^۲ ق + ۱) = ع ی ،

(۵) ق = ۳ ع^۳ (مقابلہ کرو دفعہ ۱۲۹)،

(۶) ی^۲ (ع^۲ ی^۲ + ق^۲) = ۱ (مقابلہ کرو دفعہ ۱۳۰)

(۷) ع - ۳ لا^۲ = ق^۲ - ما (مقابلہ کرو دفعہ ۱۳۱)،

(۸) ی = ع لا + ق ما + ع^۲ + ق^۲ ، (مقابلہ کرو دفعہ ۱۳۲)

(۹) مثال ۲ کو ا^۲ = ما ، ی^۲ = [illegible] سے رکھ کر حل کرو۔

(۱۰) مثال ۴ کو متغیروں کے کسی موزوں استحالہ سے حل کرو۔

## ۱۴۰ — تین یا تین سے زیادہ متبوع متغیر۔ جیکوبی* کا طریقہ

مساوات

فا (لا۱، لا۲، لا۳، ع۱، ع۲، ع۳) = ۰ ، ............ (۱)

پر غور کرو جس میں تابع متغیر صریحی طور پر واقع نہیں ہے لیکن اس کے جزئی تفرقی سر ع۱، ع۲، ع۳ بلحاظ تین متبوع متغیروں لا۱، لا۲، لا۳ کے شریک ہیں۔ جیکوبی کے طریقہ میں بنیادی تخیل چارپی کے طریقہ کے تخیل کے بہت مشابہ ہے۔

ہم ایسی دو زائد مساواتیں

فا۱ (لا۱، لا۲، لا۳، ع۱، ع۲، ع۳) = ا۱ ، ...... (۲)

فا۲ (لا۱، لا۲، لا۳، ع۱، ع۲، ع۳) = ا۲ ، ...... (۳)

(جہاں ا۱ اور ا۲ اختیاری مستقل ہیں) معلوم کرنے کی کوشش کرتے ہیں کہ ع۱، ع۲، ع۳ مساواتوں (۱)، (۲)، (۳) سے لا۱، لا۲، لا۳ کے

---

* کارل گستاف جیکب جیکوبی (پوٹسڈام ۱۸۰۴ء تا ۱۸۵۱ء) کو ناقصی تفاعلوں کے نظریہ کے موجدوں میں شمار کیا جا سکتا ہے۔ "جیکوبی" یا تفاعلی مقطع نے اس کام کی بدولت امتیاز حاصل کیا ہے جو اس نے مقطعوں کو عام طور پر رائج کرنے میں کیا تھا۔

تفاعلوں کے طور پر حاصل ہو سکیں اور یہ تفاعل

$$\text{فری} = \text{ع}_{۱}\,\text{فرلا}_{۱} + \text{ع}_{۲}\,\text{فرلا}_{۲} + \text{ع}_{۳}\,\text{فرلا}_{۳} \text{،} \quad \ldots\ldots (۴)$$

کو تکمیل پذیر بنا دیں جس کے لیے یہ شرطیں ہیں کہ

$$\frac{\text{جف ع}_{۲}}{\text{جف لا}_{۱}} = \frac{\text{جف}^{۲}\,\text{ی}}{\text{جف لا}_{۱}\,\text{جف لا}_{۲}} = \frac{\text{جف ع}_{۱}}{\text{جف لا}_{۲}} \text{،} \quad \frac{\text{جف ع}_{۳}}{\text{جف لا}_{۱}} = \frac{\text{جف ع}_{۱}}{\text{جف لا}_{۳}}$$

$$\frac{\text{جف ع}_{۳}}{\text{جف لا}_{۲}} = \frac{\text{جف ع}_{۲}}{\text{جف لا}_{۳}} \quad \ldots\ldots (۵)$$

اب لا۲ اور لا۳ کو مستقل رکھ کر لیکن ع۱، ع۲، ع۳ کو لا۱، لا۲، لا۳ کے وہ تفاعل سمجھ کر جو (۱)، (۲)، (۳) کو حل کرنے سے حاصل ہوئے ہیں (۱) کو لا۱ کے لحاظ سے جزئی طور پر تفرق کرو تو

$$\frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}_{۱}} + \frac{\text{جف فا}}{\text{جف ع}_{۱}}\,\frac{\text{جف ع}_{۱}}{\text{جف لا}_{۱}} + \frac{\text{جف فا}}{\text{جف ع}_{۲}}\,\frac{\text{جف ع}_{۲}}{\text{جف لا}_{۱}} + \frac{\text{جف فا}}{\text{جف ع}_{۳}}\,\frac{\text{جف ع}_{۳}}{\text{جف لا}_{۱}} = ۰ \text{،} \quad \ldots\ldots (۶)$$

اسی طرح

$$\frac{\text{جف فا}_{۱}}{\text{جف لا}_{۱}} + \frac{\text{جف فا}_{۱}}{\text{جف ع}_{۱}}\,\frac{\text{جف ع}_{۱}}{\text{جف لا}_{۱}} + \frac{\text{جف فا}_{۱}}{\text{جف ع}_{۲}}\,\frac{\text{جف ع}_{۲}}{\text{جف لا}_{۱}} + \frac{\text{جف فا}_{۱}}{\text{جف ع}_{۳}}\,\frac{\text{جف ع}_{۳}}{\text{جف لا}_{۱}} = ۰ \text{،} \quad \ldots\ldots (۷)$$

(۱۶۶)

(۶) اور (۷) سے

$$\frac{\text{جف (فا، فا}_{۱}\text{)}}{\text{جف (لا}_{۱}\text{، ع}_{۱}\text{)}} + \frac{\text{جف (فا، فا}_{۱}\text{)}}{\text{جف (ع}_{۲}\text{، ع}_{۱}\text{)}}\,\frac{\text{جف ع}_{۲}}{\text{جف لا}_{۱}} + \frac{\text{جف (فا، فا}_{۱}\text{)}}{\text{جف (ع}_{۳}\text{، ع}_{۱}\text{)}}\,\frac{\text{جف ع}_{۳}}{\text{جف لا}_{۱}} = ۰ \quad \ldots (۸)$$

جہاں $\frac{\text{جف}(\text{فا}،\text{فا}_{۱})}{\text{جف}(\text{لا}_{۱}،\text{ع}_{۱})}$ سے "جیکوبی" $\frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}_{۱}}\frac{\text{جف فا}_{۱}}{\text{جف ع}_{۱}} - \frac{\text{جف فا}}{\text{جف ع}_{۱}}\frac{\text{جف فا}_{۱}}{\text{جف لا}_{۱}}$ کو تعبیر کیا گیا ہے۔

اسی طرح

$$\frac{\text{جف}(\text{فا}،\text{فا}_{۱})}{\text{جف}(\text{لا}_{۲}،\text{ع}_{۲})} + \frac{\text{جف}(\text{فا}،\text{فا}_{۱})}{\text{جف}(\text{ع}_{۱}،\text{ع}_{۲})}\frac{\text{جف ع}_{۱}}{\text{جف لا}_{۲}} + \frac{\text{جف}(\text{فا}،\text{فا}_{۱})}{\text{جف}(\text{ع}_{۳}،\text{ع}_{۲})}\frac{\text{جف ع}_{۳}}{\text{جف لا}_{۲}} = ۰ \quad \ldots\ldots (۹)$$

اور

$$\frac{\text{جف}(\text{فا}،\text{فا}_{۱})}{\text{جف}(\text{لا}_{۳}،\text{ع}_{۳})} + \frac{\text{جف}(\text{فا}،\text{فا}_{۱})}{\text{جف}(\text{ع}_{۱}،\text{ع}_{۳})}\frac{\text{جف ع}_{۱}}{\text{جف لا}_{۳}} + \frac{\text{جف}(\text{فا}،\text{فا}_{۱})}{\text{جف}(\text{ع}_{۲}،\text{ع}_{۳})}\frac{\text{جف ع}_{۲}}{\text{جف لا}_{۳}} = ۰ \quad \ldots\ldots (۱۰)$$

مساواتوں (۸)، (۹)، (۱۰) کو جمع کرو۔

دو رقمیں

$$\frac{\text{جف}(\text{فا}،\text{فا}_{۱})}{\text{جف}(\text{ع}_{۲}،\text{ع}_{۱})}\frac{\text{جف ع}_{۲}}{\text{جف لا}_{۱}} + \frac{\text{جف}(\text{فا}،\text{فا}_{۱})}{\text{جف}(\text{ع}_{۱}،\text{ع}_{۲})}\frac{\text{جف ع}_{۱}}{\text{جف لا}_{۲}}$$

$$= \frac{\text{جف}^{۲}\text{ی}}{\text{جف لا}_{۱}\text{جف لا}_{۲}}\left\{\frac{\text{جف}(\text{فا}،\text{فا}_{۱})}{\text{جف}(\text{ع}_{۲}،\text{ع}_{۱})} + \frac{\text{جف}(\text{فا}،\text{فا}_{۱})}{\text{جف}(\text{ع}_{۱}،\text{ع}_{۲})}\right\} = ۰$$

ہیں۔ اسی طرح رقموں کے دو دوسرے زوج معدوم ہوتے ہیں اور بالآخر حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{جف}(\text{فا}،\text{فا}_{۱})}{\text{جف}(\text{لا}_{۱}،\text{ع}_{۱})} + \frac{\text{جف}(\text{فا}،\text{فا}_{۱})}{\text{جف}(\text{لا}_{۲}،\text{ع}_{۲})} + \frac{\text{جف}(\text{فا}،\text{فا}_{۱})}{\text{جف}(\text{لا}_{۳}،\text{ع}_{۳})} = ۰ \quad \ldots\ldots (۱۱)$$

یعنی

$$\frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}_1}\frac{\text{جف فا}_1}{\text{جف ع}_1}-\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ع}_1}\frac{\text{جف فا}_1}{\text{جف لا}_1}+\frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}_2}\frac{\text{جف فا}_1}{\text{جف ع}_2}$$

$$-\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ع}_2}\frac{\text{جف فا}_1}{\text{جف لا}_2}+\frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}_3}\frac{\text{جف فا}_1}{\text{جف ع}_3}-\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ع}_3}\frac{\text{جف فا}_1}{\text{جف لا}_3}=0\text{،} \quad \ldots\ldots (12)$$

اِس مساوات کو بالعموم $(\text{فا، فا}_1)=0$ لکھا جاتا ہے۔

اسی طرح $(\text{فا، فا}_2)=0$

اور $(\text{فا}_1\text{، فا}_2)=0$

لیکن یہ دفعہ ۱۲۶ کی شکل کی خطی مساواتیں ہیں۔ پس حسب ذیل قاعدہ حاصل ہوتا ہے:

ذیلی مساواتوں

$$\frac{\text{فرلا}_1}{\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ع}_1}}=\frac{\text{فرع}_1}{-\frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}_1}}=\frac{\text{فرلا}_2}{\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ع}_2}}=\frac{\text{فرع}_2}{-\frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}_2}}=\frac{\text{فرلا}_3}{\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ع}_3}}=\frac{\text{فرع}_3}{-\frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}_3}}$$

کے دو غیر تابع تکملے $\text{فا}_1=\text{ا}_1$ اور $\text{فا}_2=\text{ا}_2$ معلوم کرنے کی کوشش کرو۔

اگر ان سے شرط

$$(\text{فا}_1\text{، فا}_2)\equiv\sum\left(\frac{\text{جف فا}_1}{\text{جف لا}_\text{ر}}\frac{\text{جف فا}_2}{\text{جف ع}_\text{ر}}-\frac{\text{جف فا}_1}{\text{جف ع}_\text{ر}}\frac{\text{جف فا}_2}{\text{جف لا}_\text{ر}}\right)=0$$

پوری ہو اور اگر

$$\text{فا}=\text{فا}_1-\text{ا}_1=\text{فا}_2-\text{ا}_2=0$$

سے $\text{ع}_1$، $\text{ع}_2$ .... کو $\text{لا}_1$، $\text{لا}_2$، $\text{لا}_3$ ... کے تفاعلوں کے طور پر معلوم کیا جا سکے تو اِن تفاعلوں کو مساوات[1]

$$\text{فری} = \text{ع}_1\,\text{فرلا}_1 + \text{ع}_2\,\text{فرلا}_2 + \text{ع}_3\,\text{فرلا}_3 + \ldots\ldots$$

میں درج کرو اور تکمل کرو۔

## ۱۴۱ - مثالیں جیکوبی کے طریقہ پر۔ (۱۶۷)

مثال (۱) $2\,\text{ع}_1\text{لا}_1\text{لا}_3 + 3\,\text{ع}_2\text{لا}_3^2 + \text{ع}_2^2\,\text{ع}_3 = 0$، ...... (۱)

ذیلی مساواتیں

$$\frac{\text{فرلا}_1}{-2\text{لا}_1\text{لا}_3} = \frac{\text{فرع}_1}{2\text{ع}_1\text{لا}_3} = \frac{\text{فرلا}_2}{-3\text{لا}_3^2 - 2\text{ع}_2\text{ع}_3} = \frac{\text{فرع}_2}{0} = \frac{\text{فرلا}_3}{-\text{ع}_2^2}$$

$$= \frac{\text{فرع}_3}{2\text{ع}_1\text{لا}_1 + 6\text{ع}_2\text{لا}_3}$$

میں جن کے تکملے $\text{فا}_1 \equiv \text{ع}_1\text{لا}_1 = \text{ا}_1$، .................. (۲)

اور $\text{فا}_2 \equiv \text{ع}_2 = \text{ا}_2$، .................. (۳)

ہیں۔

اب اِن قیمتوں کے ساتھ ($\text{فا}_1$، $\text{فا}_2$) صریحاً صفر ہے، اِس لیے (۲) اور (۳) کو مطلوبہ زائد مساواتوں کے طور پر لیا جا سکتا ہے۔

$$\text{ع}_1 = \text{ا}_1\text{لا}_1^{-1},\quad \text{ع}_2 = \text{ا}_2,\quad \text{ع}_3 = -\text{ا}_2^{-2}\left(2\text{ا}_1\text{لا}_3 + 3\text{ا}_2\text{لا}_3^2\right)$$

---

[1] وہ ثبوت کہ یہ مساوات ہمیشہ تکمل پذیر ہوگی ضمیمہ ج میں مرقوم ہے۔

اس لیے $\text{فری} = \text{ا}_۱ \text{لا}_۱^{-۱} \text{فرلا}_۱ + \text{ا}_۲ \text{فرلا}_۲ - \text{ا}_۳^{-۱} (۲ \text{ا}_۱ \text{لا}_۳ + ۳ \text{ا}_۲ \text{لا}_۳^۲) \text{فرلا}_۳$

یا $\text{ی} = \text{ا}_۱ \text{لوک لا}_۱ + \text{ا}_۲ \text{لا}_۲ - \text{ا}_۳^{-۱} (\text{ا}_۱ \text{لا}_۳^۲ + \text{ا}_۲ \text{لا}_۳^۳) + \text{ا}_۴$

جو کامل تکملہ ہے۔

مثال (۲) $(\text{لا}_۲ + \text{لا}_۳)(\text{ع}_۲ + \text{ع}_۳)^۲ + \text{ی ع}_۱ = ۰$ ......(۴)

یہ مساوات اُس شکل کی نہیں ہے جس پر دفعہ ۱۴۰ میں غور کیا گیا کیونکہ اس میں ی شامل ہے۔

لیکن رکھو $\text{ی} = \text{لا}_۴$، $\text{ع}_۱ = \frac{\text{جفی}}{\text{جف لا}_۱} = \frac{\text{جف لا}_۴}{\text{جف لا}_۱} = - \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}_۱} \Big/ \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}_۴}$

$= - \frac{\text{ع}_۱}{\text{ع}_۴}$ (فرض کرو)

جہاں ع = ۰، (۴) کا ایک تکملہ ہے۔

اسی طرح $\text{ع}_۲ = - \frac{\text{ع}_۲}{\text{ع}_۴}$، $\text{ع}_۳ = - \frac{\text{ع}_۳}{\text{ع}_۴}$

تو مساوات (۴) ہو جاتی ہے

$$(\text{لا}_۲ + \text{لا}_۳)(\text{ع}_۲ + \text{ع}_۳)^۲ - \text{لا}_۴ \text{ع}_۱ \text{ع}_۴ = ۰ \quad ........ (۵)$$

جو چار تبوع متغیروں میں ایک مساوات ہے جس میں تابع متغیر ع صریحی طور پر موجود نہیں ہے۔

ذیلی مساواتیں ہیں:

$$\frac{\text{فرلا}_۱}{\text{لا}_۴ \text{ع}_۴} = \frac{\text{فرع}_۱}{۰} = \frac{\text{فرلا}_۲}{-۲(\text{لا}_۲ + \text{لا}_۳)(\text{ع}_۲ + \text{ع}_۳)} = \frac{\text{فرع}_۲}{(\text{ع}_۲ + \text{ع}_۳)^۲}$$

$$= \frac{\text{فرلا}_۳}{-۲(\text{لا}_۲ + \text{لا}_۳)(\text{ع}_۲ + \text{ع}_۳)} = \frac{\text{فرع}_۳}{(\text{ع}_۲ + \text{ع}_۳)^۲} = \frac{\text{فرلا}_۴}{\text{لا}_۴ \text{ع}_۱} = \frac{\text{فرع}_۴}{-\text{ع}_۱ \text{ع}_۴}$$

جن کے تکملے

$$\text{فا}_1 \equiv \text{ع}'_1 = \text{ل}_1 \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

$$\text{فا}_2 \equiv \text{ع}'_2 - \text{ع}_3 = \text{ل}_2 \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

$$\text{فا}_3 \equiv \text{لا}_2\, \text{ع}'_3 = \text{ل}_3 \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

ہیں۔

اب یہ معلوم کرنا ہے کہ آیا (فار، فاس) = ۰ جہاں ر اور س، ۱، ۲، ۳ میں سے کوئی دو قوت نما ہیں۔ آسانی سے اِس کا درست ہونا معلوم ہو جاتا ہے۔

(۵)، (۶)، (۷)، (۸) کو حل کرنے سے

$$\text{ع}_1 = \text{ل}_1,\quad \text{ع}_3 = \text{ل}_3\,\text{لا}_3^{-1},\quad 2\text{ع}_2 = \text{ل}_2 \pm \sqrt{\{\text{ل}_1\text{ل}_3 / (\text{لا}_2 + \text{لا}_3)\}},\quad \text{ع}_3 = \text{ع}_2 - \text{ل}_2$$

اِس لیے $\quad \text{فر}\,\text{ء} = \text{ل}_1\,\text{فرلا}_1 + \text{ل}_3\,\text{لا}_3^{-1}\,\text{فرلا}_3 + \frac{1}{2}\text{ل}_2(\text{فرلا}_2 - \text{فرلا}_3)$

$$\pm \frac{1}{2}\sqrt{\{\text{ل}_1\text{ل}_3 / (\text{لا}_2 + \text{لا}_3)\}}\,(\text{فرلا}_2 - \text{فرلا}_3)$$

یعنے

$$\text{ء} = \text{ل}_1\text{لا}_1 + \text{ل}_3\,\text{لوک}\,\text{لا}_3 + \frac{1}{2}\text{ل}_2(\text{لا}_2 - \text{لا}_3) \pm \sqrt{\{\text{ل}_1\text{ل}_3(\text{لا}_2 + \text{لا}_3)\}} + \text{ل}_4$$

(۱۶۸) اِس لیے ء = ۰ سے جبکہ $\text{لا}_3$ کی بجائے ی، $\frac{\text{ل}_1}{\text{ل}_3}$ کی بجائے $\text{ا}_1$، $\frac{1}{2}\frac{\text{ل}_2}{\text{ل}_3}$ کی بجائے $\text{ا}_2$، اور $\frac{\text{ل}_4}{\text{ل}_3}$ کی بجائے $\text{ا}_3$ رکھا جائے

$$\text{لوک}\,\text{ی} + \text{ا}_1\text{لا}_1 + \text{ا}_2(\text{لا}_2 - \text{لا}_3) \pm \sqrt{\{\text{ا}_1(\text{لا}_2 + \text{لا}_3)\}} + \text{ا}_3 = 0$$

جو (۴) کا کامل تکملہ ہے۔

## حل طلب مثالیں

حسب ذیل مثالوں کے کامل تکملے معلوم کرنے میں جیکوبی کا طریقہ استعمال کرو:

(۱) $ع_1^2 + ع_2^2 + ع_3 =$ ، (۲) $لا_3^2 ع_1^2 ع_2^2 ع_3^2 + ع_1^2 ع_2^2 - ع_3^2 = 0$

(۳) $ع_1 لا_1 + ع_2 لا_2 = ع_3^2$ ، (۴) $ع_1 ع_2 ع_3 + ع_4^3 لا_1 لا_2 لا_3 لا_4^3 = 0$

(۵) $ع_1 ع_2 ع_3 = ی^3 لا_1 لا_2 لا_3$ ، (۶) $ع_2 لا_3 (ع_1 + ع_2) + لا_1 + لا_2 = 0$

(۷) $ع_1^2 + ع_2 ع_3 - ی(ع_2 + ع_3) = 0$

(۸) $(ع_1 + لا_1)^2 + (ع_2 + لا_2)^2 + (ع_3 + لا_3)^2 = 3(لا_1 + لا_2 + لا_3)$

## ۱۴۲ ــ ہمزاد جزئی تفرقی مساواتیں ــ حسب ذیل

مثالوں سے نمونے کی چند صورتوں کی وضاحت ہو گی ۔

مثال (۱) $فا \equiv ع_1^2 + ع_2 ع_3 لا_2 لا_3^2 = 0$ ، ...... (۱)

$فا_1 \equiv ع_1 + ع_2 لا_2 = 0$ ، ........ (۲)

یہاں $(فا، فا_1) \equiv \sum \left( \frac{جف\, فا}{جف\, لا_ر} \frac{جف\, فا_1}{جف\, ع_ر} - \frac{جف\, فا}{جف\, ع_ر} \frac{جف\, فا_1}{جف\, لا_ر} \right)$

$$= (ع_2 ع_3 لا_3^2) لا_2 - (ع_2 لا_2 لا_3^2) ع_2 = 0$$

اس کو مساوات (۱) کا حل سمجھا جا سکتا ہے اور کام کا ایک حصہ (فا₁ کو معلوم کرنا) ختم ہو چکا ہے ۔
اس کے بعد فا₂ کو معلوم کرنا ہے ایسا کہ

$(فا_۱ ، فا_۲) = ۰ = (وا_۱ ، فا_۲)$

ذیلی مساواتیں جو جیکوبی کے عمل کے ذریعہ فا سے ماخوذ ہوتی ہیں حسب ذیل ہیں:

$$\frac{فرلا_۱}{ع_۱ - ۲} = \frac{فرع_۱}{۰} = \frac{فرلا_۲}{-ع_۲ لا_۲ لا_۳^۲} = \frac{فرع_۲}{ع_۲ ع_۳ لا_۳^۲} = \frac{فرلا_۳}{-ع_۲ لا_۲ لا_۳^۲} = \frac{فرع_۳}{۲ ع_۲ ع_۳ لا_۲ لا_۳^۲}$$

اِس کا ایک تکملہ $ع_۱ = ا$ ، . . . . (۳)

ہے۔

ہم فا_۲ کو ع_۱ لے سکتے ہیں کیونکہ اِس سے شرط $(فا_۱ ، فا_۲) = ۰ = (فا_۱ ، فا_۲)$ پوری ہوتی ہے۔

(۱)، (۲)، (۳) کو حل کرنے اور $فری = ع_۱ فرلا_۱ + ع_۲ فرلا_۲ + ع_۳ فرلا_۳$ میں اندراج کرنے سے

$$فری = ا فرلا_۱ - ا لا_۲^{-۱} فرلا_۲ + ا لا_۳^{-۲} فرلا_۳$$

اس لیے

$$ی = ا (لا_۱ - لوک لا_۲ - لا_۳^{-۱}) + ب$$

مثال (۲) $فا_۱ = ع_۱ لا_۱ + ع_۲ لا_۲ - ع_۳^۲ = ۰$ ، . . . . . . . (۴)

$فا_۲ = ع_۱ - ع_۲ + ع_۳ - ۱ = ۰$ ، . . . . . . . (۵)

یہاں $(فا_۱ ، فا_۲) = ع_۱ + ع_۲ (-۱) = ع_۱ - ع_۲$

اس کو معدوم ہونا چاہئے اگر فری کے لئے جو جملہ ہے وہ تکمیل پذیر ہے۔

اِس لیے زائد مساوات

$ع_۱ - ع_۲ = ۰$ ، . . . . . . . . . (۶)

حاصل ہوتی ہے۔

(۴)، (۵)، (۶) کو حل کرنے اور اندراج کرنے سے

فری = (فرلا۱ + فرلا۲) / (لا۱ + لا۲) + فرلا۳

اس لیے ی = لوک (لا۱ + لا۲) + لا۳ + ا

(۱۶۹) اس نمونہ کی مثالوں میں ذیلی مساواتوں کو استعمال کرنے کی ضرورت نہیں پڑتی۔ نتیجہ میں صرف ایک اختیاری مستقل ہے حالانکہ مثال (۱) کے نتیجہ میں دو حاصل ہوتے تھے۔

مثال (۳)۔ فا = لا۱² + لا۲² + ع۳ = ۰، ........ (۷)

فا۱ ≡ ع۱ + ع۲ + لا۳² = ۰، ........ (۸)

یہاں (فا، فا۱) = ۲ لا۱ + ۲ لا۲ − ۲ لا۳

اب چونکہ لا۱، لا۲، لا۳ متبوع متغیر ہیں اس لیے (فا، فا۱) ہمیشہ صفر نہیں ہو سکتا۔ اس لیے ان مساواتوں سے فری کے لیے ایک تکمل پذیر جملہ حاصل نہیں ہو سکتا کیونکہ ان میں کوئی تکملہ مشترک نہیں ہے۔

مثال (۴) فا ≡ ع۱ + ع۲ + ع۳ − ۳ لا۱ − ۳ لا۲ − ۴ لا۳² = ۰، ... (۹)

فا۱ ≡ لا ع۱ − لا۲ ع۲ − ۲ لا۱² + ۲ لا۲² = ۰، .... (۱۰)

فا۲ ≡ ع۳ − ۲ لا۳ = ۰، .......... (۱۱)

(۹)، (۱۰)، (۱۱) کو حل کرنے اور فری کے جملہ میں اندراج کرنے سے

فری = (۲ لا۱ + لا۲) فرلا۱ + (لا۱ + ۲ لا۲) فرلا۲ + ۲ لا۳ فرلا۳

اِس لیے $\text{ی} = \text{لا}_1^2 + \text{لا}_1\text{لا}_2 + \text{لا}_2^2 + \text{لا}_3^2 + 1$

اِس دفعہ $(\text{فا}، \text{فا}_1)$، $(\text{فا}، \text{فا}_2)$، $(\text{فا}_1، \text{فا}_2)$ کو محسوب کرنے کی ضرورت نہیں پڑی۔

مثال (۵) $\text{فا} \equiv \text{ع}_1 + \text{ع}_2 - 1 - \text{لا}_2 = 0$، ......... (۱۲)

$\text{فا}_1 \equiv \text{ع}_1 + \text{ع}_3 - \text{لا}_1 - \text{لا}_2 = 0$، ......... (۱۳)

$\text{فا}_2 \equiv \text{ع}_2 + \text{ع}_3 - 1 - \text{لا}_1 = 0$، ......... (۱۴)

اِن سے $\text{فری} = \text{لا}_2\,\text{فرلا}_1 + \text{فرلا}_2 + \text{لا}_1\,\text{فرلا}_3$ حاصل ہوتا ہے۔
چونکہ اِس کو تکمل نہیں کیا جاسکتا اِس لیے ہمزاد مساواتوں میں کوئی مشترک تکملہ نہیں ہے۔

مثال (۶) $\text{فا} \equiv \text{لا}_1\text{ع}_1 - \text{لا}_2\text{ع}_2 + \text{ع}_3 - \text{ع}_4 = 0$، ......... (۱۵)

$\text{فا}_1 \equiv \text{ع}_1 + \text{ع}_2 - \text{لا}_1 - \text{لا}_2 = 0$، ......... (۱۶)

یہاں $(\text{فا}، \text{فا}_1) = \text{ع}_1 - \text{لا}_1(-1) - \text{ع}_2 + \text{لا}_2(-1) = \text{ع}_1 - \text{ع}_2 + \text{لا}_1 - \text{لا}_2$
مثال (۲) کی طرح اس سے نئی مساوات

$\text{فا}_2 \equiv \text{ع}_1 - \text{ع}_2 + \text{لا}_1 - \text{لا}_2 = 0$، ......... (۱۷)

حاصل ہوتی ہے۔

اب $(\text{فا}، \text{فا}_2) = \text{ع}_1 - \text{لا}_1 - \text{ع}_2(-1) + \text{لا}_2(-1) = \text{فا}_1 = 0$

اور $(\text{فا}_1، \text{فا}_2) = (-1) - 1 + (-1)(-1) - (-1) = 0$

اِس لیے اِس طریقہ سے کوئی اور مساواتیں نہیں حاصل ہوسکتیں
فا سے ماخوذ ذیلی مساواتیں حسب ذیل ہیں:

$$\frac{فرلا_۱}{-لا_۱} = \frac{فرع_۱}{ع_۱} = \frac{فرلا_۲}{لا_۲} = \frac{فرع_۲}{-ع_۲} = \frac{فرلا_۳}{۱-} = \frac{فرع_۳}{۰}$$

$$= \frac{فرلا_۴}{۱} = \frac{فرع_۴}{۰}$$

ایک موزوں تکملہ $فا_۳ \equiv ع_۳ = ا$، ....... (۱۸)

ہے کیونکہ وہ $(فا، فا_۳) = (فا_۱، فا_۳) = (فا_۲، فا_۳) = ۰$ کو پورا کرتا ہے۔

اب ہمارے پاس چار مساواتیں (۱۵)، (۱۶)، (۱۷)، (۱۸) ہیں۔ اِن سے

$$ع_۱ = لا_۲،\quad ع_۲ = لا_۱،\quad ع_۳ = ا،\quad ع_۴ = ا$$

اِس لیے

$$ی = لا_۱ لا_۲ + ا\,(لا_۳ + لا_۴) + ب$$

لیکن اِس مثال میں ایک عام تر تکملہ حاصل ہو سکتا ہے۔ (۱۴۰)

دی ہوئی دو مساواتیں (۱۵) اور (۱۶) اور ماخوذ مساوات (۱۷) حسبِ ذیل سادہ ترجیٹ کے معادل ہیں:

$ع_۱ = لا_۲$، .......... (۱۹)

$ع_۲ = لا_۱$، .......... (۲۰)

$ع_۳ - ع_۴ = ۰$، .......... (۲۱)

(۱۹) اور (۲۰) سے $ی = لا_۱ لا_۲ + لا_۳$ اور $(لا_۳$ اور $لا_۴$ کا کوئی تفاعل)

مساوات (۲۱) لگرانج کے نمونہ کی ایک خطی مساوات ہے جس کا عام تکملہ

$$فہ\,(ی، لا_۳ + لا_۴) = ۰$$

ہے یعنے $ی$، $(لا_۳ + لا_۴)$ کا کوئی تفاعل ہے، اور بلا شبہ اِس میں $لا_۱$ اور $لا_۲$ شریک ہو سکتے ہیں۔

پس اوپر کی تین مساواتوں یا دی ہوئی دو مساواتوں کا ایک عام تکملہ

$$\text{ی} = \text{لا}_1\,\text{لا}_2 + \text{سا}\,(\text{لا}_3 + \text{لا}_4)$$

ہے جس میں سا (لا₃ + لا₄) ایک اختیاری تفاعل ہے۔ دوسرے طریقہ سے حاصل شدہ کامل تکملہ ایک مخصوص صورت کے طور پر اس عام تکملہ میں شامل ہے۔ عام تکملہ کو کامل تکملہ سے حسب دفعہ ۱۳۴ا حاصل کیا جا سکتا تھا۔

## حل طلب مثالیں

حسب ذیل ہمزاد مساواتوں کے مشترک کامل تکملے (اگر موجود ہوں) معلوم کرو:

(۱) $\text{ع}_1^2 + \text{ع}_2^2 - 8\,(\text{لا}_1 + \text{لا}_2)^2 = 0,$

$(\text{ع}_1 - \text{ع}_2)(\text{لا}_1 - \text{لا}_2) + \text{ع}_3\,\text{لا}_3 - 1 = 0$

(۲) $\text{لا}_1^2\,\text{ع}_2\,\text{ع}_3 = \text{لا}_2^2\,\text{ع}_3\,\text{ع}_1 = \text{لا}_3^2\,\text{ع}_1\,\text{ع}_2 = 1$

(۳) $\text{ع}_1\,\text{ع}_2\,\text{ع}_3 - 8\,\text{لا}_1\,\text{لا}_2\,\text{لا}_3 = 0,$

$\text{ع}_2 + \text{ع}_3 - 2\,\text{لا}_2 - 2\,\text{لا}_3 = 0$

(۴) $2\,\text{لا}_3\,\text{ع}_1\,\text{ع}_2 - \text{لا}_4\,\text{ع}_4 = 0$

$2\,\text{ع}_1 - \text{ع}_2 = 0$

(۵) $\text{ع}_1\,\text{لا}_3^2 + \text{ع}_3 = 0$

$\text{ع}_2\,\text{لا}_3^2 + \text{ع}_3\,\text{لا}_2^2 = 0$

(۶) $\text{ع}_2^2 + \text{ع}_3^2 + \text{لا}_1 + 2\,\text{لا}_2 + 3\,\text{لا}_3 = 0,$

$\text{ع}_1 + \text{ع}_4^2\,\text{لا}_4 - 1 = 0$

(۷) $2\,\text{ع}_1 + \text{ع}_2 + \text{ع}_3 + 2\,\text{ع}_4 = 0,$

$$\text{ع}_1\text{ع}_3 - \text{ع}_2\text{ع}_4 = 0$$

(۸) مثال (۵) کا عام تکملہ معلوم کرو۔

(۹) مثال (۷) کا عام تکملہ معلوم کرو۔

# تیرھویں باب پر متفرق مثالیں

(۱) $2\,\text{لا}_1\text{لا}_3\,\text{ی}\,\text{ع}_1\text{ع}_3 + \text{لا}_2\text{ع}_2 = 0$

(۲) $\text{لا}_2\text{ع}_3 + \text{لا}_1\text{ع}_4 = \text{ع}_1\text{ع}_3 - \text{ع}_2\text{ع}_4 + \text{لا}_4^2 = 0$

(۳) $9\,\text{لا}_1\text{لا}_4\,\text{ع}_1(\text{ع}_2 + \text{ع}_3) - 4\,\text{ع}_4^2 = 0$ ،

$$\text{ع}_1\text{لا}_1 + \text{ع}_2 - \text{ع}_3 = 0$$

(۴) $9\,\text{لا}\,\text{ی}\,\text{ع}_1(\text{ع}_2 + \text{ع}_3) - 4 = 0$ ،

$$\text{ع}_1\text{لا}_1 + \text{ع}_2 - \text{ع}_3 = 0$$

(۵) $\text{لا}_1\text{ع}_2\text{ع}_3 = \text{لا}_2\text{ع}_3\text{ع}_1 = \text{لا}_3\text{ع}_1\text{ع}_2 = \text{ی}^2\,\text{لا}_1\text{لا}_2\text{لا}_3$

(۶) $\text{ع}_1\text{ی}^2 - \text{لا}_1^2 = \text{ع}_2\text{ی}^2 - \text{لا}_2^2 = \text{ع}_3\text{ی}^2 - \text{لا}_3^2 = 0$

(۷) $\text{ی} = \text{ع}_1\text{لا}_1 + \text{ع}_2\text{لا}_2 + \text{ع}_3\text{لا}_3 + \text{ع}_1^2 + \text{ع}_2^2 + \text{ع}_3^2$ کا ایک نادر تکملہ معلوم کرو جو اُن تمام زائد سطحوں (Hyper-surfaces) (اس صورت میں زائد مستویوں) کے لفاف کو تعبیر کرے جو کامل تکملہ میں شامل ہیں۔

(۸) ثابت کرو کہ شکل $\text{فا}(\text{لا}_1، \text{لا}_2، \text{لا}_3، \text{ع}_1، \text{ع}_2، \text{ع}_3) = 0$ کی کوئی مساوات نادر تکملہ نہیں رکھ سکتی۔

(۹) ثابت کرو کہ اگر مساوات $\text{فا}(\text{لا}، \text{ما}، \text{ی}، \text{ع}، \text{ق}) = 0$ سے ی غائب ہو تو چارپی کا طریقہ جیکوبی کے طریقہ پر منطبق ہوتا ہے۔

(۱۷۱)

(۱۰) ثابت کرو کہ اگر جزئی تفرقی مساواتوں کا ایک نظام $\text{ع}_1، \text{ع}_2، \text{ع}_3$.....

میں خطی اور متجانس ہو اور ان کا ایک مشترک تکملہ

$$ی = ا_1 ع_1 + ا_2 ع_2 + \cdots \text{۔}$$

ہو جہاں $ع_1$، $ع_2$، ... وغیرہ $لا_1$، $لا_2$، ... کے تفاعل ہیں تو ایک عام تکملہ

$$ی = فہ(ع_1، ع_2، \cdots)$$

ہے۔

ہمزاد مساواتوں

$$لا_1 ع_1 - لا_2 ع_2 + لا_2 ع_3 = 0،$$

$$لا_4 ع_3 - لا_4 ع_4 + لا_5 ع_5 = 0$$

کا ایک عام تکملہ معلوم کرو۔

(۱۱) اگر $ع_1$ اور $ع_2$، تبوع متغیروں $لا_1$ اور $لا_2$ کے تفاعل ہوں جو ہمزاد مساواتوں

$$فا(لا_1، لا_2، ع_1، ع_2) = 0 = فا_1(لا_1، لا_2، ع_1، ع_2)$$

کو پُورا کرتے ہیں تو ثابت کرو کہ

$$(فا، فا_1) + \left(\frac{جف\, ع_1}{جف\, لا_2} - \frac{جف\, ع_2}{جف\, لا_1}\right)\frac{جف(فا، فا_1)}{جف(ع_1، ع_2)} = 0$$

اِس سے ثابت کرو کہ اگر اِن ہمزاد مساواتوں کو جزئی تفرقی مساواتیں سمجھا جائے اور اگر اِن کا ایک مشترک تکملہ ہو تو $(فا، فا_1) = 0$ ایک ضروری شرط ہے لیکن وہ کافی نہیں ہے۔

ہمزاد مساواتوں کے حسب ذیل جوڑوں کا امتحان کرو:

$$(۱)\quad فا \equiv ع_1 + ۲ع_2 - ۲ = 0$$

$$فا_1 \equiv (ع_1 + ۲ع_2)^2 - ۱ = 0$$

[ یہاں $\frac{\text{جف}(\text{فا}، \text{فا}_1)}{\text{جف}(\text{ع}_1، \text{ع}_2)} = \cdot$ متماثلاً، اور مساواتوں کو ع$_1$ اور ع$_2$ کے لیے حل نہیں کیا جا سکتا۔ ]

$$(۲) \quad \text{فا} \equiv \text{ع}_1 - \text{ع}_2^2 = \cdot$$

$$\text{فا}_1 \equiv \text{ع}_1 + ۲\text{ع}_2 \text{لا}_1 + \text{لا}_1^2 = \cdot$$

[ یہاں (فا، فا$_1$) اور $\frac{\text{جف}(\text{فا}، \text{فا}_1)}{\text{جف}(\text{ع}_1، \text{ع}_2)}$ دونوں ایسے تفاعل ہو جاتے ہیں جو، ع$_1$، ع$_2$ کی بجائے اِن کی قیمتیں لا$_1$ اور لا$_2$ کی رقوم میں رکھنے پر، معدوم ہوتے ہیں۔ کوئی مشترک تکملہ نہیں ہے۔ ]

$$(۳) \quad \text{فا} \equiv \text{ع}_1 - \text{ع}_2^2 + \text{لا}_2 = \cdot$$

$$\text{فا}_1 \equiv \text{ع}_1 + ۲\text{ع}_2 \text{لا}_1 + \text{لا}_1^2 + \text{لا}_2 = \cdot$$

[ اِن کا ایک مشترک تکملہ ہے اگرچہ $\frac{\text{جف}(\text{فا}، \text{فا}_1)}{\text{جف}(\text{ع}_1، \text{ع}_2)}$ ایک ایسا تفاعل ہو جاتا ہے جو، ع$_1$ اور ع$_2$ کی بجائے اِن کی قیمتیں رکھنے پر معدوم ہوتا ہے۔ ]

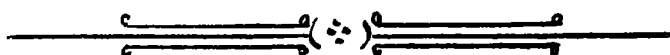
## چارپی کے طریقہ پر نوٹ: (صفحات ۳۶۱ تا ۳۶۷)

بعض اوقات ہم ایک مساوات ف (لا، ما، ی، ع، ق) = ۰ معلوم کر سکیں گے جو ذیلی مساواتوں (۱۴) کا نہیں بلکہ اُن سادہ تر مساواتوں کا ایک تکملہ ہو گی جو ذیلی مساواتوں سے ابتدائی تفرقی مساوات (۴) کو استعمال کر کے حاصل کی گئی ہوں۔ یہ (۱۳) کو متماثلاً نہیں بلکہ (۴) کی وجہ سے پورا کرے گی اور (۴) کے ساتھ مل کر (۳) کو تکمل پذیر

بنا دیگی۔ مثلاً مثال ۲ دفعہ ۱۳۹ میں ع ی = ۱ ایک تکملہ ،

$$\frac{\text{فر ی}}{-۲\ \text{ما ی ع}^۲ + \text{ق}} = \frac{\text{فر ع}}{\text{ما ع}^۲}$$ کا نہیں بلکہ $$\frac{\text{فر ی}}{-\text{ما ی ع}^۲} = \frac{\text{فر ع}}{\text{ما ع}^۲}$$

کا ہے جس سے بالآخر وہ نتیجہ حاصل ہوگا جو دفعہ ۱۳۹ کے جوابات میں مندرج ہے
اِسی طرح جیکوبی کے طریقہ کے لئے بھی یہ بات صادق آتی ہے ۔

# چودھواں باب

(۰۲) 
## دوسرے اور اس سے اعلیٰ رتبوں کی جزئی تفرقی مساواتیں

**۱۴۳** ـ ہم اول چند سادہ مثالیں لیں گے جن کو صرف معائنہ سے تکمل کیا جا سکتا ہے ۔ اس کے بعد خطی جزئی تفرقی مساواتوں پر جن کے سر مستقل ہوں بحث کی جائے گی ' ان میں وہ طریقے استعمال کئے جائینگے جو اُن طریقوں کے مشابہ ہوں گے جن کو معمولی خطی مساواتوں کے لیے جن کے سر مستقل تھے استعمال کیا گیا تھا ۔ باب کا باقی حصہ زیادہ مشکل مضمون مونگے کے طریقوں کے لیئے وقف ہوگا ۔ امید ہے کہ طالب علم اس کے مطالعہ کے بعد مثالوں کو حل کرنے کے قابل ہوگا اور طریقہ کی صحت کا اُس کو یقین ہو جائے گا لیکن ہم نظریہ پر بحث کرنے کی کوشش نہیں کریں گے[۵۲]

متعدد مثالوں میں اُن اختیاری تفاعلوں کو متعین کرنے کی ضرورت پڑے گی جو ہندسی شرطوں کی وجہ سے حلوں میں شریک ہوتے ہیں[۵۳] ۔

---

[۵۱] پروفیسر گیسپرڈ مونگے (بین ۱۷۴۶ء تا ۱۸۱۸ء) علم ہندسہ بیانیہ کا بانی تھا ۔ اُس نے تفرقی مساواتوں کو ہندسہ مجسمات کے سوالوں میں استعمال کیا ۔

[۵۲] اگر اس نظریہ کے مطالعہ کا شوق ہو تو دیکھو گرسا کی کتاب "Sur l'integration des equations aux derivees partielles du second ordre"

[۵۳] فراسٹ کی سالڈ جیومٹری سے استفادہ کیا جا سکتا ہے ۔

متفرق مثالوں میں جو باب کے ختم پر دی گئی ہیں بعض اہم تفرقی مساواتیں جو ڈوریوں ڈنڈوں، جھلیوں وغیرہ کے ارتعاشوں کے نظریہ میں وقوع پذیر ہوتی ہیں شریک ہیں۔ اس باب میں دوسرے جزئی تفرقی سروں $\frac{جف^2 ی}{جف لا^2}$ ، $\frac{جف^2 ی}{جف لا جف ما}$ ، $\frac{جف^2 ی}{جف ما^2}$ کو علی الترتیب ر، س، ت سے تعبیر کیا جائے گا۔

## ۱۴۴ — مساواتیں جن کو معائنہ سے تکمل کیا جاسکتا ہے۔

مثال (۱) س = ۲ لا + ۲ ما

لا کے لحاظ سے (ما کو مستقل رکھ کر) تکمل کرنے سے

ق = لا$^2$ + ۲ لا ما + فہ (ما)

اسی طرح ما کے لحاظ سے تکمل کرنے پر

ی = لا$^2$ما + لا ما$^2$ + $\int$ فہ (ما) فرما + ف (لا)

فرض کرو ی = لا$^2$ما + لا ما$^2$ + ف (لا) + فا (ما)

مثال (۲) وہ سطح معلوم کرو جو مکافیوں (۱۴۲)

ی = ۰، ما$^2$ = ۴ الا اور ی = ۱، ما$^2$ = ‎-‎۴ الا

میں سے گذرے اور لا ر + ۲ ع = ۰

کو پورا کرے۔

تفرقی مساوات ہے

$$لا \frac{جف ع}{جف لا} + ۲ ع = ۰$$

جس سے لا$^2$ ع = ف (ما)

$$ع = \frac{۱}{لا^2} ف (ما)$$

ی = − $\frac{۱}{لا}$ ف (ما) + فا (ما)

تفاعلوں ف اور فا کو ہندسی شرطوں سے متعین کرنا ہے۔

ی = ۰ اور لا = $\frac{ما^۲}{۴ ا}$ رکھنے سے

۰ = − $\frac{۴ ا}{ما^۲}$ ف (ما) + فا (ما)

اسی طرح ۱ = $\frac{۴ ا}{ما^۲}$ ف (ما) + فا (ما)

اس لیے فا (ما) = $\frac{۱}{۲}$، ف (ما) = $\frac{ما^۲}{۸ ا}$

اور ی = $\frac{۱}{۲}$ − $\frac{ما^۲}{۸ ا لا}$

یعنے ۸ ا لا ی = ۴ ا لا − ما^۲

جو ایک مخروطی نما ہے۔

# حل طلب مثالیں

(۱) ر = ٦ لا (۲) لا ما س = ۱

(۳) ت = جب لا ما (۴) لا ر + ح = ۹ لا^۲ ما^۲

(۵) ما س + ح = جم (لا + ما) − ما جب (لا + ما)

(٦) ت − لا ق = لا^۲

(۷) وہ سطح معلوم کرو جو س = ۸ لا ما کو پورا کرے اور دائرہ

ی = ۰ = لا^۲ + ما^۲ − ۱

میں سے گذرے۔

(۸) عام سے عام مخروطی نما معلوم کرو جو لا س + ق = ۴ لا + ۲ ما + ۲

کو پورا کرے۔

(۹) وہ گردشی سطح معلوم کرو جو ی = ۰ کو مس کرے اور

ر = ۱۲ لا$^۲$ + ۴ ما$^۲$

کو پورا کرے۔

(۱۰) وہ سطح معلوم کرو جو ت = ۶ لا$^۳$ ما کو پورا کرے اور دو خطوط

ما = ۰ = ی، ما = ۱ = ی

میں سے گذرے۔

## ۱۴۵ - مستقل سروں والی متجانس خطی مساواتیں

تیسرے باب میں ہم نے مساوات

(عف$^ن$ + ا$_۱$ عف$^{ن-۱}$ + ا$_۲$ عف$^{ن-۲}$ + ۰۰۰۰ + ا$_ن$) ما = ف (لا)، ۰۰۰۰ (۱)

پر ذرا تفصیل سے بحث کی ہے جس میں عف ≡ فر / فر لا ہے۔

(۱۷۴) اب ہم دو متبوع متغیروں کی متناظر مساوات

(عف$^ن$ + ا$_۱$ عف$^{ن-۱}$ عفَ + ا$_۲$ عف$^{ن-۲}$ عفَ$^۲$ + ۰۰۰۰ + ا$_ن$ عفَ$^ن$) ی

= ف (لا، ما) ۰۰۰۰۰ (۲)

پر جہاں عف ≡ فر / فر لا اور عفَ ≡ فر / فر ما اختصاراً بحث کریں گے۔

سادہ ترین صورت (عف - م عفَ) ی = ۰

یعنے

ع - م ق = ۰

ہے جس کا حل

خہ (ی، ما + م لا) = ۰

یعنے

ی = فا (ما + م لا)

ہے۔

اِس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ (او راس کی آسانی سے تصدیق ہوجاتی ہے) (۲) کا حل

ی = فا$_1$(ما + م$_1$ لا) + فا$_2$(ما + م$_2$ لا) + ..... + فا$_ن$(ما + م$_ن$ لا)

ہے اگر ف (لا، ما) = ۰ جہاں م$_1$، م$_2$، .....، م$_ن$ مساوات

م$^ن$ + ا$_1$ م$^{ن-1}$ + ا$_2$ م$^{ن-2}$ + ..... + ا$_ن$ = ۰

کی اصلیں ہیں اور یہ تمام اصلیں مختلف ہیں -

مثال - $\frac{\text{جف}^3 \text{ی}}{\text{جف لا}^3}$ - ۳ $\frac{\text{جف}^3 \text{ی}}{\text{جف لا}^2 \text{ جف ما}}$ + ۲ $\frac{\text{جف}^3 \text{ی}}{\text{جف لا جف ما}^2}$ = ۰

یعنے (عف$^3$ - ۳ عف$^2$ عفَ + ۲ عف عفَ$^2$) ی = ۰

م$^3$ - ۳ م$^2$ + ۲ م = ۰ کی اصلیں ۰، ۱، ۲ ہیں -

اِس لیے ی = فا$_1$(ما) + فا$_2$(ما + لا) + فا$_3$(ما + ۲ لا)

# حل طلب مثالیں

(۱) (عف$^3$ - ۶ عف$^2$ عفَ + ۱۱ عف عفَ$^2$ - ۶ عفَ$^3$) ی = ۰

(۲) ۲ ر + ۵ س + ۲ ت = ۰

(۳) $\frac{\text{جف}^2 \text{ی}}{\text{جف لا}^2}$ - $\frac{\text{جف}^2 \text{ی}}{\text{جف ما}^2}$ = ۰

(۴) وہ سطح معلوم کرو جو ر + س = ۰ کو پورا کرے اور ناقصی مکافی نما ی = ۴ لا$^2$ + ما$^2$ کو اُس تراش پر مس کرے جو مستوی ما = ۲ لا + ۱ سے منقطع ہوتی ہے - [نوٹ: اِن دو سطحوں کے لیے ع کی قیمتیں (اور نیز ق کی قیمتیں) ما = ۲ لا + ۱ پر کے کسی نقطہ کے لیے مساوی ہونی چاہئیں]

## ۱۴۶۔ وہ صورت جبکہ امدادی مساوات کی اصلیں مساوی ہوں۔

مساوات (عف ـ م عفَ)$^{2}$ ی = ۰ ....... (۱)

پر غور کرو۔

رکھو (عف ـ م عفَ) ی = ع

تو مساوات (۱) ہو جاتی ہے (عف ـ م عفَ) ع = ۰

جس سے ع = فا (ما + م لا)

اِس لیے (عف ـ م عفَ) ی = فا (ما + م لا)

یا ع ـ م ق = فا (ما + م لا)

ذیلی مساواتیں

فرلا / ۱ = فرما / (ـ م) = فری / فا (ما + م لا)

ہیں، اِن سے (۱۷۵)

ما + م لا = ر

اور فری ـ فا (ر) فرلا = ۰

یعنی ی ـ لا فا (ما + م لا) = ب

اِس لیے عام تکملہ فہ{ی ـ لا فا (ما + م لا)، ما + م لا} = ۰

یا ی = لا فا (ما + م لا) + فا$_{1}$ (ما + م لا)

ہے۔

اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

(عف ـ م عفَ)$^{ن}$ ی = ۰

کا تکملہ ی = لا$^{ن-1}$ فا (ما + م لا) + لا$^{ن-2}$ فا$_{1}$ (ما + م لا) + ...... + فا$_{ن-1}$ (ما + م لا)

ہے۔

# حل طلب مثالیں

(۱)   ( ۴ عف$^{۲}$ + ۱۲ عف عفَ + ۹ عفَ$^{۲}$ ) ی = ۰

(۲)   ۲۵ ر ـ ۴۰ س + ۱۶ ت = ۰

(۳)   ( عف$^{۳}$ ـ ۴ عف$^{۲}$ عفَ + ۴ عف عفَ$^{۲}$ ) ی = ۰

(۴)   وہ سطح معلوم کرو جو دو خطوط ی = لا = ۰، ی ـ ۱ = لا ـ ما = ۰ میں سے گذرے اور ر ـ ۴ س + ۴ ت = ۰ کو پورا کرے ۔

**۱۴۷ ـ خاص تکملہ** ـ اب ہم دفعہ ۱۴۵ کی مساوات (۲) کی طرف رجوع ہوتے ہیں اور اس کو اختصاراً

فا (عف، عفَ) ی = ف (لا، ما)

لکھتے ہیں ۔

ہم تیسرے باب کی اتباع قدم بہ قدم کرکے ثابت کرسکتے ہیں کہ ی کی عام سے عام قیمت ایک خاص تکملہ اور متمم تفاعل (جو ی کی قیمت ہے جبکہ تفرقی مساوات میں ف (لا، ما) کی بجائے صفر رکھا گیا ہو) کا حاصل جمع ہے ۔

خاص تکملہ کو $\frac{۱}{\text{فا (عف، عفَ)}}$ ف (لا، ما) لکھا جاسکتا ہے اور ہم عف اور عفَ کے علامتی تفاعل کو اسی طرح استعمال کرسکتے ہیں جس طرح ہم نے علامت عف کو استعمال کیا تھا یعنے اس کو اجزائے ضربی میں تحلیل کرسکتے ہیں، جزئی کسور میں توڑ سکتے ہیں، یا ایک لامتناہی سلسلہ میں پھیلا سکتے ہیں ۔

مثلاً $\frac{۱}{\text{عف}^{۲} - ۶\,\text{عف عفَ} + ۹\,\text{عفَ}^{۲}}$ (۱۲ لا$^{۲}$ + ۳۶ لا ما)

$$= \frac{1}{\text{عف}^2}\left(1 - \frac{3\,\text{عفَ}}{\text{عف}}\right)^{-2} (12\,\text{لا}^2 + 36\,\text{لا ما})$$

$$= \frac{1}{\text{عف}^2}\left(1 + \frac{6\,\text{عفَ}}{\text{عف}} + \frac{27\,\text{عفَ}^2}{\text{عف}^2} + \cdots\right)(12\,\text{لا}^2 + 36\,\text{لا ما})$$

$$= \frac{1}{\text{عف}^2}(12\,\text{لا}^2 + 36\,\text{لا ما}) + \frac{6}{\text{عف}^2} \times 36\,\text{لا}$$

$$= \text{لا}^4 + 6\,\text{لا}^3\,\text{ما} + 9\,\text{لا}^4 = 10\,\text{لا}^4 + 6\,\text{لا}^3\,\text{ما}$$

اِس لیے $(\text{عف}^2 - 6\,\text{عف عفَ} + 9\,\text{عفَ}^2)\,\text{ی} = 12\,\text{لا}^2 + 36\,\text{لا ما}$ کا حل

$$\text{ی} = 10\,\text{لا}^4 + 6\,\text{لا}^3\,\text{ما} + \text{فہ}(\text{ما} + 3\,\text{لا}) + \text{لا}\,\text{فا}(\text{ما} + 3\,\text{لا})$$

ہے۔

## حل طلب مثالیں

(۱) $(\text{عف}^2 - 2\,\text{عف عفَ} + \text{عفَ}^2)\,\text{ی} = 12\,\text{لا ما}$

(۲) $(2\,\text{عف}^2 - 5\,\text{عف عفَ} + 2\,\text{عفَ}^2)\,\text{ی} = 24(\text{ما} - \text{لا})$ (۱۷۶)

(۳) لا اور ما کا ایک حقیقی تفاعل و معلوم کرو جو صفر میں تحویل ہو جبکہ ما = ۰، اور

$$\frac{\text{جف}^2\,\text{و}}{\text{جف لا}^2} + \frac{\text{جف}^2\,\text{و}}{\text{جف ما}^2} = -24(\text{لا}^2 + \text{ما}^2)$$

کو پورا کرے۔

**۱۴۸ - مختصر طریقے** - جب ف (لا، ما)، ا لا + ب ما کا تفاعل ہوتا ہے تو مختصر طریقے استعمال کئے جا سکتے ہیں۔

ا ب عف فہ $(\text{ا لا} + \text{ب ما}) = \text{ا فہَ}(\text{ا لا} + \text{ب ما})$،

عفَ فہ (ا لا + ب ما) = ب فہَ (ا لا + ب ما)

اِس لیے فا(عف، عفَ) فہ (ا لا + ب ما) = فا(ا، ب) فہ^(ن) (ا لا + ب ما)

جہاں فہ^(ن)، فہ کا ن واں مشتق تفاعل ہے اور ن، فا(عف، عفَ) کا درجہ ہے

اِس کے بالعکس

$$\frac{1}{\text{فا(عف، عفَ)}}\ \text{فہ}^{(ن)}\ (\text{ا لا + ب ما}) = \frac{1}{\text{فا(ا، ب)}}\ \text{فہ (ا لا + ب ما)}\ \ldots (1)$$

بشرطیکہ فا(ا، ب) ≠ ۰، مثلاً

$$\frac{1}{\text{عف}^3 - 4\,\text{عف}^2\text{عفَ} + 4\,\text{عف عفَ}^2}\ \text{جم} (2\text{لا} + 3\text{ما}) = \frac{-\text{جب} (2\text{لا} + 3\text{ما})}{2^3 \times 2 \times 4 + 3 \times 2^2 \times 4 - 3^2}$$

$$= -\frac{1}{32}\ \text{جب} (2\text{لا} + 3\text{ما})$$

کیونکہ فہ (۲ لا + ۳ ما) کو ۔جب (۲ لا + ۳ ما) لیا جا سکتا ہے اگر

فہَ (۲ لا + ۳ ما) = جم (۲ لا + ۳ ما)

اگر فا(ا، ب) = ۰ تو اِس صورت میں ہم مساوات

(عف ۔ م عفَ) ی ≡ ع ۔ م ق = لا^ر سا (ما + م لا)

پر غور کرتے ہیں جس کا حل آسانی سے

$$\text{ی} = \frac{\text{لا}^{ر+1}}{ر+1}\ \text{سا (ما + م لا)} + \text{فہ (ما + م لا)}$$

حاصل ہوتا ہے، اِس لیے ہم لے سکتے ہیں

$$\frac{1}{\text{عف ۔ م عفَ}} \times \text{لا}^{ر}\ \text{سا (ما + م لا)} = \frac{\text{لا}^{ر+1}}{ر+1}\ \text{سا (ما + م لا)}$$

$$\text{پس}\quad \frac{1}{(\text{عف ۔ م عفَ})^{ن}}\ \text{سا (ما + م لا)}$$

$$= \frac{1}{(\text{عف} - \text{م}\,\text{عف}')^{\text{ن}-1}} \times \text{لا}\ \text{سا}(\text{ما} + \text{م}\,\text{لا}) = \dots$$

$$= \frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\lfloor\text{ن}} \text{سا}(\text{ما} + \text{م}\,\text{لا})' \dots\dots (\text{ب})$$

مثلاً
$$\frac{1}{\text{عف}^2 - 2\,\text{عف}\,\text{عف}' + \text{عف}'^2}\ \text{مس}(\text{ما} + \text{لا}) = \frac{1}{2}\text{لا}^2\,\text{مس}(\text{ما} + \text{لا})$$

اور
$$\frac{1}{\text{عف}^2 - 5\,\text{عف}\,\text{عف}' + 4\,\text{عف}'^2}\ \text{جب}(4\text{لا} + \text{ما})$$

$$= \frac{1}{\text{عف} - 4\,\text{عف}'}\ \frac{1}{\text{عف} - \text{عف}'}\ \text{جب}(4\,\text{لا} + \text{ما})$$

$$= \frac{1}{\text{عف} - 4\,\text{عف}'} \times -\frac{1}{3}\text{جم}(4\,\text{لا} + \text{ما})'\ (\text{أ})\ \text{سے}$$

$$= -\frac{1}{3}\,\text{لا}\,\text{جم}(4\,\text{لا} + \text{ما})'\ (\text{ب})\ \text{سے}$$

## حل طلب مثالیں

(۱۷۷)

(۱) $(\text{عف}^2 - 2\,\text{عف}\,\text{عف}' + \text{عف}'^2)\,\text{ی} = \text{و}^{\text{لا} + 2\text{ما}}$

(۲) $(\text{عف}^2 - 6\,\text{عف}\,\text{عف}' + 9\,\text{عف}'^2)\,\text{ی} = 6\,\text{لا} + 2\,\text{ما}$

(۳) $(\text{عف}^3 - 4\,\text{عف}^2\,\text{عف}' + 4\,\text{عف}\,\text{عف}'^2)\,\text{ی} = 4\,\text{جب}(2\,\text{لا} + \text{ما})$

(۴) $2\text{ر} - \text{س} - 3\text{ت} = \frac{5\,\text{و}^{\text{لا}}}{\text{و}^{\text{ما}}}$

(۵) $\frac{\text{جف}^2\text{و}}{\text{جف}\,\text{لا}^2} + \frac{\text{جف}^2\text{و}}{\text{جف}\,\text{ما}^2} = 12(\text{لا} + \text{ما})$

(۶) $4\text{ر} - 4\text{س} + \text{ت} = 16\,\text{لوک}(\text{لا} + 2\,\text{ما})$

## ۱۴۹ ـ عام طریقہ ـ خاص تکملہ کو حاصل کرنے کا ایک عام طریقہ

معلوم کرنے کے لیے مساوات

(عف ـ م عفَ) ی ≡ ع ـ م ق = ف (لا، ما)

پر غور کرو ـ

ذیلی مساواتیں

$$\frac{\text{فرلا}}{1} = \frac{\text{فرما}}{-\text{م}} = \frac{\text{فری}}{\text{ف (لا، ما)}}$$

ہیں جن کا ایک تکملہ ما + م لا = ج ہے ـ

اِس تکملہ کو دوسرا تکملہ معلوم کرنے میں استعمال کرنے سے

فری = ف (لا، ج ـ م لا) فرلا

ی = ∫ ف (لا، ج ـ م لا) فرلا + مستقل

جہاں تکمل کے بعد ج کی بجائے ما + م لا رکھنا ہوگا ـ

پس ہم $\frac{1}{\text{عف ـ م عفَ}}$ × ف (لا، ما) کو

∫ ف (لا، ج ـ م لا) فرلا لے سکتے ہیں جہاں تکمل کے بعد

ج کی بجائے ما + م لا رکھنا ہوگا ـ

مثال ـ (عف ـ ۲ عفَ) (عف + عفَ) ی = (ما ـ ۱) فو^لا

یہاں ∫ ف (لا، ج ـ ۲ لا) فرلا = ∫ (ج ـ ۲ لا ـ ۱) فو^لا فرلا = (ج ـ ۲ لا + ۱) فو^لا

اس لیے $\frac{1}{\text{عف ـ ۲ عفَ}}$ (ما ـ ۱) فو^لا = (ما + ۱) فو^لا، ج کی بجائے ما + ۲ لا رکھنے سے

اسی طرح $\frac{1}{\text{عف + عفَ}}$ (ما + ۱) فو^لا کو ∫ (ج + لا + ۱) فو^لا فرلا = (ج + لا) فو^لا

سے ج کی بجائے ما ـ لا رکھ کر معلوم کیا جائے تو ما فو^لا حاصل ہوگا جو مطلوبہ

خاص تکملہ ہے ۔

پس ی = ما قوِ لا + فہ (ما + ۲ لا) + سا (ما ـ لا)

## حل طلب مثالیں

(۱) (عف۲ + ۲ عف عفَ + عفَ۲) ی = ۲ جم ما ـ لا جب ما

(۲) (عف۲ ـ ۲ عف عفَ ـ ۱۵ عفَ۲) ی = ۱۲ لا ما

(۳) ر + س ـ ۶ ت = ما جم لا

(۴) جف۲ ی / جف لا۲ ـ جف۲ ی / جف لا جف ما ـ ۲ جف۲ ی / جف ما۲

= (۲ لا۲ + لا ما ـ ما۲) جب لا ما ـ جم لا ما

(۵) ر ـ ت = مس۳ لا مس ما ـ مس لا مس۳ ما

(۶) جف۲ ما / جف لا۲ ـ ۴ جف۲ ما / جف ت۲ = ۴ لا / ت۲ ـ ت / لا۲

## ۱۵۰ ـ غیر متجانس خطی مساواتیں ـ سادہ ترین صورت (۱۷۸)

(عف ـ م عفَ ـ ا) ی = ۰

یعنے

ع ـ م ق = ا ی

ہے جس سے

فہ (ی قوِ ـ ا لا ، ما + م لا) = ۰

یا

ی = قوِ ا لا سا (ما + م لا)

حاصل ہوتا ہے ۔

اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

(عف ـ م عفَ ـ ا) (عف ـ ن عفَ ـ ب) ی = ۰

کا تکملہ ی = قوِ ا لا ف (ما + م لا) + قوِ ب لا فا (ما + ن لا)

ہے اور (عف ۔ م عفَ ۔ ا)$^2$ ی = ۰ کا تکملہ

ی = قو$^{لا}$ ف (ما + م لا) + لا قو$^{لا}$ فا (ما + م لا)

ہے۔

لیکن وہ مساواتیں جن میں لامتی عامل ایسے اجزائے ضربی میں تحویل نہ ہو سکے جو عف اور عفَ میں خطی ہوں اس طریقہ پر تکمیل نہیں کی جا سکتیں۔

مثالاً (عف$^2$ ۔ عفَ) ی = ۰ پر غور کرو۔

آزمائشی حل کے طور پر رکھو ی = قو$^{ھ لا + ک ما}$ تو

(عف$^2$ ۔ عفَ) ی = (ھ$^2$ ۔ ک) قو$^{ھ لا + ک ما}$

اس طرح ی = قو$^{ھ (لا + ھ ما)}$ ایک خاص تکملہ ہے اور اس سے

عام تر تکملہ $\Sigma$ ا قو$^{ھ (لا + ھ ما)}$ ہے جہاں ہر رقم میں ا اور ھ بالکل اختیاری ہیں اور رقموں کی کوئی تعداد لی جا سکتی ہے۔

تکملہ کی یہ شکل طبیعاتی مسئلوں میں سب سے زیادہ موزوں ہے جیسا کہ چوتھے باب میں کچھ تفصیل کے ساتھ سمجھایا گیا ہے۔ بلاشبہ مستقل سروں والی کسی خطی جزئی تفرقی مساوات کا تکملہ اس طریقہ پر بیان کیا جا سکتا ہے لیکن وہ مختصر شکلیں جن میں اختیاری تفاعل آتے ہیں بالعموم قابل ترجیح ہیں۔

## حل طلب مثالیں

(۱) عف عفَ (عف ۔ ۲ عفَ ۔ ۳) ی = ۰

(۲) ر + ۲ س + ت + ۲ ع + ۲ ق + ی = ۰

(۳) $\frac{\text{جف}^2 \text{و}}{\text{جف لا}^2} = \frac{\text{جف و}}{\text{جف ت}}$

(۴) (عف² − عفَ² + عف − عفَ) ی = ۰

(۵) (۲ عف³ − ۳ عف² عفَ + عفَ²) ی = ۰

(۶) $\frac{\text{جف}^2 \text{و}}{\text{جف لا}^2} + \frac{\text{جف}^2 \text{و}}{\text{جف ما}^2} = \text{ن}^2 \text{و}$

(۷) (عف − ۲ عفَ − ۱) (عف − ۲ عفَ² − ۱) ی = ۰

(۸) مثال (۴) کا حل معلوم کرو جو ۱ میں تحویل ہو جبکہ لا = +∞ اور ما² میں تحویل ہو جبکہ لا = ۰۔

**۱۵۱ — خاص تکملے** — غیر متجانس مساواتوں کے خاص تکملوں کو حاصل کرنے کے طریقے تیسرے باب کے طریقوں کے بہت مشابہ ہیں، اِس لیے ہم صرف چند مثالیں دیں گے۔

مثال (۱) $(\text{عف}^3 - 3\,\text{عف}\,\text{عفَ} + \text{عفَ} + 1)\,\text{ی} = \text{و}^{2\text{لا} + 3\text{ما}}$

$$\frac{1}{\text{عف}^3 - 3\,\text{عف}\,\text{عفَ} + \text{عفَ} + 1}\,\text{و}^{2\text{لا}+3\text{ما}}$$

$$= \frac{\text{و}^{2\text{لا}+3\text{ما}}}{2^3 - 3 \times 2 \times 3 + 3 + 1}$$

$$= -\frac{1}{7}\,\text{و}^{2\text{لا}+3\text{ما}}$$

اس لیے $\text{ی} = -\frac{1}{7}\,\text{و}^{2\text{لا}+3\text{ما}} + \sum \text{ا}\,\text{و}^{\text{ھ}\text{لا}+\text{ک}\,\text{ما}}$ (۱۷۹)

جہاں $\text{ھ}^3 - 3\,\text{ھ}\,\text{ک} + \text{ھ} + 1 = 0$۔

**مثال (۲)** (عف + عفَ - ۱)(عف + ۲ عفَ - ۳) ی = ۴ + ۳ لا + ۶ ما

۱/(عف + عفَ - ۱) · ۱/(عف + ۲ عفَ - ۳) = ۱/۳ {۱ - (عف + عفَ)}^-۱

× {۱ - (عف + ۲ عفَ)/۳}^-۱

= ۱/۳ {۱ + عف + عفَ + اعلیٰ تر درجہ کی رقمیں}

× {۱ + (عف + ۲ عفَ)/۳ + اعلیٰ تر درجہ کی رقمیں}

= ۱/۳ {۱ + (۴ عف + ۵ عفَ)/۳ + اعلیٰ تر درجہ کی رقمیں}

اِس عامل سے ۴ + ۳ لا + ۶ ما پر عمل کرنے سے

۱/۳ {۴ + ۳ لا + ۶ ما + ۴ + ۱۰} = ۶ + لا + ۲ ما

اس لیے ی = ۶ + لا + ۲ ما + و^لا ف (ما - لا) + و^۳لا فا (ما - ۲ لا)

**مثال (۳)** (عف^۲ - عف عفَ - ۲ عف) ی = جب (۳ لا + ۴ ما)

۱/(عف^۲ - عف عفَ - ۲ عف) جب (۳ لا + ۴ ما)

= ۱/(-۳^۲ - (-۳ × ۴) - ۲ عف) جب (۳ لا + ۴ ما)

= ۱/(۳ - ۲ عف) جب (۳ لا + ۴ ما)

= (۳ + ۲ عف)/(۹ - ۴ عف^۲) جب (۳ لا + ۴ ما) = (۳ جب (۳ لا + ۴ ما) + ۶ جم (۳ لا + ۴ ما))/(۹ - ۴ (-۳^۲))

= ۱/۱۵ جب (۳ لا + ۴ ما) + ۲/۱۵ جم (۳ لا + ۴ ما)

پس ی = ۱/۱۵ جب (۳ لا + ۴ ما) + ۲/۱۵ جم (۳ لا + ۴ ما) + ء ۱ (و ھ لا + ک ما)

جہاں ھ۲ - ھ ک - ۲ ھ = ۰

## حل طلب مثالیں

(۱) (عف - عفَ - ۱) (عف - عفَ - ۲) ی = فو ۲لا - ما

(۲) س + ع - ق = ی + لا ما (۳) (عف - عفَ۲) ی = جم (لا - ۳ ما)

(۴) ر - س + ع = ۱ (۵) جف۲ ما / جف لا۲ - جف۲ ما / جف ی۲ = ما + فو لا + ی

(۶) (عف - ۳ عفَ - ۲)۲ ی = ۲ فو ۲لا مس (ما + ۳ لا)

**۱۵۲ - اسقاط کی مثالیں** - اب ہم پہلے رتبہ کی جزئی تفرقی مساوات سے اختیاری تفاعل کو ساقط کرنے کی مثالیں دینگے -

**مثال (۱)** ۲ ع لا - ق ما = فہ (لا۲ ما)

اول لا کے لحاظ سے اور پھر ما کے لحاظ سے تفرق کرنے پر

۲ ر لا - س ما + ۲ ع = ۲ لا ما فہَ (لا۲ ما)

اور ۲ س لا - ت ما - ق = لا۲ فہَ (لا۲ ما)

اس لیے لا (۲ ر لا - س ما + ۲ ع) = ۲ ما (۲ س لا - ت ما - ق)

یا ۲ لا۲ ر = ۵ لا ما س + ۲ ما۲ ت + ۲ (ع لا + ق ما) = ۰

جو ر، س، ت میں پہلے درجہ کی مساوات ہے -

ع لا - ۲ ق ما = ما (لا ما۲) سے ساقط کرنے پر بھی یہی نتیجہ برآمد ہوگا -

(۱۸۰)

**مثال (۲)** ع۲ + ق = فہ (۲ لا + ما)

یہاں ۲ ع ر + س = ۲ فہَ (۲ لا + ما)

اور ۲ ع س + ت = فَہ (۲ لا + ما)

اِس لیے ۲ ع ر + س = ۴ ع س + ۲ ت

جو پھر ر، س، ت میں پہلے درجہ کی مساوات ہے۔

مثال (۳) ما ـ ع = فہ (لا ـ ق)

اِس سے حاصل ہوتا ہے

ـ ر = (۱ ـ س) فہَ (لا ـ ق)

اور ۱ ـ س = ـ ت فہَ (لا ـ ق)

اِس لیے رت = (۱ ـ س)$^{2}$

یا ۲ س + (رت ـ س$^{2}$) = ۱

اِس مثال میں اور پہلے کی دو مثالوں میں یہ فرق ہے کہ اِس میں ع اور ق، اختیاری تفاعل میں بھی واقع ہوتے ہیں۔ نتیجہ میں (رت ـ س$^{2}$) کی رقم شریک ہے۔

## حل طلب مثالیں

حسب ذیل مساواتوں سے اختیاری تفاعل کو ساقط کرو:

(۱) ع ما ـ ق + ۳ ما$^{2}$ = فہ (۲ لا + ما$^{2}$)

(۲) لا ـ $\frac{۱}{ق}$ = فہ (ی)

(۳) ع + لا ـ ما = فہ (ق ـ ۲ لا + ما)

(۴) ع لا + ق ما = فہ (ع$^{2}$ + ق$^{2}$)

(۵) ع$^{2}$ ـ لا = فہ (ق$^{2}$ ـ ۲ ما) (۶) ع + ی ق = فہ (ی)

**۱۵۳ ـ پچھلے نتیجوں کی تعمیم** ـ اگر لا، ما، ی، ع، ق کے تفاعل ء اور و معلوم ہوں اور مساوات ء = فہ (و) کو حسب سابق استعمال کیا جائے تو

$$\text{ر}\frac{\text{جف ۶}}{\text{جف ع}}+\text{س}\frac{\text{جف ۶}}{\text{جف ق}}+\frac{\text{جف ۶}}{\text{جف لا}}+\text{ع}\frac{\text{جف ۶}}{\text{جف ی}}$$

$$=\left(\text{ر}\frac{\text{جف و}}{\text{جف ع}}+\text{س}\frac{\text{جف و}}{\text{جف ق}}+\frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}}+\text{ع}\frac{\text{جف و}}{\text{جف ی}}\right)\text{فَ(و)}$$

اور $$\text{س}\frac{\text{جف ۶}}{\text{جف ع}}+\text{ت}\frac{\text{جف ۶}}{\text{جف ق}}+\frac{\text{جف ۶}}{\text{جف ما}}+\text{ق}\frac{\text{جف ۶}}{\text{جف ی}}$$

$$=\left(\text{س}\frac{\text{جف و}}{\text{جف ع}}+\text{ت}\frac{\text{جف و}}{\text{جف ق}}+\frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}}+\text{ق}\frac{\text{جف و}}{\text{جف ی}}\right)\text{فَ(و)}$$

فَ(و) کو ساقط کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ ر س اور س ت والی رقمیں خارج ہو جاتی ہیں اور نتیجہ شکل

$$\text{سر ر}+\text{س س}+\text{ت ت}+\text{۶}(\text{ر ت}-\text{س}^2)=\text{و}$$

میں حاصل ہوتا ہے جہاں سر، س، ت، ۶، و میں ع، ق، اور لا، ما، ی، ع، ق کے لحاظ سے ۶ اور و کے جزئی تفرقی سر شامل ہیں

$$\text{سر}\quad \text{۶}=\frac{\text{جف ۶}}{\text{جف ع}}\frac{\text{جف و}}{\text{جف ق}}-\frac{\text{جف و}}{\text{جف ع}}\frac{\text{جف ۶}}{\text{جف ق}}$$

**معدوم ہوتا ہے اگر و صرف لا، ما، ی کا تفاعل ہو اور ع یا ق کا نہ ہو۔**

ان نتیجوں سے ہمیں یہ معلوم ہوگا کہ جب ہم دوسرے رتبہ کی مساواتوں سے ابتدا کرتے ہیں اور ان سے پہلے رتبہ کی مساواتیں حاصل کرنے کی کوشش کرتے ہیں تو ہمیں کیا توقع کرنی چاہئے۔

(۱۸۱) **۱۵۴ا — سر ر + س س + ت ت = و کو مکمل کرنے کا مونگے کا طریقہ** ۔ اب ہم ر، س، ت میں پہلے درجہ کی مساواتوں پر جن کے سر سر، س، ت، و ہوں جو ع، ق، لا، ما، ی کے

تفاعل میں غور کریں گے اور دفعات ۱۵۲ اور ۱۵۳ کے عمل کو الٹا کرنے کی کوشش کریں گے۔

چونکہ فرع = $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}$ فرلا + $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}$ فرما = ر فرلا + س فرما

اور فرق = س فرلا + ت فرما

اس لیے ک ر + ص س + ت ت - و = ۰

ہو جاتا ہے ک $\left(\frac{\text{فرع - س فرما}}{\text{فرلا}}\right)$ + س س + ت $\left(\frac{\text{فرق - س فرلا}}{\text{فرما}}\right)$ - و = ۰

یعنے ک فرع فرما + ت فرق فرلا - و فرما فرلا - س (ک فرما$^2$ - س فرما فرلا + ت فرلا$^2$) = ۰

مونگے کے طریقہ میں خاص خصوصیت یہ ہے کہ ع، ق، لا، ما کے درمیان ایک یا دو رشتے (جن میں سے ہر رشتہ میں ایک اختیاری تفاعل شریک ہوتا ہے) حاصل کئے جاتے ہیں جو ہمزاد مساواتوں

ک فرما$^2$ - س فرما فرلا + ت فرلا$^2$ = ۰

ک فرع فرما + ت فرق فرلا - و فرما فرلا = ۰

کو پورا کرتے ہیں۔

ان رشتوں کو **درمیانی تکملے** کہا جاتا ہے۔

عمل کا طریقہ چند حل شدہ مثالوں کو دیکھنے سے اچھی طرح سمجھ میں آجائے گا۔

**مثال** (۱) ۲ لا$^2$ ر - ۵ لا ما س + ۲ ما$^2$ ت + ۲ (ع لا + ق ما) = ۰،

اوپر کی طرح عمل کرنے پر ہمزاد مساواتیں

۲ لا$^2$ فرما$^2$ + ۵ لا ما فرلا فرما + ۲ ما$^2$ فرلا$^2$ = ۰، ........ (۱)

اور ۲ لا$^2$ فرع فرما + ۲ ما$^2$ فرق فرلا + ۲ (ع لا + ق ما) فرما فرلا = ۰، ..... (۲)

(۱) سے (لا فرما + ۲ ما فرلا) (۲ لا فرما + ما فرلا) = ۰

یعنے لا$^{۲}$ ما = ا یا لا ما$^{۲}$ = ب

اگر ہم لا$^{۲}$ ما = ا لیں اور (۲) کی ہر رقم کو لا فر ما یا اِس کے معادل ۔ ۲ ما فرلا سے تقسیم کریں تو

۲ اا فرع ۔ ما فرق + ۲ ع فرلا ۔ ق فرما = ۰

یعنے ۲ ع لا ۔ ق ما = ج

اِس کو لا$^{۲}$ ما = ا کے ساتھ لینے سے درمیانی تکملہ

۲ ع لا ۔ ق ما = فہ (لا$^{۲}$ ما)، . . . . . . . . . (۳)

ملتا ہے جہاں فہ ایک اختیاری تفاعل ہے۔ (مقابلہ کرو مثال (۱) دفعہ ۱۵۲ کے ساتھ)

اسی طرح لا ما$^{۲}$ = ب اور مساوات (۲) سے

ع لا ۔ ۲ ق ما = سا (لا ما$^{۲}$)، . . . (۴)

حاصل ہوتا ہے۔

(۳) اور (۴) کو حل کرنے سے

۳ ع لا = ۲ فہ (لا$^{۲}$ ما) ۔ سا (لا ما$^{۲}$)،

۳ ق ما = فہ (لا$^{۲}$ ما) ۔ ۲ سا (لا ما$^{۲}$)

۱۸۲) اِس لیے فری = ع فرلا + ق فرما = ۱/۳ فہ (لا$^{۲}$ ما) (۲ فرلا/لا + فرما/ما)

۔ ۱/۳ سا (لا ما$^{۲}$) (فرلا/لا + ۲ فرما/ما)

یعنے ی = ۱/۳ ∫ فہ (لا$^{۲}$ ما) فرلوک (لا$^{۲}$ ما) ۔ ۱/۳ ∫ سا (لا ما$^{۲}$) فرلوک (لا ما$^{۲}$)

یا ی = فث (لا$^{۲}$ ما) + فا (لا ما$^{۲}$)

**مثال (۲)** ۔ ما$^{۲}$ ر ۔ ۲ ما س + ت = ع + ۲ ما

ر اور ت کو حسب سابق ساقط کرنے پر ہمزاد مساواتیں

ما$^{۲}$ فرما$^{۲}$ + ۲ ما فرما فرلا + فرلا$^{۲}$ = ۰، . . . . . . . . (۵)

اور $\quad$ ما فرع فرما + فرق فرلا - (ع + ٦ ما) فرما فرلا = ٠ ..... (٦)

حاصل ہوتی ہیں۔

(٥) سے (ما فرما + فرلا)$^2$ = ٠

یعنے $\quad$ ٢ لا + ما$^2$ = ا

اِس تکملہ کو استعمال کرنے اور (٦) کی ہر رقم کو ما فرما یا اِس کے مساوی۔ فرلا سے تقسیم کرنے پر حاصل ہوتا ہے

ما فرع - فرق + (ع + ٦ ما) فرما = ٠

یعنے $\quad$ ع ما - ق + ٣ ما$^2$ = ج

اِس سے درمیانی تکملہ

ع ما - ق + ٣ ما$^2$ = فہ (٢ لا + ما$^2$)

حاصل ہوتا ہے۔

اب چونکہ درمیانی تکملہ صرف ایک ہے اس لیے اس کو لگرانج کے طریقہ سے تکمل کرنا چاہیئے۔

ذیلی مساواتیں

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{ما}} = \frac{\text{فرما}}{\text{١-}} = \frac{\text{فری}}{\text{-٣ ما}^2 + \text{فہ(٢ لا + ما}^2\text{)}}$$

ہیں۔

ایک تکملہ ٢ لا + ما$^2$ = ا ہے۔ اِس کو دوسرا تکملہ معلوم کرنے میں استعمال کرنے سے

فری + {-٣ ما$^2$ + فہ (ا)} فرما = ٠

یعنے $\quad$ ی - ما$^3$ + ما فہ (٢ لا + ما$^2$) = ب

پس عام تکملہ

سا {ی - ما$^3$ + ما فہ (٢ لا + ما$^2$)، ٢ لا + ما$^2$} = ٠

ہے یا $\quad$ ی = ما$^3$ - ما فہ (٢ لا + ما$^2$) + ف (٢ لا + ما$^2$)

**مثال (٣)۔** $\quad$ ع ت - ق س = ق$^3$

ہمزاد مساواتیں

ق فرما فرلا + ع فرلا۲ = ۰ ، ............ (۷)

اور

ع فرق فرلا - ق۳ فرما فرلا = ۰ ، ........ (۸)

ہیں۔

(۷) سے فرلا = ۰ یا ق فرما + ع فرلا (= فری) = ۰

یعنی

لا = ا یا ی = ب

اگر فرلا = ۰ تو مساوات (۸) ، = ۰ میں تحویل ہوتی ہے۔
اگر ی = ب تو ق فرما = - ع فرلا اور مساوات (۸)

ع فرق + ق۲ ع فرلا = ۰

یعنی

فرق / ق۲ + فرلا = ۰

میں تحویل ہوتی ہے اور اس سے

- ۱/ق + لا = ج = سا (ی) ، ........ (۹)

(۱۸۳) (۹) کو لگرانج کے طریقہ سے تکمل کیا جا سکتا ہے لیکن ایک مختصر طریقہ یہ ہے کہ اس کو

فرما / فری = ۱/ق = لا - سا (ی)

لکھا جائے۔ اس سے حاصل ہوتا ہے

ما = لا ی - ∫ سا (ی) فری + فا (لا)

ما = لا ی + ف (ی) + فا (لا)

## حل طلب مثالیں

(۱) ر - ت جم۲ لا + ع مس لا = ۰

(۲) (لا - ما) (لا ر - لا س - ما س + ما ت) = (لا + ما) (ع - ق)

(۳) (ق + ۱) س = (ع + ۱) ت

(۴) ت ـ ر قطا^۲ ما = ۲ ق مس ما

(۵) لا ما (ت ـ ر) + (لا^۲ ـ ما^۲) (س ـ ۲) = ع ما ـ ق لا

(۶) (۱ + ق)^۲ ر ـ ۲ (۱ + ع + ق + ع ق) س + (۱ + ع)^۲ ت = ۰

(۷) وہ سطح معلوم کرو جو ۲ لا^۲ ر ـ ۵ لا ما س + ۲ ما^۲ ت

+ ۲ (ع لا + ق ما) = ۰

کو پورا کرے اور زائدی مکافی نما ی = لا^۲ ـ ما^۲ کو اُس تراش پر مس کرے جو مستوی ما = ۱ سے منقطع ہوتی ہے۔

(۸) ق^۲ ر ـ ۲ ع ق س + ع^۲ ت = ۰ کے تکملہ کو شکل

ما + لا ف (ی) = فا (ی)

میں حاصل کرو اور ثابت کرو کہ اِس سے ایک سطح تعبیر ہوتی ہے جو ایسے خطوطِ مستقیم سے تکوین پاتی ہے جو ایک ثابت مستوی کے متوازی ہیں۔

## ۱۵۵[ا] ـــ ر ر + س س + ت ت + ۶ (ر ت ـ س^۲) = و کو تکمل کرنے کا مونگے کا طریقہ۔

ر، س، ت، ۶، و حسبِ سابق ع، ق، لا، ما، ی کے تفاعل ہیں۔

حل کا عمل فطرتاً دو حصوں میں منقسم ہوتا ہے:

(۱) درمیانی تکملوں کو بنانا،

(۲) اِن تکملوں کا مزید تکمل

وضاحت کی خاطر ہم اِن دو حصوں پر جدا جدا غور کریں گے۔

## ۱۵۶ ـــ درمیانی تکملوں کو بنانا۔ حسب دفعہ ۱۵۴

ر = (فز ع ـ س فز ما) / فز لا

[ا] اِس باب کا باقی حصہ مطالعہ اول میں ترک کرنا چاہیئے۔ مونگے نے یہ خیالات آندرے میری ایمپیر (۱۷۷۵ء تا ۱۸۳۶ء) سے جس کے نام سے برقی رو کی اکائی منسوب ہے لیئے ہیں۔

اور ت = (فرق - س فرلا) ⁄ فرما

ر اور ت کی بجائے یہ جملے

ٮا ر + س س + ت ت + ۶ (ر ت - س^۲) = و

میں درج کرو اور (کسروں کو دور کرنے کے لیے) فرلا اور فرما سے ضرب دو تو حاصل ہوگا

ٮا فرع فرما + ت فرق فرلا + ۶ فرع فرق - و فرلا فرما
- س (ٮا فرما^۲ - س فرلا فرما + ت فرلا^۲
+ ۶ فرع فرلا + ۶ فرق فرما) = ۰

فرض کرو کہ ن - س م = ۰ ہے - (۱۸۴)

اب ہم ہمزاد مساواتوں

م = ۰

ن = ۰

کے حل کو حاصل کرنے کی کوشش کرتے ہیں -

ابتک ہم نے اُن طریقوں کا اتباع کیا ہے جو دفعہ ۱۵۴ میں استعمال کیے گئے تھے لیکن اب ہم م کو گذشتہ کی طرح اجزائے ضربی میں تحلیل نہیں کر سکتے جس کی وجہ رقموں ۶ فرع فرلا + ۶ فرق فرما کی موجودگی ہے -

اب چونکہ م یا ن کو علٰحدہ علٰحدہ اجزائے ضربی میں تحلیل کرنے کی کوئی اُمید نہیں ہے اس لیے فرض کرو کہ ہم م + لہ ن کو اجزائے ضربی میں تحلیل کرنے کی کوشش کرتے ہیں جہاں لہ کوئی ضارب ہے جس کو بعد میں معلوم کیا جائے گا -

م اور ن کو پوری طرح لکھنے پر وہ جملہ جس کو اجزا میں تحویل کرنا ہے

ٮا فرما^۲ + ت فرلا^۲ - (س + لہ و) فرلا فرما + ۶ فرع فرلا
+ ۶ فرق فرما + لہ ٮا فرع فرما + لہ ت فرق فرلا

+ لہ ء فرع فرق

ہے۔ چونکہ فرع¹ یا فرق¹ کی رقمیں نہیں ہیں اس لیے فرع صرف ایک جزو ضربی میں اور فرق دوسرے جزو ضربی میں واقع ہو سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ اجزائے ضربی

ا فرما + ب فرلا + ج فرع اور ع فرما + ف فرلا + گ فرق

ہیں۔

تب فرما¹، فرلا¹، فرع فرق کے سروں کو مساوی رکھنے سے

ا ع = ر، ب ف = ت، ج گ = لہ ء

ہم لے سکتے ہیں ا = ر، ع = ا، ب = ک ت، ف = $\frac{ا}{ک}$،

ج = م ء، گ = $\frac{لہ}{م}$

دوسری پانچ رقموں کے سروں کو مساوی رکھنے سے

ک ت + $\frac{ر}{ک}$ = −(س + لہ و)، ..... (۱)

$\frac{لہ ر}{م}$ = ء، .......... (۲)

$\frac{ک ت لہ}{م}$ = لہ ت، .......... (۳)

م ء = لہ ر، .......... (۴)

$\frac{م ء}{ک}$ = ء، .......... (۵)

(۵) سے م = ک اور اس سے مساوات (۳) پوری ہوتی ہے۔

+ لہ ء فرع فرق

ہے۔

چونکہ فرع^۲ یا فرق^۲ کی رقمیں نہیں ہیں اس لیے فرع صرف ایک جزو ضربی میں اور فرق دوسرے جزو ضربی میں واقع ہو سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ اجزائے ضربی

ا فرما + ب فرلا + ج فرع اور ع فرما + ف فرلا + گ فرق

ہیں۔

تب فرما^۲، فرلا^۲، فرع فرق کے سروں کو مساوی رکھنے سے

ا ع = ر، ب ف = ت، ج گ = لہ ء

ہم لے سکتے ہیں ا = ر، ع = ا، ب = ک ت، ف = ۱/ک،

ج = م ء، گ = لہ/م

دوسری پانچ رقموں کے سروں کو مساوی رکھنے سے

ک ت + ر/ک = ‎-(س + لہ و)، ..... (۱)

لہ ر/م = ء، ........... (۲)

ک ت لہ/م = لہ ت، ......... (۳)

م ء = لہ ر، ........... (۴)

م ء/ک = ء، ........... (۵)

(۵) سے م = ک اور اس سے مساوات (۳) پوری ہوتی ہے۔

اور ت = (فرق ۔ س فرلا) / فرما

ر اور ت کی بجائے یہ جملے

س ر + س س + ت ت + ع (ر ت ۔ س^۲) = و

میں درج کرو اور (کسروں کو دور کرنے کے لیے) فرلا اور فرما سے ضرب دو تو حاصل ہوگا

س فرع فرما + ت فرق فرلا + ع فرع فرق ۔ و فرلا فرما

۔ س (س فرما^۲ ۔ س فرلا فرما + ت فرلا^۲

+ ع فرع فرلا + ع فرق فرما) = ۰

فرض کرو کہ ن ۔ س م = ۰ ہے۔

اب ہم ہمزاد مساواتوں

م = ۰

ن = ۰ (۱۸۴)

کے حل کو حاصل کرنے کی کوشش کرتے ہیں۔

ابتک ہم نے اُن طریقوں کا اتباع کیا ہے جو دفعہ ۱۵۴ میں استعمال کیے گئے تھے لیکن اب ہم م کو گذشتہ کی طرح اجزائے ضربی میں تحلیل نہیں کر سکتے جس کی وجہ رقموں ع فرع فرلا + ع فرق فرما کی موجودگی ہے۔

اب چونکہ م یا ن کو علیحدہ علیحدہ اجزائے ضربی میں تحلیل کرنے کی کوئی اُمید نہیں ہے اس لیے فرض کرو کہ ہم م + لہ ن کو اجزائے ضربی میں تحلیل کرنے کی کوشش کرتے ہیں جہاں لہ کوئی ضارب ہے جس کو بعد میں معلوم کیا جائے گا۔

م اور ن کو پوری طرح لکھنے پر وہ جملہ جس کو اجزا میں تحویل کرنا ہے

س فرما^۲ + ت فرلا^۲ ۔ (س + لہ و) فرلا فرما + ع فرع فرلا

+ ع فرق فرما + لہ س فرع فرما + لہ ت فرق فرلا

+ لہ ع فرع فرق

ہے ۔

چونکہ فرع^۲ یا فرق^۲ کی رقمیں نہیں ہیں اس لیے فرع صرف ایک جزو ضربی میں اور فرق دوسرے جزو ضربی میں واقع ہو سکتے ہیں ۔

فرض کرو کہ اجزائے ضربی

ا فرما + ب فرلا + ج فرع اور ع فرما + ف فرلا + گ فرق

ہیں ۔

تب فرما^۲ ، فرلا^۲ ، فرع فرق کے سروں کو مساوی رکھنے سے

ا ع = ر ، ب ف = ت ، ج گ = لہ ع

ہم لے سکتے ہیں ا = ر ، ع = ا ، ب = ک ت ، ف = $\frac{ا}{ک}$ ،

ج = م ع ، گ = $\frac{لہ}{م}$

دوسری پانچ رقموں کے سروں کو مساوی رکھنے سے

ک ت + $\frac{ر}{ک}$ = -(س + لہ و) ، ..... (۱)

$\frac{لہ ر}{م}$ = ع ، .......... (۲)

$\frac{ک ت لہ}{م}$ = لہ ت ، .......... (۳)

م ع = لہ ر ، .......... (۴)

$\frac{م ع}{ک}$ = ع ، .......... (۵)

(۵) سے م = ک اور اس سے مساوات (۳) پوری ہوتی ہے ۔

(۲) سے یا (۴) سے م = له ر / ع

پس (۱) سے

له۲ (ر ت + ع و) + له ع س + ع۲ = ۰ ........ (۶)

اس لیے اگر (۶) کی ایک اصل له ہو تو مطلوبہ اجزائے ضربی

(ر فرما + له ر ت / ع فرلا + له ر فرع) (فرما + ع / له ر فرلا + ع / ر فرق)

یعنے ر / ع (ع فرما + له ت فرلا + له ع فرع) × ۱ / له ر (له ر فرما + ع فرلا + له ع فرق)

ہیں۔

اس لیے ہم خطی مساواتوں

ع فرما + له ت فرلا + له ع فرع = ۰ ........ (۷)

اور له ر فرما + ع فرلا + له ع فرق = ۰ ........ (۸)

سے تکملوں کو معلوم کرنے کی کوشش کریں گے جہاں له (۶) کو پورا کرتا ہے

(۱۸۵) عمل کا باقی حصہ حسب ذیل حل شدہ مثالوں سے اچھی طرح واضح ہوگا۔

## ۱۵۷۔ مثالیں

**مثال (۱)** ۲ س + (ر ت - س۲) = ۱

پچھلے دفعہ کی مساوات (۶)[له] میں ر = ت = ۰، س = ۲،

ع = و = ۱ درج کرنے سے

له۲ + ۲ له + ۱ = ۰

---

له جگہ بچانے کے لیے ہم صرف گذشتہ دفعہ کے نتیجے بیان کریں گے لیکن طالب علم کو یہ مشورہ دیا جاتا ہے کہ وہ ہر مثال کو ابتدائی اصولوں سے حل کرے۔

جو ایک دو درجی ہے جس کی اصلیں مساوی -۱ اور -۱ ہیں ۔
لہ = -۱ تو مساواتوں (۷) اور (۸) سے مساواتیں

فرما - فرع = ۰

فرلا - فرق = ۰

حاصل ہوتی ہیں جن کے تکملے صریحاً

ما - ع = مستقل

اور    لا - ق = مستقل

ہیں ۔

ان کو دفعہ ۴۵ا کے مطابق استعمال کرنے سے

درمیانی تکملہ   ما - ع = ف (لا - ق)   حاصل ہوتا ہے ۔

مثال (۲)   ر + ۳ س + ت + (رت - س۲) = ۱

لہ میں دو درجی

۲ لہ۲ + ۳ لہ + ۱ = ۰

حاصل ہوتا ہے، اس لیے لہ = -۱ یا -½

لہ = -۱ تو مساواتوں (۷) اور (۸) سے مساواتیں

فرما - فرلا - فرع = ۰،

فرما + فرلا - فرق = ۰

حاصل ہوتی ہیں جن کے تکملے صریحاً

ع + لا - ما = مستقل، .......... (۱)

اور   ق - لا + ما = مستقل، .......... (۲)

اسی طرح   لہ = -½ سے

ع + لا - ۲ ما = مستقل، .......... (۳)

اور   ق - ۲ لا + ما = مستقل، .......... (۴)

حاصل ہوتے ہیں ۔

اب دیکھنا یہ ہے کہ ان چار تکملوں کو کن جوڑوں میں لینا چاہئے ۔

پھر ان ہمزاد مساواتوں پر غور کرو جو دفعہ ما سبق میں لہ ر ت ۔ ن = ۰ سے تعبیر ہوئے ہیں ۔ اگر یہ دونوں پورے ہوں تو لہ ۔ لہ۱ ن = ۰ اور لہ + لہ۲ ن = ۰ بھی پورے ہوتے ہیں (جہاں لہ۱ اور لہ۲ لہ کے دو درجی کی اصلیں ہیں) ۔ اس لیے نئی اجزائے ضربی میں سے ایک لہ = لہ۱ کے لیے اور ایک (صریحاً دوسرا یا فرما = ۰) لہ = لہ۲ کے لیے معدوم ہوتے ہیں ۔

اس کا یہ مطلب ہے کہ ہم تکملوں (۱) اور (۴) کو اور نیز (۲) اور (۳) کو ملاتے ہیں چنانچہ اس طرح دو درمیانی تکملے

ع + لا ۔ ما = ف (ق ۔ ۲ لا + ما)

اور ع + لا ۔ ۲ ما = فا (ق ۔ لا + ما)

حاصل ہوتے ہیں ۔

(۱۸۶) **مثال (۳)** ۲ ما ر + (ع لا + ق ما) س + لا ت ۔ لا ما (ر ت ۔ س۲) = ۲ ۔ ع ق

لہ میں دو درجی

لہ۲ لا ما ع ق ۔ لہ نا ما (ع لا + ق ما) + لا۲ ما۲ = ۰

ہے جس سے لہ = ما / ع یا لا / ق

دفعہ ما سبق کی مساواتوں (۷) اور (۸) میں درج کرنے سے اور مختصر کرنے سے

ما فرع ۔ فرلا + ع فرما = ۰ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ (۵)

۲ ما فرما ۔ ع لا فرلا ۔ لا ما فرق = ۰ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ (۶)

۔ ق ما فرما + لا فرلا ۔ لا ما فرع = ۰ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ (۷)

اور ۔ ۲ فرما + ق فرلا + لا فرق = ۰ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ (۸)

(۵) اور (۸) کے واضح تکملوں کو ملانے سے

ما ع ۔ لا = ف (۔ ۱ ما + ق لا)

لیکن (۶) اور (۷) غیر تکمل پذیر ہیں کیونکہ ان میں ع اور ق اس طرح واقع ہیں کہ تکمل نہیں کیا جا سکتا۔ اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ اگرچہ لہ کی دو اصلیں مختلف ہیں لیکن صرف ایک درمیانی تکملہ حاصل ہوتا ہے۔

## حل طلب مثالیں

حسب ذیل مساواتوں کا ایک درمیانی تکملہ (یا دو اگر ممکن ہو) معلوم کرو۔

(۱) ۳ ر + ۴ س + ت + (رت - س$^2$) = ۱

(۲) ر + ت - (رت - س$^2$) = ۱

(۳) ۲ ر + ت و$^{لا}$ - (رت - س$^2$) = ۲ و$^{لا}$

(۴) رت - س$^2$ + ۱ = ۰

(۵) ۳ س + (رت - س$^2$) = ۲

(۶) ق لا ر + (لا + ما) س + ع ما ت + لا ما (رت - س$^2$) = ۱ - ع ق

(۷) (ق$^2$ - ۱) ی ر - ۲ ع ق ی س + (ع$^2$ - ۱) ی ت + ی$^2$ (رت - س$^2$) = ع$^2$ + ق$^2$ - ۱

## ۱۵۸ — درمیانی تکملوں کا مزید تکمل۔

مثال (۱) دفعہ ۱۵۷ مثال (۱) میں حاصل شدہ درمیانی تکملہ

ما - ع = ف (لا - ق)

پر غور کرو۔

ہم لا - ق = ا

اور ما - ع = ف (ا) = ب، فرض کرو

رکھ کر ایک ”کامل“ تکملہ کو حاصل کر سکتے ہیں جس میں ا، ب، ج اختیاری مستقل ہونگے۔

پس فری = ع فرلا + ق فرما = (ما - ب) فرلا + (لا - ا) فرما

اور ی = لاما - ب لا - ا ما + ج

عام ترشکل کا ایک تکملہ یہ فرض کر کے حاصل کیا جا سکتا ہے کہ اختیاری تفاعل ف جو درمیانی تکملہ میں واقع ہے خطی ہے، چنانچہ

ما - ع = م (لا - ق) + ن

اس کو لگرانج کے طریقہ سے تکمل کرنے پر

ی = لاما + فہ (ما + م لا) - ن لا

**مثال (۲)** دفعہ ۱۵۷ مثال (۲) کے دو درمیانی تکملوں

ع + لا - ما = ف (ق - ۲ لا + ما)

اور ع + لا - ۲ ما = فا (ق - لا + ما)

پر غور کرو۔

(۱۸۷) اگر ہم ان ہمزاد مساواتوں کو اسی طرح استعمال کریں جس طرح ہم نے مثال (۱) کی واحد مساوات کو کیا ہے تو

ق - ۲ لا + ما = عہ،

ق - لا + ما = بہ،

ع + لا - ما = ف (عہ)،

ع + لا - ۲ ما = فا (بہ)

اگر بائیں جانب کی رقمیں مستقل ہیں تو یہ لغو نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ لا، ما، ع، ق سب مستقل ہیں۔

لیکن اب فرض کرو کہ عہ اور بہ مستقل نہیں ہیں بلکہ مبدل اور تغیر پذیر ہیں۔

ان چار مساواتوں کو حل کرنے سے

لا = بہ - عہ،

ما = ف (عہ) - فا (بہ)،

ع = ما - لا + ف (عہ)،

ق = لا - ما + بہ

جن سے   فری = ع فرلا + ق فرما

= (ما - لا) (فرلا - فرما) + ف (عہ) فرلا + بہ فرما

= - ½ فر (لا - ما)² + ف (عہ) فربہ - ف (عہ) فرعہ

+ بہ فَ (عہ) فرعہ - بہ فَا (بہ) فربہ

یعنے   ی = - ½ (لا - ما)² - ∫ف (عہ) فرعہ - ∫ بہ فَا (بہ) فربہ + بہ ف (عہ)

وہ نتیجہ جو تکملوں کی علامتوں سے پاک ہو حاصل کرنے کے لیے رکھو

∫ف (عہ) فرعہ = فہ (عہ) اور ∫ فا (بہ) فربہ = سا (بہ)

تو   ∫ بہ فَا (بہ) فربہ = بہ فا (بہ) - ∫ فا (بہ) فربہ، تکمل بالحصص سے

= بہ سَا (بہ) - سا (بہ)

پس   ی = - ½ (لا - ما)² - فہ (عہ) - بہ سَا (بہ) + سا (بہ) + بہ فَہ (عہ)

یا بالآخر   ی = - ½ (لا - ما)² - فہ (عہ) + سا (بہ) + بہ ما،

لا = بہ - عہ،

ما = فَہ (عہ) - سَا (بہ)

اِن تین مساواتوں سے ایک سطح کی مساوات کی مبدلی شکل حاصل ہوتی ہے۔ چونکہ حل میں دو اختیاری مستقل شریک ہیں اس لیے اس کو عام سے عام ممکن شکل سمجھا جا سکتا ہے۔

# حل طلب مثالیں

مصرحۂ بالا طریقوں سے تکمل کرو:

(۱) ع + لا - ۲ ما = ف (ق - ۲ لا + ۳ ما)،

(٢) ع - لا = ف (ق - ما) (٣) ع - ﻮ$^{لا}$ = ف (ق - ٢ ما)

(٤) ع - ما = ف (ق + لا)، (٥) ع - ما = ف (ق - ٢ لا)

ع + ١ = فا (ق - لا) ع - ٢ ما = فا (ق - لا)

(٦) ع لا - ما = ف (ق ما - لا) (؎) (ی ع - لا) = ف (ی ق - ما)

(٨) (٤) کا ایک خاص حل، فہ (عہ) = - $\frac{١}{٢}$ عہ$^{٢}$ ، سا (بہ) = $\frac{١}{٢}$ بہ$^{٢}$ رکھ کر اور عہ اور بہ کو ساقط کر کے حاصل کرو۔

# چودہویں باب پر متفرق مثالیں

(١٨٨) (١) ر = ٢ ما$^{٢}$ (٢) لوک س = لا + ما (٣) ٢ ما ق + ما$^{٢}$ ت = ١

(٤) ر - ٢ س + ت = جب (٢ لا + ٣ ما)

(٥) لا$^{٢}$ ر - ٢ لا س + ت + ق = ٠

(٦) ر لا$^{٢}$ - ٣ س لا ما + ٢ ت ما$^{٢}$ + ر لا + ٢ ق ما = لا + ٢ ما

(٧) ما$^{٢}$ ر + ٢ لا ما س + لا$^{٢}$ ت + ثا لا + ق ما = ٠

(٨) ٥ ر + ٦ س + ٣ ت + ٢ (ر ت - س$^{٢}$) + ٣ = ٠

(٩) ٢ ع ر + ٢ ق ت - ٤ ع ق (ر ت - س$^{٢}$) = ١

(١٠) ر ت - س$^{٢}$ - س (جب لا + جب ما) = جب لا جب ما

(١١) ٧ ر - ٨ س - ٣ ت + (ر ت - س$^{٢}$) = ٣٦

(١٢) وہ سطح معلوم کرو جو ر = ٦ لا + ٢ کو پورا کرے اور ی = لا$^{٣}$ + ما$^{٣}$ کو اس کی اُس تراش پر مس کرے جو مستوی لا + ما + ١ = ٠ سے منقطع ہوتی ہے۔

(١٣) وہ سطح معلوم کرو جو ر - ٢ س + ت = ٦ کو پورا کرے اور زائدی مکافی نما ی = لا ما کو اس کی اُس تراش پر مس کرے جو مستوی ما = لا سے منقطع ہوتی ہے۔

(۱۴) ایک سطح کھینچی گئی ہے جو ر + ت = ۰ کو پورا کرتی ہے اور لا^۲ + ی^۲ = ا کو اس کی اُس تراش پر مس کرتی ہے جو مستوی ما = ۰ سے منقطع ہوتی ہے - اس کی مساوات کو شکل

ی^۲ (لا^۲ + ی^۲ - ۱) = ما^۲ (لا^۲ + ی^۲)

میں حاصل کرو -  [لندن]

(۱۵) ثابت کرو کہ مساوات

۲ ر + ق س + لا ت - لا (ر ت - س^۲) = ۲

پر مونگے کے طریقہ کو استعمال کرنے سے لا، ما، ع، ق میں جو چار خطی تفرقی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں اُن میں سے دو تکمل پذیر ہیں جن سے درمیانی تکملہ

ع - لا = ف (ق لا - ۲ ما)

حاصل ہوتا ہے اور دوسری دو اگرچہ جداگانہ غیر تکمل پذیر ہیں لیکن تکملہ

ع + ۱/۴ ق^۲ - لا = ا

کو حاصل کرنے میں ملائی جا سکتی ہیں -

پس حل

ی = ۱/۲ لا^۲ - ۲ م [illegible] ما - ۲/۳ م^۲ لا^۳ + [illegible] ا + ف (ما + ۱/۲ م لا^۲)

اور  ی = [illegible] - ۱/۴ ب^۲) لا + ۱/۲ لا^۲ + ب ما + ج

حاصل کرو اور ثابت کرو کہ ان میں سے ایک، دوسرے کی مخصوص صورت ہے -

(۱۶) ایک سطح ایسی ہے کہ لا = ۰ کے متوازی کسی مستوی سے اس کی تراش ایک دائرہ ہے جو محور لا میں سے گذرتا ہے - ثابت کرو کہ وہ حسب ذیل تفاعلی اور تفرقی مساواتوں کو پورا کرتی ہے:

ما^۲ + ی^۲ + ما ف (لا) + ی فا (لا) = ۰،

(۱۴) ایک سطح کھینچی گئی ہے جو ر + ت = ۰ کو پورا کرتی ہے اور لا² + ی² = ۱ کو اس کی اس تراش پر مس کرتی ہے جو مستوی ما = ۰ سے منقطع ہوتی ہے - اس کی مساوات کو شکل

$$\text{ی}^2(\text{لا}^2+\text{ی}^2-1)=\text{ما}^2(\text{لا}^2+\text{ی}^2)$$

میں حاصل کرو۔ [لندن]

(۱۵) ثابت کرو کہ مساوات

$$2\,\text{ر}+\text{ق}\,\text{س}+\text{لا}\,\text{ت}-\text{لا}\,(\text{ر}\,\text{ت}-\text{س}^2)=2$$

پر مونگے کے طریقہ کو استعمال کرنے سے لا، ما، ع، ق میں جو چار خطی تفرقی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں ان میں سے دو تکمل پذیر ہیں جن سے درمیانی تکملہ

$$\text{ع}-\text{لا}=\text{ف}\,(\text{ق}\,\text{لا}-2\,\text{ما})$$

حاصل ہوتا ہے اور دوسری دو اگرچہ جداگانہ غیر تکمل پذیر ہیں لیکن تکملہ

$$\text{ع}+\frac{1}{4}\,\text{ق}^2-\text{لا}=\text{ل}$$

کو حاصل کرنے میں ملائی جا سکتی ہیں -

پس حل

$$\text{ی}=\frac{1}{2}\,\text{لا}^2-2\,\text{م}\,\text{لا}\,\text{ما}-\frac{2}{3}\,\text{م}^2\,\text{لا}^3+\text{[illegible]}+\text{ف}\left(\text{ما}+\frac{1}{2}\,\text{م}\,\text{لا}^2\right)$$

اور $$\text{ی}=\left(\text{ل}-\frac{1}{4}\,\text{ب}^2\right)\text{لا}+\frac{1}{2}\,\text{لا}^2+\text{ب}\,\text{ما}+\text{ج}$$

حاصل کرو اور ثابت کرو کہ ان میں سے ایک، دوسرے کی مخصوص صورت ہے -

(۱۶) ایک سطح ایسی ہے کہ لا = ۰ کے متوازی کسی مستوی سے اس کی تراش ایک دائرہ ہے جو محور لا میں سے گذرتا ہے - ثابت کرو کہ وہ حسب ذیل تفاعلی اور تفرقی مساواتوں کو پورا کرتی ہے:

$$\text{ما}^2+\text{ی}^2+\text{ما}\,\text{ف}(\text{لا})+\text{ی}\,\text{فا}(\text{لا})=0\text{،}$$

(۲) ع - لا = ف (ق - ما) (۳) ع - فو$^{لا}$ = ف (ق - ۲ ما)

(۴) ع - ما = ف (ق + لا)، (۵) ع - ما = ف (ق - ۲ لا)

ع + ما = فا (ق - لا) ع - ۲ ما = فا (ق - لا)

(۶) ع لا - ما = ف (ق ما - لا) (۷) (ی ع - لا) = ف (ی ق - ما)

(۸) (۴) کا ایک خاص حل، فہ (عہ) = - $\frac{۱}{۲}$ عہ$^{۲}$، سا (بہ) = $\frac{۱}{۲}$ بہ$^{۲}$ رکھ کر اور عہ اور بہ کو ساقط کر کے حاصل کرو۔

# چودہویں باب پر متفرق مثالیں

(۱۸۸)

(۱) ر = ۲ ما$^{۲}$ (۲) لوگ س = لا + ما (۳) ۲ ماق + ما$^{۲}$ت = ۱

(۴) ر - ۲ س + ت = جب (۲ لا + ۳ ما)

(۵) لا$^{۲}$ ر - ۲ لا س + ت + ق = ۰

(۶) ر لا$^{۲}$ - ۳ س لا ما + ۲ ت ما$^{۲}$ + ع لا + ۲ ق ما = لا + ۲ ما

(۷) ما$^{۲}$ ر + ۲ لا ما س + لا$^{۲}$ ت + ع لا + ق ما = ۰

(۸) ۵ ر + ۶ س + ۳ ت + ۲ (ر ت - س$^{۲}$) + ۳ = ۰

(۹) ۲ ع ر + ۲ ق ت - ۴ ع ق (ر ت - س$^{۲}$) = ۱

(۱۰) ر ت - س$^{۲}$ - س (جب لا + جب ما) = جب لا جب ما

(۱۱) ۷ ر - ۸ س - ۳ ت + (ر ت - س$^{۲}$) = ۳۶

(۱۲) وہ سطح معلوم کرو جو ر = ۶ لا + ۲ کو پورا کرے اور ی = لا$^{۳}$ + ما$^{۳}$ کو اس کی اُس تراش پر مس کرے جو مستوی لا + ما + ۱ = ۰ سے منقطع ہوتی ہے۔

(۱۳) وہ سطح معلوم کرو جو ر - ۲ س + ت = ۶ کو پورا کرے اور زائدی مکافی نما ی = لا ما کو اس کی اُس تراش پر مس کرے جو مستوی ما = لا سے منقطع ہوتی ہے۔

(۱۴) ایک سطح کھینچی گئی ہے جو ر + ت = ۰ کو پورا کرتی ہے اور $\text{لا}^2 + \text{ی}^2 = 1$ کو اس کی اس تراش پر مس کرتی ہے جو مستوی ما = ۰ سے منقطع ہوتی ہے - اس کی مساوات کو شکل

$$\text{ی}^2(\text{لا}^2 + \text{ی}^2 - 1) = \text{ما}^2(\text{لا}^2 + \text{ی}^2)$$

میں حاصل کرو - [لندن]

(۱۵) ثابت کرو کہ مساوات

$$2\text{ر} + \text{ق}\,\text{س} + \text{لا}\,\text{ت} - \text{لا}(\text{ر}\,\text{ت} - \text{س}^2) = 2$$

پر مونگے کے طریقہ کو استعمال کرنے سے لا، ما، ع، ق میں جو چار خطی تفرقی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں ان میں سے دو تکمل پذیر ہیں جن سے درمیانی تکملہ

$$\text{ع} - \text{لا} = \text{ف}(\text{ق}\,\text{لا} - 2\,\text{ما})$$

حاصل ہوتا ہے اور دوسری دو اگرچہ جداگانہ غیر تکمل پذیر ہیں لیکن تکملہ

$$\text{ع} + \tfrac{1}{4}\text{ق}^2 - \text{لا} = \text{ل}$$

کو حاصل کرنے میں ملائی جا سکتی ہیں -

پس حل

$$\text{ی} = \tfrac{1}{2}\text{لا}^2 - 2\,\text{م}\,\text{لا}\,\text{ما} - \tfrac{2}{3}\text{م}^2\text{لا}^3 + \text{ن}\,\text{لا} + \text{ف}(\text{ما} + \tfrac{1}{2}\text{م}\,\text{لا}^2)$$

اور

$$\text{ی} = (\text{ل} - \tfrac{1}{4}\text{ب}^2)\,\text{لا} + \tfrac{1}{2}\text{لا}^2 + \text{ب}\,\text{ما} + \text{ج}$$

حاصل کرو اور ثابت کرو کہ ان میں سے ایک، دوسرے کی مخصوص صورت ہے -

(۱۶) ایک سطح ایسی ہے کہ لا = ۰ کے متوازی کسی مستوی سے اس کی تراش ایک دائرہ ہے جو محور لا میں سے گذرتا ہے - ثابت کرو کہ وہ حسب ذیل تفاعلی اور تفرقی مساواتوں کو پورا کرتی ہے:

$$\text{ما}^2 + \text{ی}^2 + \text{ما}\,\text{ف}(\text{لا}) + \text{ی}\,\text{فا}(\text{لا}) = 0،$$

( ما۲ + ی۲ ) ت + ۲ ( ی - ما ق ) ( ۱ + ق۲ ) = ۰

(۱۷) لا۲ ر + ۲ لا ما س + ما۲ ت = ۰ کے حل کو شکل

ی = ف ( ما / لا ) + لا فا ( ما / لا )

میں حاصل کرو۔ ثابت کرو کہ یہ مساوات ایک سطح کو تعبیر کرتی ہے جس کی تکوین اُن خطوں سے جو محور ی کو قطع کرتے ہیں ہوتی ہے۔

(۱۸) ثابت کرو کہ ر ت - س۲ = ۰ سے "کامل" تکملہ

ی = ا لا + ب ما + ج

حاصل ہوتا ہے۔

(۱۸۹) ثابت کرو کہ وہ "عام" تکملہ جو اس سے ماخوذ ہوتا ہے (حسب دفعہ ۱۳۴) ایک کشادپذیر سطح کو تعبیر کرتا ہے (دیکھو اسمتھ کی رسالہ جیومیٹری دفعات ۲۲۲-۲۲۳)۔

اس سے ثابت کرو کہ ہر کشادپذیر سطح کے لئے ق = ف ( ع )

(۱۹) وہ کشادپذیر سطح معلوم کرو جو

ع ق ( ر - ت ) - ( ع۲ - ق۲ ) س + ( ع ما - ق لا ) ( ر ت - س۲ ) = ۰

کو پورا کرے۔

[ فرض کرو ق = ف ( ع ) - اس کو پوائسن کا طریقہ کہتے ہیں - نیز حاصل ہوگا

ق = ا ع یا ع۲ + ق۲ = ب۲

جن سے ی = ف ( لا + ا ما ) یا ی = ب لا جب ع + ب ما جب ع + ج

ان میں سے دوسرا تکملہ ایک مستوی کو تعبیر کرتا ہے جس سے وہ کشادپذیر سطح تکوین پاتی ہے جو متناظر "عام" تکملہ سے حاصل ہوتی ہے۔]

(۲۰) اگر لا = ع ما = ق ، ے = ع لا + ق ما - ی

تو ثابت کرو کہ

ر = $\frac{ت}{ر ت - س^۲}$ ، س = $\frac{-س}{ر ت - س^۲}$ ، ت = $\frac{ر}{ر ت - س^۲}$

جہاں ر = $\frac{جف^۲ ے}{جف لا^۲}$ وغیرہ ۔

پس ثابت کرو کہ مساوات

ا ر + ب س + ج ت + خ (ر ت - س^۲) = ۰

مساوات ا ت - ب س + ج ر + خ = ۰

میں تحویل ہوتی ہے جہاں لا ، ما ، ع ، ق کے کوئی تفاعل ا ، ب ، ج ، خ ہیں اور ع ، ق ، لا ، ما کے متناظر تفاعل ا ، ب ، ج ، خ ہیں ۔

تنویت کا اصول (دیکھو بارہویں باب کے ختم پر متفرق مثالوں میں ۲۱) حسب ذیل مساوات کے دو درمیانی تکملوں کو اخذ کرنے میں استعمال کرو :

ع ق (ر - ت) - (ع^۲ - ق^۲) س + (ع ما - ق لا) (ر ت - س^۲) = ۰

(۲۱) ثابت کرو کہ اگر لا ، ما ، ے ، و حقیقی ہوں اور ے + خ و = ف (لا + خ ما) تو و = ے اور و = ے دونوں مساوات

$\frac{جف^۲ و}{جف لا^۲}$ + $\frac{جف^۲ و}{جف ما^۲}$ = ۰

کے حل ہیں اور منحنیوں ے = مستقل
و = مستقل

کے دو نظام باہم علی القوائم ہیں ۔

مخصوص صورتوں

(۱) ے + خ و = لا + خ ما

(۲) ے + خ و = (لا + خ ما)^۲

(۳) ے + خ و = $\frac{۱}{لا + خ ما}$

میں ان خواص کی تصدیق کرو۔

[ یہ تفرقی مساوات لاپلاس کی مساوات کی دو بعدی شکل ہے جو تجاذب، برقی سکونیات، اور ما حرکیات میں بنیادی اہمیت رکھتی ہے۔ ع اور و کو مزدوج تفاعل کہتے ہیں۔ دیکھو ریمزے کی کتاب "ہیڈرو میکانکس" جلد دوم دفعہ ۴۱ ] ۔

۲۲ — $$\frac{جف^2 ما}{جف ت^2} = ا^2 \frac{جف^2 ما}{جف لا^2}$$

(۱۹۰) کا حل شکل

$$ما = \frac{1}{2} ف(لا + ا ت) + \frac{1}{2} ف(لا - ا ت) + \frac{1}{2ا} \int_{لا - ا ت}^{لا + ا ت} فا(لہ) قرلہ$$

میں حاصل کرو اگر ما = ف(لا) اور $\frac{جف ما}{جف ت}$ = فا(لا) جبکہ ت = ۰ ۔

[ لا متناہی طول کی ایک مرتعش ڈوری کے کسی نقطہ لا کا عرضی ہٹاؤ ما ہے جبکہ ڈوری کا ابتدائی ہٹاؤ ف(لا) اور رفتار فا(لا) ہو۔ دیکھو ریمزے کی ہیڈرو میکانکس جلد دوم دفعہ ۲۴۸ ]

(۲۳) اگر $$\frac{جف^2 ما}{جف ت^2} + ا^4 \frac{جف^4 ما}{جف لا^4} = ۰$$

کا ایک حل ما = ف(لا) جم (ن ت + عہ) ہو تو ثابت کرو کہ

$$ف(لا) = ا جب م لا + ب جم م لا + ھ جبز م لا + گ جمز م لا$$

جہاں $$م = \sqrt{\frac{ن}{ا^2}}$$

[یہ تفرقی مساوات وہ ہے جو ڈنڈوں کے جانبی ارتعاشوں سے تقریباً پوری ہوتی ہے جبکہ گردشی جمود کو نظر انداز کیا گیا ہو۔ دیکھو ریالے کی کتاب "ساونڈ" دفعہ ۱۶۳]

(۲۴) ثابت کرو کہ

$$\text{ط} = \text{ا}\ \text{جب}\frac{\text{م}\,\pi\,\text{لا}}{\text{ل}}\ \text{جب}\frac{\text{ن}\,\pi\,\text{ما}}{\text{ب}}\ \text{جم}(\text{ع}\,\text{ج}\,\text{ت}+\text{عـ})$$

سے مساوات

$$\frac{\text{جف}^2\,\text{ط}}{\text{جف}\,\text{ت}^2} = \text{ج}^2\left(\frac{\text{جف}^2\,\text{ط}}{\text{جف}\,\text{لا}^2} + \frac{\text{جف}^2\,\text{ط}}{\text{جف}\,\text{ما}^2}\right)$$

پوری ہوتی ہے اور ط معدوم ہوتا ہے جبکہ

$$\text{لا} = ۰،\quad \text{ما} = ۰،\quad \text{لا} = \text{ل}\ \text{یا}\ \text{ما} = \text{ب}$$

بشرطیکہ م اور ن صحیح عدد ہوں جو

$$\left(\frac{\text{ع}}{\pi}\right)^2 = \left(\frac{\text{م}}{\text{ل}}\right)^2 + \left(\frac{\text{ن}}{\text{ب}}\right)^2$$

کو پورا کریں۔

[اس سے ایک مرتعش جھلی کی تفرقی مساوات کا ایک حل حاصل ہوتا ہے جبکہ جھلی کا احاطہ ایک ثابت مستطیل ہو۔ دیکھو ریالے کی کتاب "ساونڈ" دفعہ ۱۹۴ تا ۱۹۹]

(۲۵) ثابت کرو کہ

$$\text{ط} = \text{ا}\ \text{جے}(\text{ن}\,\text{ر})\ \text{جم}(\text{ن}\,\text{ج}\,\text{ت}+\text{عـ})$$

سے مساوات

$$\frac{\text{جف}^2\,\text{ط}}{\text{جف}\,\text{ت}^2} = \text{ج}^2\left(\frac{\text{جف}^2\,\text{ط}}{\text{جف}\,\text{ر}^2} + \frac{۱}{\text{ر}}\,\frac{\text{جف}\,\text{ط}}{\text{جف}\,\text{ر}}\right)$$

پوری ہوتی ہے جہاں جے، رتبہ صفر کا بیسل کا تفاعل ہے [دیکھو دفعہ ۹۷ کے آخر مثال (۲)]

[ اس سے ایک مرتعش جھلی کی تفرقی مساوات کا حل حاصل ہوتا ہے جبکہ جھلی کا احاطہ ایک ثابت دائرہ ہو۔ دیکھو ریالے کی کتاب "ساونڈ" دفعہ ۲۰۰ تا ۲۰۶ ]

(۲۶) ثابت کرو کہ

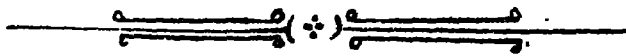
$$و = (ا رⁿ + ب ر^{-ن-۱}) ع_ن (جم ط)$$

سے مساوات

$$\frac{جف^۲ و}{جف ر^۲} + \frac{۲}{ر} \frac{جف و}{جف ر} + \frac{۱}{ر^۲} \frac{جف^۲ و}{جف ط^۲} + \frac{مم ط}{ر^۲} \frac{جف و}{جف ط} = ۰$$

پوری ہوتی ہے جہاں $ع_ن$ رتبہ ن کا لیجنڈر کا تفاعل ہے [ لیجنڈر کی مساوات کے لیے دیکھو مثال ۲ دفعہ ۹۹ کے ختم پر ]

[ **نوٹ**: ۶ = جم ط کو ایک نئے متغیر کے طور پر لو۔ یہ مساوات وہ شکل ہے جو لاپلاس کی قوہ مساوات (تین ابعاد میں) اختیار کرتی ہے جبکہ یہ معلوم ہو کہ و ایک محور کے گرد متشاکل ہے۔ دیکھو راوتھ کی کتاب "اینالیٹیکل اسٹاٹکس" جلد دوم دفعہ ۳۰۰ ]

(۱۹۱)

# پندرھواں باب

## متفرق طریقے

**۱۵۹** — یہ باب چھ حصوں پر مشتمل ہے۔ پہلا حصہ (دفعات ۱۶۰، ۱۶۱) چھٹے باب کا تکملہ ہے۔ اس میں اُن مشکلوں سے بحث کی گئی ہے جو نادر حلوں کے نظریہ میں پیش ہوتی ہیں، نیز لفاف کی تعریف پر غور کیا گیا ہے اور جس طریقہ پر ضمیروں میں مخصوص حل وقوع پذیر ہو سکتے ہیں اس کی وضاحت کی گئی ہے۔

دوسرے حصہ (دفعات ۱۶۲ تا ۱۶۷) میں ریکیٹی (Riccati) کی مساوات پر، خاص کر اس کی عام شکل میں، بحث کی گئی ہے۔ مثالوں میں ایک سلسلہ ملے گا جس سے یہ معلوم ہوگا کہ کن صورتوں میں ریکیٹی کی اصلی مساوات محدود رقموں میں تکمل کی جا سکتی ہے۔

تیسرے حصہ (۱۶۸ تا ۱۷۰) میں تفرقی مساواتوں پر بہ حیثیت مجموعی بحث کی گئی ہے چنانچہ وہ گیارہویں باب کا تکملہ ہے۔ متجانس مساواتوں کے لیے مشکل جزو ضربی کا استعمال مبتدی کو دلچسپ نظر آئے گا لیکن میئر کا طریقہ نظریہ کے لحاظ سے بہت دلچسپ ہے۔

چوتھے حصے (دفعات ۱۷۱ تا ۱۷۷) میں دوسرے رتبہ کی تفرقی مساواتوں سے بحث کی گئی ہے اور ان کا حل ایک سلسلہ میں معلوم کیا گیا ہے۔ یہ نویں اور دسویں باب کا تکملہ ہے۔ دوسے

اعلیٰ رتبوں کی تفرقی مساواتوں کے چند نتیجے بھی شامل کئے گئے ہیں۔
پانچویں حصہ (۱۷۰ تا ۱۸۱) میں ریاضیاتی طبیعات کی چند مساواتوں سے خاص کر وہ جو حرکت امواج سے متعلق ہیں بحث کی گئی ہے۔ یہ چوتھے اور چودھویں بابوں کا تکملہ ہے۔
بالآخر چھٹے حصہ (۱۸۲ تا ۱۸۳) میں تفرقی مساواتوں کے حل کے عددی تقریبوں پر بحث کی گئی ہے۔ یہ آٹھویں باب کا تکملہ ہے۔ آڈمس کا طریقہ بیان کر دینے کے بعد جو تا حال بہترین طریقہ سمجھا جاتا ہے مصنف کے طریقہ کی چند توسیعات (ای۔ ایمس سے منسوبہ) کا خلاصہ درج ہے۔

## ۱۶۰ — نادر حلوں کے نظریہ میں بعض مشکلیں۔[1] (۱۹۲)

اب ہم چھٹے باب کی تکمیل 'لفاف' 'نادر حل' اور خاص تکملوں سے متعلق بعض مشکلوں کا ذکر کر کے کریں گے۔
منحنیوں کے کسی قبیل کے لفاف کی پرانی تعریف یہ ہے کہ **وہ متصلہ منحنیوں کے انتہائی نقاطِ تقاطع کا طریق ہوتا ہے**' یہ تعریف چھوڑ دینی پڑے گی کیونکہ اس کی رو سے یہ مضحکہ خیز نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ ایک منحنی اپنے انحناء کے دائروں کا لفاف نہیں ہوتا[2] پوائسن نے لفاف کی یہ تعریف کی ہے کہ وہ

---

[1] لفافوں کے لیے دیکھو فولر کی "Elementary Differential Geometry of Plane Cures" پانچواں باب۔ نادر حلوں کے لیے دیکھو The Encyklopadie der Mathematischen Wissenschaften II. A 4 and III D8

[2] ایک منحنی کے دو متصلہ نقطوں ف اور فَ کے متناظر مرکز انحناء ج اور جَ اس منحنی کے برپیچہ پر واقع ہوتے ہیں۔ نصف قطر انحناء ج ف اور جَ فَ کے درمیان فرق برپیچہ کی قوس ج جَ ہے۔ یہ قوس بالعموم وتر ج جَ سے بڑی ہوتی ہے یعنے اس فاصلہ سے بڑی

(بقیہ دیکھو آئندہ صفحہ پر)

منفرد ممیز نقطوں کا طریق ہوتا ہے (یعنے ایک منحنی کے ان معمولی نقطوں کا جن کے فاصلے متصلہ منحنیوں سے پہلے رتبہ سے زیادہ چھوٹے ہوں)۔ لیکن ہم دیکھ چکے ہیں کہ بعض صورتوں میں یہ تعریف بھی اطمینان بخش نہیں[1]۔ ہمارے مقاصد کے لیے سب سے زیادہ سہولت بخش تعریف غالباً یہ ہے کہ لفاف ایک منحنی ہے جو قبیل کے ہر رکن کو مس کرتا ہے اور جو اپنے ہر نقطہ پر قبیل کے کسی نہ کسی رکن سے مس ہوتا ہے۔ یہ اُس تعریف سے مختلف ہے جو صفحہ ۱۲۶ پر دی جا چکی ہے لیکن وہاں اس تعریف کا دوسرا حصہ صریحاً بیان نہیں کیا گیا تھا لیکن بعد والے جملہ میں یہ بات مضمر تھی۔

نادر حل کی کم سے کم تین مختلف تعریفیں ہیں۔ ہماری تعریف (صفحہ ۱۲۶) یہ ہے کہ یہ وہ حل ہے جو کامل ابتدائی سے تعبیر شدہ منحنیوں کے قبیل کے لفافے سے متناظر حال

(بقیہ صفحہ گذشتہ) جو انحناء کے مرکزوں کے درمیان ہے۔ اس طرح ایک دائرہ انحناء دوسرے دائرہ انحناء کے گرد ہوتا ہے اور ان میں حقیقی نقاط تقاطع حاصل نہیں ہوتے۔ دوسری صورتیں جہاں یہ تعریف ناکام رہتی ہے مثال ۱۳ دفعہ ۱۲۱ میں ملیں گی۔

[1] دیکھو Neville, *Proc Camb. Phil. Soc* Vol xxi. P. 97, 1922.

[2] یہ وہ تعریف ہے جو اعلیٰ معیار کے مقالوں میں اختیار کی جاتی ہے (دیکھو Ince's *Ordinary Differential Equations*

بقیہ دیکھو صفحہ آئندہ

اعلیٰ رتبوں کی تفرقی مساواتوں کے چند نتیجے بھی شامل کئے گئے ہیں۔
پانچویں حصہ (۱۷۸ تا ۱۸۱) میں ریاضیاتی طبیعات کی چند مساواتوں سے خاص کر وہ جو حرکت امواج سے متعلق ہیں بحث کی گئی ہے۔ یہ چوتھے اور چودھویں بابوں کا تکملہ ہے۔
بالآخر چھٹے حصہ (۱۸۲ تا ۱۸۳) میں تفرقی مساواتوں کے حل کے عددی تقریبوں پر بحث کی گئی ہے۔ یہ آٹھویں باب کا تکملہ ہے۔ آڈمس کا طریقہ بیان کر دینے کے بعد جو تا حال بہترین طریقہ سمجھا جاتا ہے مصنف کے طریقہ کی چند توسیعات (ای۔ ایمس سے منسوبہ) کا خلاصہ درج ہے۔

## (۱۹۲) ۱۶۰ — نادر حلوں کے نظریہ میں بعض مشکلیں۔[1]

اب ہم چھٹے باب کی تکمیل 'لفاف' 'نادر حل' اور خاص تکملوں سے متعلق بعض مشکلوں کا ذکر کر کے کریں گے۔
منحنیوں کے کسی قبیل کے لفاف کی پرانی تعریف یہ ہے کہ 'وہ متصلہ منحنیوں کے انتہائی نقاطِ تقاطع کا طریق ہوتا ہے' یہ تعریف چھوڑ دینی پڑے گی کیونکہ اس کی رو سے یہ مضحک نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ ایک منحنی اپنے انحناء کے دائروں کا لفاف نہیں ہوتا[2] پوائسن نے لفاف کی یہ تعریف کی ہے کہ وہ

---

[1] لفافوں کے لیے دیکھو فولر کی "Elementary Differential Geometry of Plane Cures" پانچواں باب۔ نادر حلوں کے لیے دیکھو
The Encyklopadie der Mathematischen Wissenschaften II. A 4 and III D8

[2] ایک منحنی کے دو متصلہ نقطوں ف اور فَ کے متناظر مرکز انحناء ج اور جَ اس منحنی کے برپیچہ پر واقع ہوتے ہیں۔ نصف قطر انحناء ج ف اور جَ فَ کے درمیان فرق برپیچہ کی قوس ج جَ ہے۔ یہ قوس بالعموم وتر ج جَ سے بڑی ہوتی ہے یعنی اس فاصلہ سے بڑی
(بقیہ دیکھو آئندہ صفحہ پر)

منفرد ممیز نقطوں کا طریق ہوتا ہے (یعنے ایک منحنی کے اُن معمولی نقطوں کا جن کے فاصلے متصلہ منحنیوں سے پہلے رتبہ سے زیادہ چھوٹے ہوں)۔ لیکن ہم دیکھ چکے ہیں کہ بعض صورتوں میں یہ تعریف بھی اطمینان بخش نہیں ہے[1]۔ ہمارے مقاصد کے لیے سب سے زیادہ سہولت بخش تعریف غالباً یہ ہے کہ لفافہ ایک منحنی ہے جو قبیل کے ہر رکن کو مس کرتا ہے اور جو اپنے ہر نقطہ پر قبیل کے کسی نہ کسی رکن سے مس ہوتا ہے۔ یہ اُس تعریف سے مساوی ہے جو صفحہ ۱۲۶ پر دی جا چکی ہے لیکن وہاں اِس تعریف کا دوسرا حصہ صریحاً بیان نہیں کیا گیا تھا لیکن بعد والے جملہ میں یہ بات مضمر تھی۔

نادر حل کی کم سے کم تین مختلف تعریفیں ہیں۔ ہماری تعریف (صفحہ ۱۲۶) یہ ہے کہ یہ وہ حل ہے جو کامل ابتدائی سے تعبیر شدہ منحنیوں کے قبیل کے لفافہ کے متناظر حل[2] ہے۔

(بقیہ صفحہ گذشتہ) جو انحناؤ کے مرکزوں کے درمیان ہے۔ اس طرح ایک دائرہ انحناؤ دوسرے دائرہ انحناؤ سے گرد ہوتا ہے اور اس لیے حقیقی نقاط انقاطع حاصل نہیں ہوتے۔ دوسری صورتیں جہاں یہ تعریف ناکام رہتی ہے مثال ۱۳ دفعہ ۱۲۱ میں ملیں گی۔

[1] دیکھو Neville, *Proc Camb. Phil. Soc* Vol xxi. P. 97.1922.

[2] یہ وہ تعریف ہے جو اعلیٰ معیار کے مقالوں میں اختیار کی جاتی ہے (دیکھو Ince's *Ordinary Differential Equations*

(بقیہ دیکھو صفحہ آئندہ)

ہوتا ہے۔ لیکن ایسا نہیں ہے۔ اتفاقوں پر بحث کرنے میں ضمناً یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ وہ تفاعل جو قبیل کی مساوات [illegible] ہوتے ہیں تسلسل سے متعلق بعض شرطوں کو پورا کرتے ہیں۔ یہ شرطیں اُن سادہ تفرقی مساواتوں کے کامل ابتدائیوں کے لیے بالعموم پوری ہوتی ہیں جو نادر حلوں کی ابتدائی بحث میں دی جاتی ہیں لیکن یہ اِس واقعہ پر مبنی ہے کہ ایسی مثالوں کو تیار کرنے میں دراصل کامل ابتدائیوں سے ہی ابتدا کی گئی تھی۔ اگر ہم اسی شکل کی عام ترین تفرقی مساوات سے ابتدا کریں تو یہ فرض کرنے کی کوئی وجہ نہیں ہے کہ کامل ابتدائی اُن شرطوں کو جو اتفاق کی موجودگی کے لیے ضروری ہیں پورا کرے گا۔ ہم کہہ سکتے ہیں کہ نادر حل کی موجودگی کو قاعدہ کے طور پر نہیں بلکہ استثنا کے طور پر سمجھنا چاہیئے[1]

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ اتفاقوں کو معلوم کرنے کا معمولی عمل (دفعہ ۵۶) کامل ابتدائی کی ایک شکل کے لیے ناکام ہو سکتا ہے اور دوسری شکل کے لیے کامیاب۔ مثلاً وہ لا$^{\frac{1}{2}}$ + ما$^{\frac{1}{2}}$ = ج$^{\frac{1}{2}}$ کے لیے یا لا + جب$^{1}$ ما = ج کے لیے تو ناکام رہتا ہے لیکن

$$(\text{لا} + \text{ما} - \text{ج})^{2} = 4\,\text{لا}\,\text{ما} \quad \text{یا} \quad \text{ما} = \text{جب}\,(\text{ج} - \text{لا})$$

کے لیے موثر

مساوات لا$^{\frac{1}{2}}$ + ما$^{\frac{1}{2}}$ = ج$^{\frac{1}{2}}$ سے جس سے ما = لاع$^{2}$ حاصل ہوتا ہے ایک اور بات واضح ہوتی ہے۔ یہ تفرقی مساوات، ما = ۰ سے پوری ہوتی ہے لیکن لا = ۰ سے بمشکل پوری ہو سکتی ہے کیونکہ ع = $\infty$ حاصل ہوتا ہے اور طرفین غیر متعین ہو جاتے ہیں۔ تاہم لا = ۰ اور ما = ۰ دونوں منحنیوں کے (محوروں کو مس کرنیوالے مکافی) قبیل کے لفافے ہیں اور

[1] دیکھو مثال ۱۰، دفعہ ۱۶۱

دونوں ما (فرلا)$^{۲}$ = لا (فرما)$^{۲}$ کو پورا کرتے ہیں جو ایک تفرقی رشتہ ہے جس سے ہندسی حقائق تفرقی مساوات کی بہ نسبت زیادہ صحت کے ساتھ تعبیر ہوتے ہیں۔ [مقابلہ کرو مثال ۹ صفحہ ۱۵۶ اور مثال ۱۱ صفحہ ۱۶۴ کے ساتھ۔ پہلی مثال میں لا = ۰ ایک مخصوص منحنی کی انتہائی شکل ہے۔ اور دوسری مثال میں وہ ایک لفاف اور نیز قرن طریق ہے۔]۔ ایسی صورتوں میں ہم لا = ۰ کو حلوں کی فہرست سے خارج کرنے پر مجبور ہوتے ہیں لیکن اس اخراج کی وجہ یہ سمجھی جا سکتی ہے کہ تفرقی مساوات محور ما کے متوازی سمتوں کو ٹھیک طور پر تعبیر کرنے سے قاصر ہے اور اس کی وجہ یہ نہیں ہے کہ خود لفاف میں کوئی خصوصیت ہے۔

## ۱۶۱ - ممیز - خاص حل - حدود -

اِس دفعہ میں ہم اپنی توجہ صرف ف (لا، ما، ج) = ۰ کے کامل ابتدائیوں پر محدود رکھیں گے۔ اِس میں ف (لا، ما، ج) ایک کثیر رقمی ہے جو لا، ما، اور ج میں بیان کیا گیا ہے۔ اِس کثیر رقمی کو شکل

$$ا_۰(لا، ما)\,ج^{ن} + ن\,ا_۱(لا، ما)\,ج^{ن-۱}$$

$$+ \tfrac{۱}{۲}ن(ن-۱)\,ا_۲(لا، ما)\,ج^{ن-۲} + \ldots + ا_ن(لا، ما) = ۰$$

میں بھی لکھ سکتے ہیں۔ ج ممیز $\Delta_{ج}$ کی یہ تعریف (اِلّا عددی جزوضربی کے) کی جاتی ہے کہ وہ $ا_۰^{\,۲ن-۲}$ اور اصلوں کے فرقوں کے مربعوں کا حاصل ضرب ہے، $ا_۰^{\,۲ن-۲}$ کو اِس وجہ سے داخل کیا گیا ہے کہ نتیجہ $ا_۰، ا_۱، ا_۲$...

ان میں ایک کثیر رقمی حاصل ہو۔ مثلاً ن = ۲، ۳، ۴ کے لیے علی الترتیب حاصل ہوتا ہے

$$\text{ا}_{.}\,\text{ا}_{٢} - \text{ا}_{١}^{٢}،$$

$$(\text{ا}_{.}\,\text{ا}_{٣} - \text{ا}_{١}\,\text{ا}_{٢})^{٢} - ۴(\text{ا}_{.}\,\text{ا}_{٢} - \text{ا}_{١}^{٢})(\text{ا}_{١}\,\text{ا}_{٣} - \text{ا}_{٢}^{٢})،$$

$$(\text{ا}_{.}\,\text{ا}_{۴} - ۴\,\text{ا}_{١}\,\text{ا}_{٣} + ٣\,\text{ا}_{٢}^{٢})^{٣} - ٢٧(\text{ا}_{.}\,\text{ا}_{٢}\,\text{ا}_{۴} + ٢\,\text{ا}_{١}\,\text{ا}_{٢}\,\text{ا}_{٣} - \text{ا}_{.}\,\text{ا}_{٣}^{٢} - \text{ا}_{١}^{٢}\,\text{ا}_{۴} - \text{ا}_{٢}^{٣})^{٢}$$

چوتھے باب کے مطابق لفظ "ممیز" کو نہ صرف **تفاعل** $\triangle_{\text{ج}}$ کی تعبیر کے لیے بلکہ **مساوات** $\triangle_{\text{ج}} = .$ کے لیے اور اس مساوات سے تعبیر شدہ طریقوں ( Loci ) کے لیے بھی بعض اوقات استعمال کیا جائیگا۔

نادر حلوں کے سوالات حل کرنے میں ممیزوں کو محسوب کرنے کا ایک باقاعدہ طریقہ استعمال کرنا مناسب ہے۔ دو درجیوں، کعبیوں اور چار درجیوں کے لیے اوپر کے نتیجے استعمال کئے جا سکتے ہیں[۵۱]۔ اگر $\triangle_{\text{ج}}$ کو دفعہ ۵٦ کے مطابق عملِ اسقاط سے معلوم کیا جائے تو ممکن ہے کہ بعض اجزائے ضربی چھوٹ جائیں۔ اس لیے ایسے عمل اسقاط کے لیے مناسب یہ ہے کہ سلوسٹر کا بین تحلیلی طریقہ استعمال کیا جائے۔ اس طریقہ کو یہاں استعمال کرنے میں ہم ف کو $\text{ج}^{\text{ن}-٢}$، $\text{ج}^{\text{ن}-٣}$، ...، ج، ۱ سے اور $\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ج}}$ کو $\text{ج}^{\text{ن}-١}$، $\text{ج}^{\text{ن}-٢}$، ...، ج، ۱ سے ضرب دیتے ہیں

---

[۵۱] ان کو استعمال کرتے وقت یہ یاد رہے کہ ا ہی اصلی سر نہیں ہیں بلکہ ان کے ساتھ ثنائی عددی اجزائے ضربی بھی ہیں مثلاً چار درجی کی صورت میں $\text{ج}^{٢}$ کا سر $\text{ا}_{٢}$ نہیں بلکہ ٦ $\text{ا}_{٢}$ ہے۔

اور اس طرح جو (۲ن-۱) مساواتیں حاصل ہوتی ہیں اُن سے $ج^{۲ن-۲}$، $ج^{۲ن-۳}$، ...، ج، ۱ کو ساقط کرتے ہیں، اِس طرح (۲ن-۱) صفوں اور ستونوں کا ایک مقطعہ حاصل ہوگا۔ دو درجی $ا_. ج^۲ + ۲ ا_۱ ج + ا_۲ = ۰$ کے لیے اس طریقہ سے

$$\begin{vmatrix} ا_. & ۲ا_۱ & ا_۲ \\ ۲ا_. & ۲ا_۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ا_. & ۲ا_۱ \end{vmatrix} = ۴ا_.(ا_. ا_۲ - ا_۱^۲)$$

حاصل ہوگا۔ لیکن اِس میں جزوضربی $ا_.$ زائد ہے، اور یہ دیکھنا آسان ہے کہ یہی زائد جزوضربی وقوع پذیر ہوگا خواہ ف کا درجہ کچھ ہی ہو اور اس طرح ٹھیک درجہ (۲ن-۲) کی بجائے درجہ (۲ن-۱) کا ایک جملہ حاصل ہوگا۔ اِس باب کے آخر میں دی ہوئی مثالوں پر سلوسٹر کا طریقہ استعمال کیا جائے تو اِس جزوضربی کو جدا کرنا چاہئیے۔

(۱۹۵) اِن مثالوں کا پہلا مقصد اُن طریقوں کی توضیح کرنا ہے جن میں ج اور ع میزوں سے خاص حل یا انکی انتہائی شکلیں حاصل ہوتی ہیں۔ بعض صورتوں میں حل ایک مخصوص منحنی کے صرف ایک حصہ کے طور پر واقع ہوتے ہیں (مثال ۱)۔ اِن کی ہندسی تعبیر مختلف شکلیں اختیار کرتی ہے۔ چنانچہ وہ لفاف ہو سکتے ہیں اور اس لیے نادر حل بھی (مثال ۲)، یا عقدہ طریق ہو سکتے ہیں (مثال ۳)، یا قرن طریق (مثال ۴)، یا تماس طریق (مثال ۵) یا تقارب (مثال ۶)، یا مماس جوقبیل کے تمام منحنیوں کو ایک ہی نقطہ پر مس کرتے ہوں (مثال ۸)، وہ صرف خطوط (مماس نہیں) ہو سکتے ہیں جو قبیل کے ایک مشترک نقطہ میں سے گذرتے ہوں (مثال ۷)۔ کلیرو کی شکل کے سلسلہ میں یہ

کہا جا سکتا ہے کہ مذکورہ بالا حل لفاف کے انعطافی مماس سے حاصل ہوتے ہیں (مثال ۹)۔

بعض اوقات یہ بیان کیا جاتا ہے کہ جب ممیزوں میں خاص حل وقوع پذیر ہوتے ہیں تو وہ ج ممیز $\Delta_{ج}$ میں پہلی قوت میں اور ع ممیز $\Delta_{ع}$ میں تیسری قوت میں واقع ہوتے ہیں۔ اس قاعدہ کو دفعہ ۶۴ کے قاعدوں کے ساتھ علامتی شکل

$$\Delta_{ج} = ل\, ع\, ق^{۲}\, خ^{۳}،\quad \Delta_{ع} = ل\, م^{۲}\, ق\, خ^{۳}$$

میں بیان کیا جا سکتا ہے جہاں ل، ع، ق، خ اور م علی الترتیب لفاف، عقدہ طریق، قرن طریق، خاص حل اور تماس طریق کو تعبیر کرتے ہیں۔ یہ قاعدے سادہ صورتوں میں اندازہ لگانے کے لیے مفید ہیں لیکن ایسی مثالیں بہ آسانی بنائی جا سکتی ہیں جن میں یہ قاعدے ناکام رہتے ہیں (مثال ۳، ۴، ۱۰، ۱۳، ۱۴)۔

اب ہم خاص حلوں اور دیگر مستثنے طریقوں (Loci) کے اس تخیل کی صراحت کریں گے جو حدود سے متعلق ہے[۱]۔ ہم صرف اس صورت پر اپنی توجہ محدود رکھیں گے جس میں ف (لا، ما، ج) لا، ما، ج میں ایک [illegible] ہے اور ایسا کہ لا، ما کی حقیقی قیمتوں کے ہر زوج کے متناظر ج میں ن ویں درجہ کی ایک مساوات حاصل ہوتی ہے جس کی م اصلیں (فرض کرو) حقیقی منحنیوں کے متناظر اور (ن - م) خیالی اصلیں خیالی منحنیوں کے متناظر ہوتی ہیں نیز ہم یہ

---

[۱] یہاں اور دیگر مقاموں پر میں نے ان قیمتی مشوروں کا بڑا خیال رکھا ہے جن کو مسٹر ایچ۔ بی۔ فیچل سابق پروفیسر ریاضی جامعہ کولمبیا نیویارک نے دیے تھے لیکن اس کے یہ معنے نہیں ہیں کہ اس بحث کا انکو ذمہ دار ٹھیرایا جائے کیونکہ ہم دونوں کے نقطۂ نظر میں شاندار اختلاف ہے۔

سمجھیں گے کہ یہ اصلیں جو لا اور ما کے تفاعل ہیں مسلسل متغیر ہوتی ہیں جبکہ لا اور ما مسلسل متغیر ہوں۔

فرض کرو کہ ایک خاص منحنی ب (لا، ما) = ۰ (جو اضعافی شکل میں نہیں ہے یا متعدد مفرد منحنیوں سے مرکب نہیں ہے) دو علاقوں کے درمیان ایک حد ہے اور یہ علاقے ایسے ہیں کہ ان میں سے ایک میں م کی ایک خاص قیمت مر ہے اور دوسرے میں اس کی قیمت مر - ۲ ہے۔ اب خیال کرو کہ نقطہ (لا، ما) پہلے علاقہ میں سے مسلسل حرکت کر کے اس کے باہر نکلتا ہے اور حد ب کو عبور کر کے دوسرے علاقہ میں داخل ہوتا ہے تو اس دوران میں حقیقی اور نامساوی اصلوں کا ایک زوج ایک دوسرے کے قریب آتا ہے اور حد پر پہنچکر یہ اصلیں ایک دوسرے کے مساوی ہو جاتی ہیں اور بالآخر دوسرے علاقہ میں گذرنے پر یہ اصلیں مزدوج ملتف ہو جاتی ہیں۔ $\Delta_{ج}$ جس میں ان اصلوں کے فرقوں کا مربع شامل ہے ب پر معدوم ہونا چاہئے۔ اور پھر اس کی علامت بدلنی چاہئے کیونکہ دو مزدوج ملتف اصلوں کے فرق کا مربع منفی ہوتا ہے۔ ب (لا، ما) کو بھی علامت بدلنی چاہئے جبکہ (لا، ما) اس کو عبور کرے۔ اس کو زیادہ عام شکل میں اس طرح بیان کیا جا سکتا ہے کہ اگر م، مر سے مر - ۲ ر تک بدلے جہاں ر ایک طاق صحیح عدد ہے تو $\Delta_{ج}$ علامت بدلے گا اور ب (لا، ما)، $\Delta_{ج}$ میں واقع ہوگا اور ب (لا، ما) کی قوت ایک طاق عدد ہو گی (لیکن اس عدد کا ر ہونا ضروری نہیں ہے، دیکھو مثال ۱۴ جہاں ب (لا، ما) تیسری قوت میں واقع ہے لیکن ر = ۱)۔ اگر ر ایک جفت صحیح عدد ہو تو ب (لا، ما) ایک جفت قوت میں وقوع پذیر ہوگا۔ اس کے بالعکس اگر ب (لا، ما) ایک طاق قوت میں واقع ہو تو ر کو طاق ہونا چاہئے لیکن اگر ب (لا، ما) ایک جفت قوت میں واقع ہو اور اس لیے $\Delta_{ج}$ کی علامت

(۱۹۶)

نہ بدلے تو ر کا جفت ہونا ضرور نہیں، وہ صفر ہو سکتا ہے جیسا کہ مثال ۱۳ میں جس میں ب ایک لفاف ہے جس کو قبیل کے تمام منحنی عبور کرتے ہیں۔ ایسی صورتوں میں لفاف کو ایک جفت قوت میں وقوع پذیر ہونا چاہیئے جو قاعدہ $\Delta_{ج} =$ ل ع$^{2}$ ق$^{3}$ خ کے خلاف ہے۔

اسی طرح $\Delta_{ع}$ پر بحث کی جا سکتی ہے اگر ہم ایک نقطہ میں سے گذرنے والے حقیقی منحنیوں کی تعداد کی بجائے حقیقی سمتوں کی تعداد جو اُس میں سے گذرے رکھیں۔ ایک خاص دلچسپ صورت کلیرو کی شکل کی ہے (مثال ۹)۔ لفاف کا انعطافی مماس ع میں دو مساوی اصلوں کے متناظر ہے اور اس لیے $\Delta_{ع} = 0$ حاصل ہوتا ہے۔ نیز کلیرو کی شکل میں

$\Delta_{ج} = \Delta_{ع}$، $\Delta_{ج} = 0$ ۔

نادر حلوں کی تحقیق کا متبادل ہندسی طریقہ[1] یہ ہے کہ ع کی بجائے ی رکھا جائے اور اس طرح تفرقی مساوات کو ایک سطح کی جبریہ مساوات میں تبدیل کیا جائے۔ اسی طرح کامل ابتدائی میں ج کی بجائے ی رکھا جا سکتا ہے۔ اس طریقہ میں سطحوں کے علم ہندسہ سے اچھی طرح واقف ہونے کی ضرورت ہے۔

نادر حلوں کے نظریہ میں اسوقت بھی مشکلیں پیش آتی ہیں جبکہ تفرقی مساواتوں کے سر لا اور ما میں کثیر رقمی ہوں اور جب سر علوی تفاعلات ہوتے ہیں تو اِن مشکلوں میں بڑا اضافہ ہو جاتا ہے[2]۔

---

[1] *Encyklopadie der Mathematischen Wissenschaften* III D 8 ؛ Goursat's *Cours d' Analyse Mathematique*, Vol. II. 4 th. ed. Art. 485

[2] M. J. M. Hill, *Proc. Lond. Math.Soc.*, Series 2, Vol. 17, 1918. P. 149

## حل طلب مثالیں

[ہم کاملِ ابتدائی، ج ممیز، ع ممیز، اور نادر حل کو علی الترتیب ک۔ ا، $\Delta$، $\Delta$، اور ن۔ ح سے تعبیر کرینگے۔ $\Delta_{ج}$ اور $\Delta_{ع}$ کو اوپر کے ضابطوں سے حاصل کیا گیا ہے لیکن عددی اجزائے ضربی ترک کئے گئے ہیں۔
طالبِ علم کو خام زیبہیں (لا اور ما کی ٹھیک قیمتیں محسوب کئے بغیر) کھینچنی چاہئیں جن سے منحنیوں کے ہر قبیل کے چند ارکان کی شکل معلوم ہوگی اور نیز اُن طریقوں Loci کے لحاظ سے اِنکا محل معلوم ہوگا جو ممیزوں سے حاصل ہوتے ہیں۔]

(۱) ک۔ ا، ما (لا + ج) + ج۲ = ۰ دیا گیا ہے، تفرقی مساوات
لا ع۲ + ما (۲ لا ۔ ما) ع + ما۲ = ۰۔

نیز $\Delta_{ج}$ = ما (۴ لا ۔ ما)، $\Delta_{ع}$ = ما۳ (۴ لا ۔ ما) حاصل کرو۔

[ج کی غیر صفر قیمتوں کے لیے ک۔ ا قائم زائدوں کے ایک قبیل کو تعبیر کرتا ہے۔ اِن سب زائدوں کا ایک متقارب ما = ۰ ہے اور نیز وہ خاص تکملہ لا ما = ۰ کا ایک حصہ ہے جس کو ک۔ ا سے ج = ۰ رکھ کر حاصل کیا گیا ہے۔ لفاف ما = ۴ لا ہے (جو ایک ن۔ ح ہے)۔ قاعدے $\Delta_{ج}$ = ل ع۲ ق۲ خ، $\Delta_{ع}$ = ل م۲ ق خ۳ درست رہتے ہیں۔ مستوی کو چار علاقوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے جن میں سے دو میں قبیل کے حقیقی منحنیوں کی تعداد جو کسی نقطہ میں سے گذرتے ہیں دو ہے لیکن دوسرے دو علاقوں میں یہ تعداد صفر ہے۔ اِن علاقوں کے درمیان حدود وہ طریق ہیں جو ممیزوں سے حاصل ہوتے ہیں اور یہ دونوں ممیز طاق قوتوں میں وقوع پذیر ہوتے ہیں۔ یہ ہمارے حدود کے نظریہ کے مطابق ہے کیونکہ اِس صورت میں م = ۲، م ۔ ۲ ر = ۰، اِسلئے ر = ۱ جو طاق ہے]۔ (۱۹۷)

(۲) ک۔ ا = ج (لا ۔ ج)۲ ہے۔ تفرقی مساوات
ع۳ ۔ ۴ لا ما ع + ۸ ما۲ = ۰۔

نیز $\Delta_{ج}$ = ما (۲۷ ما ۔ ۴ لا۳)، $\Delta_{ع}$ = ما۲ (۲۷ ما ۔ ۴ لا۳) حاصل کرو۔

[ممیزوں کو محسوب کرنا بالخصوص مناسب ہے - ما = ۰ عقدہ طریق ہے اور خاص حل بھی ہے - لا = ۰ تمام منحنیوں کی ... مشترک مماس ہے الّا اُس منحنی کے جس کے لیے ج = ۰ - (دیکھو مثال ۸) $^{۳}$ لا$^{۳}$ = ۶۴ ما$^{۲}$ لفافہ ہے - یہ سمجھنے کے لیے کہ مختلف اجزائے ضربی ممیزوں میں مختلف قوتوں میں کیوں وقوع پذیر ہوتے ہیں ہم دیکھتے ہیں کہ لا = ۰ اُن علاقوں کے درمیان ایک حد ہے جہاں کسی نقطہ میں سے گذرنیوالے حقیقی منحنیوں کی تعداد صفر سے دو تک بڑھتی ہے لیکن لفافہ اُن علاقوں کے درمیان حد ہے جہاں یہ تعداد دو سے چار تک بڑھتی ہے - ما = ۰ پر یہ چار دو دو کر کے منطبق ہوتے ہیں لیکن مثبت حصہ کی ہر جانب اِس کے اور لفافہ کی ایک شاخ کے درمیان تعداد دو ہی ہے قاعدے $\Delta_{ج}$ = ل ع$^{۲}$ ق$^{۳}$ خ‘ $\Delta_{ع}$ = ل م$^{۲}$ ق خ$^{۳}$‘ طریقوں Loci لا = ۰ اور ما = ۰ کی ہندسی تعبیر بیان کرنے میں ناکام رہتے ہیں -]

(۴) ک - ۱ ۴ ما$^{۳}$ = ج (۴ لا - ج)$^{۲}$ ہے - تفرقی مساوات

ما ع$^{۳}$ - ۳ لا ع + ۲ ما = ۰

نیز $\Delta_{ج}$ = ما$^{۳}$ (ما$^{۳}$ - لا$^{۳}$)‘ $\Delta_{ع}$ = ما (ما$^{۳}$ - لا$^{۳}$) حاصل کرو -

[ج کی غیر صفر قیمتوں کے لیے ک - ۱ نیم کعبی مکافیوں کے ایک قبیل کو تعبیر کرتا ہے جس کے قرن ما = ۰ پر ہیں جو قرن طریق اور نیز ایک خاص حل ہے - ما$^{۳}$ = لا$^{۳}$ ایک لفافہ ہے (ایک ن - ح) - قاعدوں $\Delta_{ج}$ = ل ع$^{۲}$ ق$^{۳}$ خ‘ $\Delta_{ع}$ = ل م$^{۲}$ ق خ$^{۳}$ سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ ما = ۰ قرن طریق ہے لیکن اِن قاعدوں سے یہ نہیں معلوم ہوتا کہ ما = ۰ ایک خاص حل بھی ہے]

(۵) ک - ۱ ما$^{۲}$ = ج (۳ لا - ج$^{۲}$) ہے - تفرقی مساوات

۸ ما$^{۲}$ ع$^{۳}$ - ۵۴ لا ع + ۲۷ ما = ۰

نیز $\Delta_{ج}$ = ما$^{۴}$ - ۴ لا$^{۳}$‘ $\Delta_{ع}$ = ما$^{۲}$ (ما$^{۴}$ - ۴ لا$^{۳}$) حاصل کرو -

(۱۹۸) [ ج کی غیر صفر قیمتوں کے لیے ک - ۱ مکافیوں کے ایک قبیل کو تعبیر کرتا ہے جس کا محور ما = ۰ ہے اور راس محور کا ہر نقطہ قبیل کے دو مکافیوں کا راس ہے جن کے تقعر مخالف سمتوں میں ہیں ... ما = ... طریق اور نیز ایک خاص حل ہے - ما$^۲$ = ۴ لا$^۳$ لفاف ہے (ن - ح) - ما$^۲$ = ج (۳ لا - ج$^۲$) لفاف کو نقطوں { ج$^۲$، ± $\sqrt{۲ ج^۳}$ } پر مس کرتا ہے جو خیالی ہیں اگر ج منفی ہے،

اور وہ لفاف کو نقطوں { $\frac{۱}{۴}$ ج$^۲$، ± $\frac{۱}{۲}$ $\sqrt{- ج^۳}$ } پر قطع کرتا ہے جو خیالی ہیں اگر ج مثبت ہے ... سے ... کا پتہ چلتا ہے لیکن خاص حل کا نہیں ]

(۶) ثابت کرو کہ م کی غیر صفر تمام قیمتوں کے لیے

ما$^{م-۲}$ ع$^۲$ = ۱ کا کامل ابتدائی ۴ ما$^م$ = م$^۲$ (لا + ج)$^۲$

ہے -

ثابت کرو کہ تین صورتوں (۱) م طاق مثبت صحیح عدد جو ایک سے بڑا ہو، (۲) م = ۱، اور (۳) م طاق منفی صحیح عدد ہیں $\triangle_ج$ اور $\triangle_ع$ علی الترتیب

ما$^م$ ، ما ، ما$^{۲م}$

اور

ما$^{م-۲}$ ، ما ، ما$^{۲-م}$

ہیں بشرطیکہ ان ممیزوں کو ایسی مساواتوں سے حاصل کیا گیا ہو جنکو ما کی کم سے کم قوت سے جو منفی قوتوں کو خارج کرنے کے لیے ضروری ہیں ضرب دیا گیا ہو۔

[ ما = ۰ پہلی صورت میں قرن طریق ہے، دوسری میں لفاف (ن - ح) اور تیسری میں خاص حل کی انتہائی شکل جو ار. تمام منحنیوں کا متقارب ہے جو کامل ابتدائی میں شامل ہیں . ج = ∞ سے ما$^م$ = ۰ حاصل ہوتا ہے اگر

م منفی ہے، اِس لیے خاص تکملہ کی اس انتہائی شکل میں حل ما = ۰ بالعموم اضعافی شکل میں آتا ہے ۔ اگر م = ۔ ا تو خاص حل اُن قوتوں میں وقوع پذیر ہوتا ہے جو قاعدوں $\Delta_{ج} = ل ع^۲ ق^۳ خ$ ، $\Delta_{ع} = ل م^۲ ق خ^۳$ سے حاصل ہوتے ہیں ۔ اِن قاعدوں سے قرن طریق کی قوتیں صرف م = ۳ کی صورت میں صحیح طور پر حاصل ہوتی ہیں ]

(۷) ک ۔ ا ما = لا (لا + ج)$^۲$ ہے ۔ تفرقی مساوات

لا$^۲$ ع$^۲$ ۔ ۲ لا ما ع + ما$^۲$ ۔ ۴ لا$^۳$ ما = ۰

نیز $\Delta_{ج}$ = لا ما ، $\Delta_{ع}$ = لا$^۵$ ما حاصل کرو

ثابت کرو کہ ما = ۰ لفاف (ن ۔ ح) ہے اور لا = ۰ خاص حل کی ایک انتہائی شکل ہے لیکن وہ خود حل نہیں ہے ۔

[ مبدا پر جو قبیل کے تمام منحنیوں میں ایک مشترک نقطہ ہے ممیزوں کے معدوم ہونے کی پیش قیاسی کی جا سکتی ہے ۔ کیونکہ مبداء پر قبیل کی مساوات ج کی کسی قیمت کے لیے پوری ہوتی ہے، ج کی ہر قوت کے سر اور نیز وہ رقم جس میں ج نہیں ہے اس نقطہ پر معدوم ہوتے ہیں، اِس لیے $\Delta_{ج}$ = ۰ کیونکہ اس کی ہر رقم معدوم ہوتی ہے ۔ چونکہ مشترک نقطہ پر منحنیوں کے مختلف مماس ہیں اس لیے اِس نقطہ پر تفرقی مساوات، ع کی کسی قیمت کے لیے پوری ہوتی ہے اور اِس لیے اُسی استدلال سے جو $\Delta_{ج}$ کے لیے استعمال ہوا $\Delta_{ع}$ = ۰ ۔ (دیکھو مثال ۷ صفحہ ۱۵۶) ] ۔

(۸) ثابت کرو کہ ج کی تمام غیر صفر قیمتوں کے لیے قبیل ما$^۲$ = لا (لا + ج)$^۲$ کے منحنی لا = ۰ کو مبدا پر مس کرتے ہیں ۔ تفرقی مساوات

$$۴ لا^۲ ع^۲ - ۴ لا ما ع + ما^۲ - ۴ لا^۳ = ۰$$

نیز $\Delta_ج = لا ما^۲$ ، $\Delta_ع = لا^۵$ حاصل کرو۔

ثابت کرو کہ ما = ۰ قرن طریق ہے اور لا = ۰ خاص حل کی ایک انتہائی شکل ہے (اگرچیکہ وہ خود حل نہیں ہے) اور نیز وہ ایک ایسا خط ہے جو تمام منحنیوں کو ایک نقطہ پر مس کرتا ہے اِلّا اُس منحنی کے جس کے لیے ج = ۰ ۔ (ایسا خط نفاف کی ہماری تعریف کو پورا نہیں کرتا)۔

[مثال ۷ کی طرح $\Delta_ج$ کو مبدا پر معدوم ہونا چاہیئے۔ $\Delta_ع$ بھی معدوم ہوتا ہے (اگرچیکہ یہاں منحنی مختلف مماس نہیں رکھتے)۔ (دیکھو مثال ۹ صفحہ ۱۵۶)]۔ (۱۹۹)

(۹) ثابت کرو کہ تفرقی مساوات (کلیرو کی شکل)

$$(ما - ع لا)^۲ = ع^۳$$

کے لیے $\Delta_ع = ما^۳ (۲۷ ما - ۴ لا^۳) = \Delta_ج$

[ ۲۷ ما = ۴ لا^۳ لفاف ہے (ن ۔ ح)۔ خاص حل ما^۲ = ۰ ہے اور لفاف کے انعطافی مماس کو تعبیر کرتا ہے۔ اب کسی نقطہ میں سے ۲۷ ما = ۴ لا^۳ کے تین مماس کھینچے جا سکتے ہیں۔ یہ سب اُس علاقہ میں جو پہلے ربع میں منحنی اور ما = ۰ کے درمیان ہے حقیقی ہیں اور نیز اُس مشابہ علاقہ میں جو تیسرے ربع میں ہے۔ دوسرے علاقوں میں اِن میں سے دو مماس خیالی ہیں۔ ما = ۰ پر کے کسی نقطہ کے لیے دو مماس منطبق ہوتے ہیں اِس لیے ما = ۰ ممیزوں میں واقع ہونا چاہیئے۔ اِسی طرح جب کبھی کلیرو کی شکل کی کسی دوسری تفرقی مساوات کا لفاف حل انعطافی مماس رکھے تو وہ ممیزوں میں واقع ہوں گے۔]

(۱۰) تفرقی مساوات

ف (لا ، ما ، ع) = ۰ ، ۔۔۔۔۔۔۔۔۔ (۱)

دی گئی ہے۔ اس سے اخذ کرو کہ

$$\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}}+\text{ع}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}}+\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ع}}=0\text{، }\ldots\ldots(2)$$

اگر ع ممیز سے حاصل شدہ حل کے لیے

$$\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ع}}=0\text{، }\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

تو اوپر کے نتیجہ سے ثابت کرو کہ اس حل پر کے کسی نقطہ کے لیے

$$\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}}+\text{ع}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}}=0\text{، }\ldots\ldots(4)$$

مساواتیں (۱)، (۳)، اور (۴)، نادر حل کے لیے ضروری شرطیں ہیں۔ کلیرو کی شکل کے لیے ف (لا، ما، ع) ≡ ما - ع لا - فا(ع)، اِسلئے مساوات (۴) متماثلاً پوری ہوتی ہے۔ لیکن بالعموم کوئی وجہ نہیں کہ ان تینوں مساواتوں کا حل ایک ساتھ حاصل ہو، اس لیے بالعموم تفرقی مساوات کا نادر حل نہیں ہوتا۔

[ اِس کو مثال (۱) صفحہ ۱۴۰ پر استعمال کرنے سے تین شرطیں

ع۲ (۲ - ۳ ما)۲ = ۴ (۱ - ما)، ۲ ع (۲ - ۳ ما)۲ = ۰

ع {- ۶ ع۲ (۲ - ۳ ما) + ۴} = ۰

حاصل ہوتی ہیں۔

۱ - ما = ۰ جس سے ع = ۰ حاصل ہوتا ہے اِن تین شرطوں کو پورا کرتا ہے، لیکن ۲ - ۳ ما = ۰ پہلی شرط کو پورا نہیں کرتا۔ ]

(۱۱) [ اِس مثال میں نادر حل کی تیسری تعریف (دفعہ ۱۶۰) کو استعمال کرنا چاہئے۔ مثال ۱۰ تمام تعریفوں کے لیے درست ہے۔ ]

اگر ایک منحنی موجود ہو جس کے ہر نقطہ کے لیے تین مساواتیں

$$\text{ف (لا، ما، لہ)}=0\text{، }\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لہ}}=0\text{، }\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}}+\text{لہ}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}}=0$$

$$۴\,لا^۲ ع^۲ - ۴\,لا\,ما\,ع + ما^۲ - ۴\,لا^۳ = ۰$$

نیز $\Delta_ج = لا\,ما^۲$ ، $\Delta_ع = لا^۵$ حاصل کرو۔

ثابت کرو کہ ما = ۰ قرن طریق ہے اور لا = ۰ خاص حل کی ایک انتہائی شکل ہے (اگرچیکہ وہ خود حل نہیں ہے) اور نیز وہ ایک ایسا خط ہے جو تمام منحنیوں کو ایک نقطہ پر مس کرتا ہے اِلّا اُس منحنی کے جس کے لیے ج = ۰ ۔ (ایسا خط لفاف کی ہماری تعریف کو پورا نہیں کرتا)۔

[مثال ۸ کی طرح $\Delta_ج$ کو مبداء پر معدوم ہونا چاہیئے۔ $\Delta_ع$ بھی معدوم ہوتا ہے (اگرچیکہ یہاں منحنی مختلف مماس نہیں رکھتے)۔ (دیکھو مثال ۹ صفحہ ۱۵۶)]  (۱۹۹)

(۹) ثابت کرو کہ تفرقی مساوات (کلیرو کی شکل)

$$(ما - ع\,لا)^۲ = ع^۳$$

کے لیے $\Delta_ع = ما^۲ (۲۷\,ما - ۴\,لا^۳) = \Delta_ج$

[ $۲۷\,ما = ۴\,لا^۳$ لفاف ہے (ن۔ ح)۔ خاص حل ما$^۲$ = ۰ ہے اور لفاف کے انعطافی مماس کو تعبیر کرتا ہے۔ اب کسی نقطہ میں سے ۲۷ ما = ۴ لا$^۳$ کے تین مماس کھینچے جا سکتے ہیں۔ یہ سب اُس علاقہ میں جو پہلے ربع میں منحنی اور ما = ۰ کے درمیان ہے حقیقی ہیں اور نیز اُس مشابہ علاقہ میں جو تیسرے ربع میں ہے۔ دوسرے علاقوں میں ان میں سے دو مماس خیالی ہیں ما = ۰ پر کے کسی نقطہ کے لیے دو مماس منطبق ہوتے ہیں اس لیے ما = ۰ ممیزوں میں واقع ہونا چاہیئے۔ اسی طرح جب کبھی کلیرو کی شکل کی کسی دوسری تفرقی مساوات کا لفاف حل انعطافی مماس رکھے تو وہ ممیزوں میں واقع ہوں گے۔]

(۱۰) تفرقی مساوات

$$ف\,(لا، ما، ع) = ۰ ، \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

لہ میں ایک مشترک حل رکھتی ہیں تو ثابت کرو کہ اس منحنی پر

$$\frac{جف\, ف}{جف\, لا} فرلا + \frac{جف\, ف}{جف\, ما} فرما + \frac{جف\, ف}{جف\, لہ} فرلہ = ۰$$

اور اس لیے

$$\frac{جف\, ف}{جف\, ما} فرلا + \frac{جف\, ف}{جف\, ما} فرما = ۰ \text{ ۔ لہ}$$ (۲۰۰)

پس ثابت کرو کہ اگر $\frac{جف\, ف}{جف\, ما} \neq ۰$ تو لہ = ع اور منحنی تفرقی مساوات

ف (لا، ما، ع) = ۰ کا نادر حل ہے، لیکن اگر $\frac{جف\, ف}{جف\, ما} = ۰$ تو $\frac{جف\, ف}{جف\, لا} = ۰$ ۔

[ اس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ نادر حل کے لیے ضروری شرطیں جو مثال ۱۰ میں دی گئی ہیں شرط $\frac{جف\, ف}{جف\, ما} \neq ۰$ کے اضافہ سے کافی ہو جاتی ہیں ۔ لیکن یہ آخری شرط ضروری نہیں ہے ۔ مثال ۲ میں $\frac{جف\, ف}{جف\, ما} = ۱۶$ ما ۔ ۴ لا ع ۔ یہ ایک لفاف ما = ۰ کے لیے صفر ہے لیکن دوسرے ۲۷ ما = ۴ لا$^۳$ کے لیے صفر نہیں ہے ۔ ]

(۱۲) ثابت کرو کہ ان منحنیوں کے نقاط انعطاف کا طریق جو مثال ۱۰ کی مساوات (۱) کے کامل ابتدائی سے تعبیر ہوتے ہیں مثال (۱۰) کی مساوات (۴) کو پورا کرتا ہے اور اس لیے وہ اُس نتیجہ میں شامل ہوگا جو ان مساواتوں سے ع کو ساقط کرنے پر حاصل ہوتا ہے ۔

یہ عمل مثال ۷ کی مساواتوں پر استعمال کرو اور عمل اسقاط کی تکمیل سلوسٹر کے طریقہ سے کرو اور لا$^۲$ ما (۴ ما ۔ لا$^۳$) = ۰ کو حاصل کرو ۔ [ دیکھو کہ $\Delta_ع$ کے تمام طریق شامل ہیں اور انعطافوں کا طریق ۴ ما = لا$^۳$ بھی شامل ہے ]

(۱۳) ثابت کرو کہ مساواتوں $ما^2 = (لا - ج)^3$ ، $ما = (لا - ج)^3$ ،
$لا^{2/3} + ما^{2/3} = ج^{2/3}$ سے منحنیوں کے ایسے قبیل تعبیر ہوتے ہیں جن میں متصلہ منحنی حقیقی نقطوں میں متقاطع نہیں ہوتے اور اس کے باوجود ایک لفاف $ما = ٠$ موجود ہے۔ [تیسری صورت میں $لا = ٠$ بھی ایک لفاف ہے۔]
متناظر تفرقی مساواتیں

$$٨ ع^3 = ٢٧ ما ، ع^3 = ٢٧ ما^2 ، لا ع^3 + ما = ٠$$

ج ممیز $ما^4 ، ما^2 ، لا^4 ما^4 (لا - ما)^2 (لا + ما)^2$
اور ع ممیز $ما^2 ، ما^4 ، لا^2 ما^2$
حاصل کرو۔

[ان تمام صورتوں میں لفاف ایک جفت قوت میں واقع ہوتا ہے اور اس کی وجہ وہی ہے جو اُس بحث میں بیان ہو چکی ہے جو ممیزوں کے طریقوں (حدود کے طور پر) سے متعلق ہے۔ پہلے اور تیسرے قبیلوں کے لیے لفاف قرن طریق بھی ہے اور اس لیے معمولی قاعدے یہاں درست ہیں لیکن دوسرے قبیل کے لیے ایسا نہیں ہے۔ طریق $لا - ما = ٠$ ، $لا + ما = ٠$ ہیں جہاں دو خیالی منحنی جو تیسرے قبیل کی مساوات میں ج کو منفی قیمت دینے سے حاصل ہوتے ہیں منطبق ہو جاتے ہیں۔]

(۱۴) ثابت کرو کہ $ما = (لا - ج)^4$ سے منحنیوں کا ایک ایسا قبیل تعبیر ہوتا ہے جو اپنے لفاف $ما = ٠$ کے ساتھ چار نقطی تماس رکھتا ہے۔
متناظر تفرقی مساوات $ع^4 = ٢٥٦ ما^3$ اور ممیز $\Delta_ج = ما^3$ ، $\Delta_ع = ما^9$
حاصل کرو۔

[لفاف پھر ایک سے بڑی قوت میں وقوع پذیر ہوتا ہے۔ یہاں اس کی قوت طاق ہے اور یہ ہونا چاہیئے کیونکہ کسی نقطہ میں سے گذرنیوالے

[...تی منحنیوں کی تعداد لفاف کی ایک جانب دو ہے اور دوسری جانب صفر ہے۔]

(۱۵) ثابت کرو کہ مساواتوں $لا^{\frac{1}{2}} + ما^{\frac{1}{2}} = ج^{\frac{1}{2}}$، $لا^{\frac{1}{2}} + ما^{\frac{1}{2}} = ج$،

$(لا + ما - ج)^2 = ۴ لا ما$، $(لا + ما - ج)^2 = ۴ لا ما$ میں سے ہر ایک مکافیوں کے ایک قبیل کو تعبیر کرتی ہے جن کا محور مشترک ہے اور زاویہ لا و ما کی تنصیف کرتا ہے اور نیز یہ کہ لفاف لا = ۰ اور ما = ۰ ہیں۔ ثابت کرو کہ پہلی اور دوسری شکلوں میں $\Delta_ج$ کو معلوم کرنے کی کوشش ناکام رہتی ہے (یا اس سے ۰ = ۱ حاصل ہوتا ہے جو لا تناہی پر کے خط کی مساوات ہے جو تمام مکافیوں کو مس کرتا ہے) لیکن تیسری شکل کے لیے $\Delta_ج = لا ما$ اور چوتھی شکل کے لیے $\Delta_ج = لا^2 ما^2 (لا - ما)^2$ حاصل ہوتا ہے۔

(۲۰۱) [لا - ما = ۰ ایک خاص منحنی ہے جو ج = ۰ کے متناظر ہے۔ ہمیں لفافوں پر بحث کرتے وقت ہمیں پہلی اور دوسری کی مانند شکلوں سے بچنا چاہیے جن میں رقمیں واحد قیمتی نہیں ہیں اور نیز چوتھی کی مانند شکل سے بھی جس میں $ج^2$ کی (نہ کہ خود ج کی) مختلف قیمتوں کے متناظر مختلف منحنی حاصل ہوتے ہیں۔]

## ۱۶۲ — ریکیٹی (Riccati) کی مساوات — یہ نام ابتداً

تفرقی مساوات[1]

$$ما_1 + ب ما^2 = ج لا^م$$

کو دیا گیا تھا جس میں ب، ج اور م مستقل ہیں۔ م کی مخصوص قیمتوں کے ایک خاص جبث کے لیے اِس تفرقی مساوات کو محدود رقموں میں تکمل...

---

[1] لاحقوں سے لا کے لحاظ سے تفرق تعبیر کیے گئے ہیں۔

کیا جا سکتا ہے [دیکھو مثالیں ۷ تا ۱۴ دفعہ ۱۶۴ کے آخر میں]۔ لیکن عام طور پر حل میں ایک لامتناہی سلسلہ کی ضرورت ہوتی ہے جو بیسل کے تفاعلوں[1] کے ساتھ بہت قریب کا تعلق رکھتا ہے۔

ریکٹی کی مساوات سے اب حسب ذیل عام شکل مراد لی جاتی ہے:

$$ما_۱ = ف + ق\,ما + ر\,ما^۲ \quad \cdots\cdots (۱)$$

جہاں ف، ق اور ر، لا کے تفاعل ہیں۔ یہ مساوات تفرقی علم ہندسہ میں کچھ اہمیت رکھتی ہے[2]۔

## ۱۶۳ — ریکٹی کی مساوات کو دوسرے رتبہ کی ایک خطی مساوات میں تحویل کرنا۔

رکھو $ما = -\frac{ع_۱}{ر\,ع}$، اس سے حاصل ہوگا $ما_۱ = -\frac{ع_۲}{ر\,ع} + \frac{ع_۱^۲}{ر\,ع^۲} + \frac{ر_۱\,ع_۱}{ر^۲\,ع}$

جب ہم مساوات (۱) میں اندراج کرتے ہیں تو $ع_۱^۲$ کی رقمیں خارج ہو جاتی ہیں[3]۔ پس $ر^۲ع$ سے ضرب دینے پر حاصل ہوتا ہے

$$-ر\,ع_۲ + ر_۱\,ع_۱ = ف\,ر^۲\,ع - ق\,ر\,ع_۱$$

---

[1] ریکٹی کی مساوات اور بیسل کے تفاعلوں کے ساتھ اس کے تعلق کا تذکرہ واٹسن کی Theory of Bessel Functions صفحات ۱ تا ۳ اور ۸۵ تا ۹۴ میں ملے گا۔

[2] ڈاربو (Darboux) کی کتاب Lecons sur la Theorie Generale des Surfaces کے اشاریہ میں ریکٹی کے ۲۰ حوالے ہیں۔ نیز دیکھو Eisenhart's Differential Geometry صفحات ۲۵، ۱۵۸، ۲۴۹، ۴۲۹ اور فورسائتھ کی Differential Geometry صفحات ۲۰ اور ۳۸۲۔

[3] اوپر کا ابدال اختیار کرنے کا اصلی سبب ہے۔ اگر وہ ذہن میں نہ رہے تو اس خاصیت سے اس پر پہنچ سکتے ہیں۔

یعنے $\text{س}\,\text{ع}_{2} - (\text{ق}\,\text{س} + \text{س}_{1})\,\text{ع}_{1} + \text{ف}\,\text{س}^{2}\,\text{ع} = ۰ \ldots\ldots (۲)$

جو دوسرے رتبہ کی ایک خطی مساوات ہے۔ خاص صورتوں میں (مثلاً ذیل کی مثالوں میں) اس کو محدود رقموں میں تکمل کیا جاسکتا ہے لیکن عام طور پر حل کو ایک سلسلہ میں معلوم کرنا ہوگا۔ ہر صورت میں حل کی شکل

$$\text{ع} = \text{أ}\,\text{ف}(\text{لا}) + \text{ب}\,\text{فا}(\text{لا})$$

ہوگی اور اس سے حاصل ہوگا

$$\text{ما} = -\frac{\text{ع}_{1}}{\text{س}\,\text{ع}} = -\frac{\text{أ}\,\text{ف}_{1}(\text{لا}) + \text{ب}\,\text{فا}_{1}(\text{لا})}{\text{س}\{\text{أ}\,\text{ف}(\text{لا}) + \text{ب}\,\text{فا}(\text{لا})\}}$$

$$= -\frac{\text{ج}\,\text{ف}_{1}(\text{لا}) + \text{فا}_{1}(\text{لا})}{\text{ج}\,\text{س}\,\text{ف}(\text{لا}) + \text{س}\,\text{فا}(\text{لا})}$$

جہاں $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ کی جگہ ج رکھا گیا ہے۔

(۲۰۲) اس سے یہ اہم نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ **ریکٹی کی مساوات کا عام تکملہ، تکمل کے مستقل کا ایک ہم رسم تفاعل ہوتا ہے۔**

اس کے بالعکس یہ آسانی سے ثابت ہوتا ہے (جیسا کہ مندرجۂ ذیل مثال ۶ میں بتلایا گیا ہے) کہ شکل

$$\text{ما} = \frac{\text{ج}\,\text{گ}(\text{لا}) + \text{گ}(\text{لا})}{\text{ج}\,\text{ف}(\text{لا}) + \text{فا}(\text{لا})}$$

کی کسی مساوات سے اختیاری مستقل ج کو ساقط کرنے سے ریکٹی کی مساوات حاصل ہوتی ہے۔

## ۱۶۴ — ریکٹی کی مساوات کے کسی چار مخصوص تکملوں کی

## چلیپی نسبت لا پر غیر منحصر ہوتی ہے -

ہم ان چار تکملوں کو ب (لا)، ق (لا)، ر (لا)، س (لا) لے سکتے ہیں۔ یہ تکملے $\frac{ج گ (لا) + گ (لا)}{ج ف (لا) + فا (لا)}$ سے ج کو چار خاص قیمتیں عہ، بہ، جہ، ضہ دیکر حاصل کئے گئے ہیں۔ اب

$$ب - ق = \frac{عہ گ + گ}{عہ ف + فا} - \frac{بہ گ + گ}{بہ ف + فا}$$

$$= \frac{(عہ - بہ)(گ فا - ف گ)}{(عہ ف + فا)(بہ ف + فا)}$$

اور اسی طرح اس کے مشابہ جملے، ب، ق، ر، س میں سے کسی دو کے دوسرے فرقوں کے لیے حاصل ہوتے ہیں۔ جب ہم ان کی چلیپی نسبت لیتے ہیں تو وہ سب اجزائے ضربی جن میں لا آتا ہے کٹ جاتے ہیں اور

$$\frac{(ب - ق)(ر - س)}{(ب - س)(ر - ق)} = \frac{(عہ - بہ)(جہ - ضہ)}{(عہ - ضہ)(جہ - بہ)} = ج \text{ (فرض کرو)}$$

حاصل ہوتا ہے جس میں ج، لا پر منحصر نہیں ہے -

## ۱۶۵ - حل کا طریقہ جبکہ تین مخصوص تکملے معلوم ہوں -

فرض کرو کہ یہ تکملے ق (لا)، ر (لا)، س (لا) ہیں۔ تب پچھلے نتیجے سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ عام حل

$$ج = \frac{\{ما - ق (لا)\}\{ر (لا) - س (لا)\}}{\{ما - س (لا)\}\{ر (لا) - ق (لا)\}}$$

ہے جہاں ب (لا) کی بجائے ما درج کیا گیا ہے۔ اس لیے اس صورت میں عام حل کو اعمال تکمل کے بغیر حاصل کیا گیا ہے -

## ۱۶۶ - حل کا طریقہ جبکہ دو مخصوص تکملے معلوم ہوں

فرض کرو کہ یہ تکملے ق (لا) اور ر (لا) ہیں۔

تب $\text{ما}_1 = \text{ف} + \text{ق}\,\text{ما} + \text{ر}\,\text{ما}^2$

اور $\text{ق}_1 = \text{ف} + \text{ق}\,\text{ق} + \text{ر}\,\text{ق}^2$

$\therefore \quad \text{ما}_1 - \text{ق}_1 = (\text{ما} - \text{ق})\{\text{ق} + (\text{ما} + \text{ق})\,\text{ر}\}$

اسی طرح $\text{ما}_1 - \text{ر}_1 = (\text{ما} - \text{ر})\{\text{ق} + (\text{ما} + \text{ر})\,\text{ر}\}$

اس لیے $\dfrac{\text{ما}_1 - \text{ق}_1}{\text{ما} - \text{ق}} - \dfrac{\text{ما}_1 - \text{ر}_1}{\text{ما} - \text{ر}} = (\text{ق} - \text{ر})\,\text{ر}$

اس سے حاصل ہوتا ہے

$\text{لوگ}\ \dfrac{\text{ما} - \text{ق}}{\text{ما} - \text{ر}} = \text{ج} + \int (\text{ق} - \text{ر})\,\text{ر}\ \text{ڈلا}$

پس اس صورت میں عام حل کے لیے ایک عمل تکملہ کی ضرورت ہے۔

## (۲۰۲) ۱۶۷ — حل کا طریقہ جبکہ ایک مخصوص تکملہ معلوم ہو۔

فرض کرو کہ یہ تکملہ ق (لا) ہے۔

$\text{ما} = \text{ق}(\text{لا}) + \dfrac{1}{\text{ی}}$ درج کرنے سے[1] مساوات (۱)

$\text{ق}_1 - \dfrac{\text{ی}_1}{\text{ی}^2} = \text{ف} + (\text{ق} + \dfrac{1}{\text{ی}})\,\text{ق} + (\text{ق}^2 + \dfrac{2\text{ق}}{\text{ی}} + \dfrac{1}{\text{ی}^2})\,\text{ر}$

میں مستحیل ہوتی ہے۔ لیکن چونکہ ق (لا) ایک تکملہ ہے اس لیے

$\text{ق}_1 = \text{ف} + \text{ق}\,\text{ق} + \text{ق}^2\,\text{ر}$

[1] یہ طریقہ بناوٹی معلوم ہوتا ہے۔ زیادہ فطری (لیکن زیادہ طویل) طریقہ میں پہلے ما = ق (لا) + ۶ رکھا جاتا ہے جس سے ریکیٹی کی شکل کی ایک مساوات حاصل ہوگی جس میں ف کی بجائے صفر ہوگا۔ لیکن یہ برنولی کی مساوات کی ایک خاص صورت ہے (دفعہ ۲۱) اور حل کے معمولی طریقہ میں اندراج $\frac{1}{۶}$ = ی کی ضرورت ہوتی ہے۔ ان دونوں اندراجات کو ملانے سے ہمیں متن میں دیا ہوا اندراج حاصل ہوتا ہے۔

تفرق پیا کرنے اور $ی^2$ سے ضرب دینے پر حاصل ہوتا ہے

$$-ی_1 = ی ق + (۲ ی ق + ۱) ر$$

یا $$ی_1 + (ق + ۲ ق ر) ی = - ر$$

یہ ایک خطی مساوات ہے جس کو ایک متکمل جزو ضربی قو {$ر$(ق+۲ق ر) فرلا}

کے استعمال سے حل کیا جا سکتا ہے۔ اس جزو ضربی کو معلوم کرنے میں ایک عمل تکمل کی ضرورت ہے اور حل کو مکمل کرنے کے لیے دوسرے کی اور اس طرح کل دو اعمال تکمل کی ضرورت ہے۔

## حل طلب مثالیں۔

امثلہ ۱ تا ۵ میں طالب علم کو ابتدائی اصولوں پر کام کرنا چاہئے اور اوپر کے طریقوں کو استعمال کرنا چاہئے۔ وہ صرف نتیجوں کو بیان نہ کرے اور صرف اندراج سے کام نہ لے۔

(۱) ایک خطی مساوات میں تحویل کر کے ثابت کرو کہ

$$ما_1 = -۲ - ۵ ما - ۲ ما^2$$

کا حل $$۲ ما (ج قو^{۳لا} + ۱) = - (ج قو^{۳لا} + ۴)$$

ہے۔

(۲) ثابت کرو کہ $$لا^2 ما_1 + ۲ - ۲ لا ما + لا^2 ما^2 = ۰$$

کا حل $$ما (لا^2 + ج لا) = ۲ لا + ج$$ ہے۔

(۳) ثابت کرو کہ $ما_1 = ۱ + ما^2$ کا ایک تکملہ مس لا ہے اور اس لیے اس کے حل کو عام شکل

$$ما (ج - مس لا) = ج مس لا + ۱$$

میں حاصل کرو۔

(۴) ثابت کرو کہ مستقل ک کی دو قیمتیں ہیں جن کے لیے لا$^2$ (ما$_1$ + ما$^2$) = ۲ کا ایک تکملہ $\frac{ک}{لا}$ ہے اور اس لیے عام حل حاصل کرو۔

[ک = ۲ یا -۱، ما (ج لا$^4$ - لا) = ۲ ج لا$^3$ + ۱]

(۵) ثابت کرو کہ لا (لا$^2$-۱) ما$_1$ + لا$^2$ - (لا$^2$-۱) ما - ما$^2$ = ۰ کے تین تکملے ۱، لا، لا$^2$ ہیں اور اس لیے عام حل

ما (لا + ج) = لا + ج لا$^2$

حاصل کرو۔

(۶) مساوات ما = $\frac{ج گ (لا) + گ (لا)}{ج ف (لا) + فا (لا)}$ سے اختیاری مستقل ج ساقط کر کے ریکیٹی کی مساوات

(گ فا - گ ف) ما$_1$ = (گ گ$_1$ - گ$_1$ گ)

+ (گ ف - گ$_1$ ف - گ فا$_1$ + گ$_1$ فا) ما + (ف فا$_1$ - ف$_1$ فا) ما$^2$

حاصل کرو۔

(۷) ثابت کرو کہ ریکیٹی کی مساوات

ما$_1$ + ب ما$^2$ = ج لا$^م$

محدود رقموں میں تکمل کی جا سکتی ہے جبکہ م = ۰۔

[ما ک (ق$^{۲ لا ک}$ + ۱) = ج (ق$^{۲ لا ک}$ - ۱)، جہاں ک = $\sqrt{ب ج}$، اگر ب ج مثبت ہو۔

ما ک = ج مس (-ک لا)، جہاں ک = $\sqrt{-ب ج}$ اگر ب ج منفی ہو۔

ما = ج لا + ۱، اگر ب = ۰۔

$$ما (ب لا + ا) = ا ، اگر ج = ۰]$$

(۸) ثابت کرو کہ استحالہ $ما = \frac{ی}{لا}$ سے ریکٹی کی مساوات

$$لا ی_ا - ی + ب ی^۲ = ج لا^{م+۲}$$

میں تحویل ہوتی ہے اور اس لیے ثابت کرو کہ یہ آخری مساوات محدود رقموں میں تکمل کی جاسکتی ہے اگر م = ۰.

[مثال ۷ کا نتیجہ استعمال کرو۔]

(۹) اندراج $ی = ما لا^{ع}$ سے مساوات

$$لا ی_ا - ا ی + ب ی^۲ = ج لا^{ن}$$

کو

$$لا^{ا-ع} ما_ا + ب ما^۲ = ج لا^{ن-۲ع}$$

میں مستحیل کرو۔

ایک مزید اندراج $لا = لا^{ع}$ سے ریکٹی کی شکل کی ایک مساوات حاصل کرو جس میں ب، ج، م کی بجائے علی الترتیب $\frac{ب}{ا}$، $\frac{ج}{ا}$، $\frac{ن-۲ا}{ا}$ ہوں۔ اس لیے ثابت کرو کہ اس مثال کی پہلی مساوات کو محدود رقموں میں تکمل کیا جاسکتا ہے اگر ن = ۲ا۔

(۱۰) ثابت کرو کہ اندراج $ی = \frac{ا}{ب} + \frac{لا^{ن}}{ع}$ سے مثال (۹) کی پہلی مساوات مشابہ شکل کی مساوات میں مستحیل ہوتی ہے لیکن اس میں ا، ب، ج کی بجائے علی الترتیب ن + ا، ج، ب ہوتے ہیں۔ اس لیے ثابت کرو کہ ان میں سے کسی مساوات کو محدود رقموں میں تکمل کیا جاسکتا ہے اگر ن = ۲ا یا ن = ۲ (ن + ا)۔ اس استدلال کو دہرا کر ثابت کرو کہ مثال (۹) کی پہلی مساوات محدود رقموں میں تکمل پذیر

ہے اگر ن = ۲ (س ن + ۱) جہاں س (ذیل کی مثالوں میں بھی) صفر یا کوئی مثبت صحیح عدد ہے۔

(۱۱) ثابت کرو کہ اندراج ی = $\frac{لا^{ن}}{ع}$ سے مثال (۹) کی مساوات مشابہ شکل کی ایک مساوات میں مستحیل ہوتی ہے لیکن اس میں ا، ب، ج کی بجائے علی الترتیب ن - ا، ج، ب ہوتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان میں سے کسی مساوات کو محدود رقموں میں تکمل کیا جا سکتا ہے اگر

ن = ۲ (س ن - ۱)

(۱۲) مثالوں (۹)، (۱۰)، (۱۱) کے نتیجوں سے ثابت کرو کہ ریکٹی کی مساوات محدود رقموں میں تکمل پذیر ہے اگر م + ۲ = ۲س (م + ۲) ± ۲ -

ثابت کرو کہ یہ نتیجہ م = $\frac{-۴ر}{۲ر \pm ۱}$ کے مماثل ہے جہاں س کی طرح ر بھی صفر یا کوئی مثبت صحیح عدد ہے یا $\frac{۲}{م + ۲}$ ہے جو ایک طاق صحیح عدد (مثبت یا منفی) ہے۔

(۱۳) ثابت کرو کہ اندراجات ما = $\frac{۱}{ب لا} + \frac{۱}{لا^{۲} ما}$، لا = $لا^{م+۳}$ (۲۰۵)

سے ریکٹی کی مساوات مشابہ شکل کی دوسری مساوات میں مستحیل ہوتی ہے لیکن اس میں ب، ج، م کی بجائے علی الترتیب $\frac{ج}{م+۳}$، $\frac{ب}{م+۳}$، $-\frac{م+۴}{م+۳}$ مندرج ہوتے ہیں۔ اس سے یہ اخذ کرو کہ اگر م کی شکل $-\frac{۴س}{۲س - ۱}$ ہو تو اس استحالہ سے س، س - ا میں بدل جاتا ہے۔ س کے ایسے استحالوں پر غور کر کے ثابت کرو کہ اس صورت میں ریکٹی کی مساوات محدود رقموں میں تکمل پذیر ہے۔

(۱۴) ثابت کرو کہ اندراجات ما = $\frac{۱}{ما}$، لا = لا^{م+۱} سے ریکٹی کی مساوات مشابہ شکل کی دوسری مساوات میں مستحیل ہوتی ہے لیکن اس میں ب، ج، م کی بجائے علی الترتیب $\frac{ج}{م+۱}$، $\frac{ب}{م+۱}$، $\frac{م}{م+۱}$ - مندرج ہوتے ہیں۔ اس سے اخذ کرو (مثال ۱۳ کا نتیجہ استعمال کر کے) کہ ریکٹی کی مساوات محدود رقموں میں تکمل پذیر ہے اگر م شکل - $\frac{۴س}{۲س+۱}$ کا ہو۔

## ۱۶۸ - کُل تفرقی مساوات ف فرلا + ق فرما + ر فری = ۰ کو تکمل کرنے کے دو طریقے۔

ہم گیارہویں باب میں اس مساوات کے تکمل پذیر ہونے کی ضروری اور کافی شرط بیان کر چکے ہیں اور نیز تکملہ کو حاصل کرنے کا ایک عام طریقہ بیان کر چکے ہیں جبکہ یہ شرط پوری ہو۔ اب ہم دو اور طریقے درج کریں گے۔ ان میں سے ایک میں (جس میں متکمل جزو ضربی سے کام لیا جاتا ہے) یہ نقص ہے کہ اس کو صرف بعض متجانس مساواتوں کے لیے استعمال کیا جا سکتا ہے لیکن ان مساواتوں کے لیے غالباً یہ طریقہ سادہ ترین ہے۔ دوسرا (میر کا طریقہ) بالکل عام ہے اس میں صرف ایک عمل تکمل کی ضرورت پڑتی ہے اور اس لیے اس میں دوسرے عام طریقہ (دفعہ ۱۱۷) کی بہ نسبت ایک نظری فائدہ ہے۔ لیکن مبتدی کو اس کے استعمال کا مشورہ نہیں دیا جا سکتا کیونکہ جس واحد عمل تکمل کی اس میں ضرورت پڑتی ہے اس کو (ان جملوں کے عدم تشاکل کی وجہ سے جو واقع ہوتے ہیں) عمل میں لانے کے لیے ان دو اعمال تکمل کی بہ نسبت جو دفعہ ۱۱۷ کے طریقے میں مطلوب ہوتے

ہیں اکثر زیادہ دقتیں پیش آتی ہیں۔ اس کے علاوہ اگر اس طریقہ کو بعض شرطوں کا کافی لحاظ کئے بغیر استعمال کیا جائے تو ایسے نتیجے حاصل ہو سکتے ہیں جو بالکل غلط ہوں۔

## ۱۶۹۔ متجانس تفاعلوں کے لیے متکمل جزو ضربی۔

فرض کروکہ

ف فرلا + ق فرما + ر فری = ۰ ، ........ (۱)

ایک تکمل پذیر مساوات ہے جس میں ف، ق، ر ایک ہی درجہ ن کے، لا، ما، ی میں متجانس تفاعل ہیں یعنے ف، ق، ر کو شکلوں

لاⁿ ف (ع، و)، لاⁿ گ (ع، و)، لاⁿ ھ (ع، و)

میں علی الترتیب بیان کیا جاسکتا ہے جہاں ع = ما/لا اور و = ی/لا

اب فرما = ع فرلا + لا فرع، فری = و فرلا + لا فرو

اس لیے مساوات (۱) ہو جاتی ہے

لاⁿ {ف (ع، و) فرلا + گ (ع، و) (ع فرلا + لا فرع)
+ ھ (ع، و) (و فرلا + لا فرو)} = ۰

یعنے لاⁿ {(ف + ع گ + و ھ) فرلا + لا (گ فرع + ھ فرو)} = ۰

اس کو لاⁿ⁺¹ (ف + ع گ + و ھ) سے تقسیم کرو اور اگر یہ جملہ صفر نہ ہو تو حاصل ہوگا

فرلا/لا + (گ فرع + ھ فرو)/(ف + ع گ + و ھ) = ۰ ، ........ (۲)

اب چونکہ مساوات (۱) تکمل پذیر ہے اس لیے مساوات (۲) بھی تکمل پذیر ہے خواہ فوری یا ایک متکمل جزو ضربی سے ضرب

(۲۰۶)

دینے کے بعد - مساوات (۲) کی پہلی رقم میں صرف لا شامل ہے اور دوسری رقم میں صرف متغیر ع اور و - ایک متغیر دوسرے متغیروں سے جدا کیا ہوا ہے اور یہ جدائی جو عمل تکمل کے لیے مناسب ترین شکل ہے کسی جزو ضربی (الا صرف ایک مستقل کے) سے ضرب دینے پر باقی نہیں رہے گی - اس لیے کسی تکمل جزو ضربی کو تلاش کرنے کی ضرورت نہیں ہے اور مساوات (۲) اپنی اس شکل میں ٹھیک ہے - لیکن متغیروں کی تبدیلی کے علاوہ مساوات (۲) کو مساوات (۱) سے جزو ضربی $لا^{ن+۱}$ (ف + ع گ + و ھ) سے تقسیم کر کے حاصل کیا گیا تھا - یہ جزو ضربی ف لا + ق ما + ر ی کے مساوی ہے - اس لیے تکمل پذیر متجانس مساوات

$$ف\ فر لا + ق\ فر ما + ر\ فر ی = ۰$$

کا مشکل جزو ضربی $\frac{۱}{ف لا + ق ما + ر ی}$ ہے الا آنکہ ف لا + ق ما + ر ی = ۰ -

اس کے مشابہ مسئلہ مساوات

$$ف_۱\ فر لا_۱ + ف_۲\ فر لا_۲ + \dots + ف_ن\ فر لا_ن = ۰$$

کے لیے درست ہے -

**مثال** - $(ما^۲ + ما ی)\ فر لا + (ی لا + ی^۲)\ فر ما + (ما^۲ - لا ما)\ فر ی = ۰$

یہاں $ف لا + ق ما + ر ی = لا ما^۲ + لا ما ی + لا ما ی + ما ی^۲$
$+ ما^۲ ی - لا ما ی$
$= ما (لا ما + لا ی + ی^۲ + ما ی)$
$= ما (لا + ی)(ما + ی)$

ہیں اکثر زیادہ دقتیں پیش آتی ہیں۔ اس کے علاوہ اگر اس طریقہ کو بعض شرطوں کا کافی لحاظ کئے بغیر استعمال کیا جائے تو ایسے نتیجے حاصل ہو سکتے ہیں جو بالکل غلط ہوں۔

## ۱۶۹۔ متجانس تفاعلوں کے لیے متکمل جزو ضربی۔

فرض کرو کہ

ف فرلا + ق فرما + ر فری = ۰، ........ (۱)

ایک تکمل پذیر مساوات ہے جس میں ف، ق، ر ایک ہی درجہ ن کے لا، ما، ی میں متجانس تفاعل ہیں یعنے ف، ق، ر کو شکلوں

لا$^{ن}$ ف (ع، و)، لا$^{ن}$ گ (ع، و)، لا$^{ن}$ ھ (ع، و)

میں علی الترتیب بیان کیا جا سکتا ہے جہاں ع = ما/لا اور و = ی/لا

اب فرما = ع فرلا + لا فرع، فری = و فرلا + لا فرو

اس لیے مساوات (۱) ہو جاتی ہے

لا$^{ن}${ف (ع، و) فرلا + گ (ع، و) (ع فرلا + لا فرع)
+ ھ (ع، و) (و فرلا + لا فرو)} = ۰

یعنے لا$^{ن}${(ف + ع گ + و ھ) فرلا + لا (گ فرع + ھ فرو)} = ۰

اس کو لا$^{ن+۱}$ (ف + ع گ + و ھ) سے تقسیم کرو اور اگر یہ جملہ صفر نہ ہو تو حاصل ہوگا

فرلا/لا + (گ فرع + ھ فرو)/(ف + ع گ + و ھ) = ۰، ........ (۲)

(۲۰۶)

اب چونکہ مساوات (۱) تکمل پذیر ہے اس لیے مساوات (۲) بھی تکمل پذیر ہے خواہ فوری یا ایک متکمل جزو ضربی سے ضرب

دینے کے بعد - مساوات (۲) کی پہلی رقم میں صرف لا شامل ہے اور دوسری رقم میں صرف متغیر ع اور و - ایک متغیر دوسرے متغیروں سے جدا کیا ہوا ہے اور یہ جدائی جو عمل تکمل کے لیے مناسب ترین شکل ہے کسی جزو ضربی (الا صرف ایک مستقل کے) سے ضرب دینے پر باقی نہیں رہے گی - اس لیے کسی متکمل جزو ضربی کو تلاش کرنے کی ضرورت نہیں ہے اور مساوات (۲) اپنی اس شکل میں ٹھیک ہے - لیکن متغیروں کی تبدیلی کے علاوہ مساوات (۲) کو مساوات (۱) سے جزو ضربی $لا^{ن+۱}$ (ف + ع گ + و ھ) سے تقسیم کر کے حاصل کیا گیا تھا - یہ جزو ضربی ف لا + ق ما + ر ی کے مساوی ہے - اس لیے تکمل پذیر متجانس مساوات

$$ف\ فرلا + ق\ فرما + ر\ فری = ۰$$

کا متکمل جزو ضربی $\frac{۱}{ف لا + ق ما + ر ی}$ ہے الا آنکہ ف لا + ق ما + ر ی = ۰ -

اس کے مشابہ مسئلہ مساوات

$$ف_۱ فرلا_۱ + ف_۲ فرلا_۲ + \dots + ف_ن فرلا_ن = ۰$$

کے لیے درست ہے -

**مثال** - $(ما^۲ + ما ی)$ فرلا + $(ی لا + ی^۲)$ فرما + $(ما^۲ - لا ما)$ فری = ۰ -

یہاں ف لا + ق ما + ر ی = $لا ما^۲$ + لا ما ی + لا ما ی + $ما ی^۲$

$+ ما^۲ ی$ - لا ما ی

$= ما (لا ما + لا ی + ی^۲ + ما ی)$

$= ما (لا + ی) (ما + ی)$

اس لیے متکمل جزو ضربی $\frac{۱}{\text{ما}(\text{لا}+\text{ی})(\text{ما}+\text{ی})}$ ہے۔

تفرقی مساوات کو اس متکمل جزو ضربی سے ضرب دینے پر حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{لا}+\text{ی}}+\frac{\text{ی فرما}}{\text{ما}(\text{ما}+\text{ی})}+\frac{(\text{ما}-\text{لا})\,\text{فری}}{(\text{لا}+\text{ی})(\text{ما}+\text{ی})}=۰$$

یعنی
$$\frac{\text{فرلا}}{\text{لا}+\text{ی}}+\frac{\{(\text{ما}+\text{ی})-\text{ما}\}\text{فرما}}{\text{ما}(\text{ما}+\text{ی})}+\frac{\{(\text{ما}+\text{ی})-(\text{لا}+\text{ی})\}\,\text{فری}}{(\text{لا}+\text{ی})(\text{ما}+\text{ی})}=۰$$

یا
$$\frac{\text{فرلا}}{\text{لا}+\text{ی}}+\frac{\text{فرما}}{\text{ما}}-\frac{\text{فرما}}{\text{ما}+\text{ی}}+\frac{\text{فری}}{\text{لا}+\text{ی}}-\frac{\text{فری}}{\text{ما}+\text{ی}}=۰$$

یا
$$\frac{\text{فرلا}+\text{فری}}{\text{لا}+\text{ی}}+\frac{\text{فرما}}{\text{ما}}-\frac{\text{فرما}+\text{فری}}{\text{ما}+\text{ی}}=۰$$

$\therefore$ لوک (لا+ی) + لوک ما ـ لوک (ما+ی) = لوک ج

$\therefore$ ما (لا+ی) = ج (ما+ی)

# حل طلب مثالیں

حسب ذیل مثالوں پر یہ طریقہ استعمال کرو:

مثال (۲) صفحہ ۲۷۱، مثال (۱۰) ۱، (۱۰) ۲، اور مثال ۱۱ صفحہ ۲۸۵

## ۱۷۰۔ میر کا طریقہ ـ کُلی تفرقی مساوات کو شکل

$$\text{فری}=\text{ف}(\text{لا، ما، ی})\,\text{فرلا}+\text{ق}(\text{لا، ما، ی})\,\text{فرما}$$

میں لکھو۔ یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ اگر تکمل پذیری کی شرط (دفعات ۱۱۸ اور ۱۱۹) پوری ہو اور اگر تفاعل ف اور تفاعل ق ایک نقطہ (لا، ما، ی) کے قرب میں کُل شکلی Holomorphic ہوں تو تفرقی مساوات کا (۲۰۷)

ایک حل (اور صرف ایک) موجود ہوتا ہے جو اس نقطہ میں سے گذرنے والی ایک سطح کو تعبیر کرتا ہے[1]۔ میر کے طریقہ میں ایک متغیر مستوی نقطہ (لا. ما. ی.) میں سے محوری کے متوازی کھینچا جاتا ہے اور پھر اِس متغیر مستوی اور سطح کا تقاطع کا منحنی معلوم کرکے سطح کو متعین کیا جاتا ہے۔ لا. اور ما. کے لیے سادہ سے سادہ قیمتیں جو کُل شکلی شرط کے مطابق ہوں لی جاتی ہیں مثلاً صفر اور صفر یا صفر اور ایک یا ایک اور ایک۔ آخری نتیجہ میں ی. اختیاری مستقل کے طور پر واقع ہوتا ہے۔ یہ عمل حسب ذیل مثالوں سے بہترین طریقہ پر ذہن نشین ہوگا۔ [بلا شبہ یہ مساواتیں فوراً حل کی جا سکتی ہیں لیکن اگر زیادہ مشکل مثالوں کا انتخاب کیا جاتا تو اس طریقہ کا اصول اُن پیچیدہ اشمال تکمل کی تفصیلات میں پنہاں ہو جاتا جو میئر کے طریقہ میں اکثر داخل ہوتے ہیں۔]

**مثال (۱)** فری = ۲ لا فرلا + ۴ ما فرما، ..........(۱)

تکمل پذیری کی شرط

۲ لا (۰ - ۰) + ۴ ما (۰ - ۰) - ۱ (۰ - ۰) = ۰

ہے جو پوری ہوتی ہے۔ ہم لا. = ۰ اور ما. = ۰ لے سکتے ہیں کیونکہ تفاعل ۲ لا اور ۴ ما نقطہ (۰، ۰، ی.) کے قرب میں کُل شکلی ہیں۔ وہ مستوی جو محوری کے متوازی اِس نقطہ میں سے گذرتا ہے

ما = م لا، فرما = م فرلا، ..........(۲)

سے حاصل ہوتا ہے۔

مساواتوں (۱) اور (۲) سے

فری = (۲ + ۴ م$^2$) لا فرلا

ی - ی. = (۱ + ۲ م$^2$) لا$^2$، .........(۳)

[1] گرسا (Cours d'Analyse Mathematique) جلد دوم چوتھا اڈیشن دفعات ۴۸۵ اور ۴۸۶

جہاں تکمل کے مستقل کا تعین اِس شرط کے ذریعہ کیا گیا ہے کہ ی = یِ جبکہ لا = ۰۔

مساوات (۳) ایک اسطوانہ کو (جس کے مکوِن محور ما کے متوازی ہیں) تعبیر کرتی ہے جو مستوی (۲) اور مطلوبہ سطح کے تقاطع کے منحنی میں سے گذرتا ہے۔

مساواتوں (۲) اور (۳) سے م کو ساقط کیا جائے تو سطح کی مساوات

$$ی - یِ = لا^۲ + ۲ ما^۲$$

حاصل ہوتی ہے۔

یہ مساوات (۱) کا عام حل ہے اگر یِ کو اختیاری مستقل کے طور پر لیا جائے۔

**مثال (۲)** $فری = \frac{۳ ی فرلا}{لا} - \frac{۲ ی فرما}{ما}$، ...... (۴)

تکمل پذیری کی شرط

$$\frac{۳ ی}{لا}\left(\frac{-۲}{ما} - ۰\right) - \frac{۲ ی}{ما}\left(۰ - \frac{۳}{لا}\right) - ۱(۰ - ۰) = ۰$$

ہے جو پوری ہوتی ہے۔ ہم لاِ = ۰، ماِ = ۰ نہیں لے سکتے کیونکہ اس سے تفاعل $\frac{۳ ی}{لا}$ اور $\frac{۲ ی}{ما}$ لامتناہی ہو جاتے ہیں۔ لیکن لاِ = ۱ اور ماِ = ۱ لیے جا سکتے ہیں۔

(۲۰۸) رکھو $ما = ۱ + م (لا - ۱)$، ......... (۵)

مساوات (۴) ہو جاتی ہے

$$فری = \frac{۳ ی فرلا}{لا} - \frac{۲ ی م فرلا}{۱ + م (لا - ۱)}$$

∴ لوک ی - لوک یِ = ۳ لوک لا - ۲ لوک $\{۱ + م (لا - ۱)\}$

∴ $ی \{۱ + م (لا - ۱)\}^۲ = یِ لا^۳$، ......... (۶)

(۵) اور (۶) سے م کو ساقط کرنے پر مطلوبہ حل

ی ما$^2$ = ی. لا$^2$

حاصل ہوتا ہے۔

یہ قابل ذکر ہے کہ اس قبیل کی تمام سطحیں نقطہ (۰، ۰، ی.) میں سے گذرتی ہیں۔

## حل طلب مثالیں

(۱) ثابت کرو کہ اوپر کی مثال (۲) کو حل کرنے کی سعی جبکہ نقطہ (۰، ۰، ی.) کو ثابت نقطہ کے طور پر لیا گیا ہو ناکام ہو جاتی ہے جبکہ ہم مساوات (۶) کے متناظر اسطوانہ کو اس نقطہ میں سے گذارنے کی کوشش کرتے ہیں۔

(۲) حل کرو ما$^2$ فری = ما فرلا + (ما$^2$ - لا) فرما

[ثابت نقطہ کو (۰، ۱، ی.) کے طور پر منتخب کرنے سے صحیح نتیجہ

ما (ی - ی.) = ما (ما - ۱) + لا

حاصل ہوتا ہے۔ نقطہ (۰، ۰، ی.) کے انتخاب سے غیر صحیح نتیجہ

ی - ی. = ما حاصل ہوگا۔]

(۳) حل کرو (۱ + لا ما) فری = (۱ + ما ی) فرلا + لا (ی - لا) فرما

[نتیجہ ی = لا + ی. (۱ + لا ما)]

## ۱۷۱ - دوسرے رتبہ کی خطی تفرقی مساواتیں۔

حسب ذیل بحث (دفعات ۱۷۱ تا ۱۷۷) نویں اور دسویں باب کا تتمہ ہے۔ لا کے لحاظ سے تفرقوں کو تعبیر کرنے کے لیے لاحقے استعمال کئے جائیں گے۔ ھ (لا)، ک (لا)، ز (لا)، ھ (لا)، ک (لا) سے یا صرف ھ، ک، ز، ھ اور ک سے لا کے ایسے تفاعل تعبیر ہوں گے جو مبداء پر کل شکلی ہیں، (یعنے ان کو قوت کے ایسے سلسلوں

میں پھیلایا جا سکتا ہے جو ایک کافی چھوٹے دائرہ کے اندر جس کا مرکز مبدا پر ہو مستدق ہیں) اور نیز ان تفاعلوں میں یہ خاصیت ہے کہ وہ مبدا پر معدوم نہیں ہوتے - ان کے متکافی بھی کل شکلی ہوں گے اور اسی طرح ان کے لوکارثمی مشتق مثلاً

$$\frac{ض' (لا)}{ض (لا)}$$

بھی کُل شکلی ہوں گے۔

جب کبھی ہم نادر نقطوں کا ذکر کریں تو یہ سمجھا جائے کہ یہ نقطے منفرد ہیں یعنے یہ کہ کافی چھوٹے نصف قطر کا ایک دائرہ جس کا مرکز ان میں سے کوئی نقطہ ہو کھینچا جائے تو دوسرے تمام نقطے اس کے باہر ہوں گے۔

**۱۷۲ - باقاعدہ تکملے** - صفحہ ۲۱۶ پر یہ بیان کیا گیا تھا کہ فرابینیس کی شکلوں کے حلوں کو **باقاعدہ** تکملے کہا جاتا ہے - اب ہم غور کریں گے کہ اس کا کیا مفہوم ہے - فرض کرو کہ ہم ان جوابوں کی شکلوں کا امتحان کرتے ہیں جو نویں باب کی مثالوں سے حاصل ہوئے ہیں - اگرچہ ہم نے حل کے عمل میں چار صورتوں[۵۲] میں امتیاز کیا ہے لیکن فی الحقیقت (۲۰۹)

[۵۱] دیکھو براموچ کی کتاب Infinite Series دوسرا ایڈیشن دفعات ۵۴ اور ۸۴ -

[۵۲] m ویں رتبہ کی مساواتوں کے لیے فرابینس کے طریقہ میں (دیکھو Crelle Vol. LXXVI یا فورسائتھ کی کتاب "مساواتوں کا نظریہ" جلد چہارم صفحہ ۷۸ تا ۹۳ ' یا اِنس کی کتاب "معمولی تفرقی مساواتیں" صفحہ ۳۹۶ تا ۴۰۲) نظری بحث کے لیے صرف دو صورتوں میں تمیز کرنا سہولت بخش ہے ' ان میں سے دوسری صورت میں ہماری (۲) ' (۳) اور (۴) صورتیں شامل ہیں - اس دوسری صورت کو حل کرتے ہیں اس سلسلہ کو جس کے سرج کے تفاعل ہیں ف (ج + ۱) ف (ج + ۲) . . . .

(ملاحظہ ہو بقیہ بر صفحہ آیندہ)

کامل ابتدائی ا ۶ + ب و کی صرف دو مختلف شکلیں تھیں - ایک تکملہ (فرض کرو ع) ہمیشہ شکل لاَ ع صہ (لا) کا تھا - دوسرا تکملہ، و چند مثالوں میں اس کے مشابہ شکل کا تھا، مثلاً شکل لاَ ک (لا) کا دفعات ۹۵ اور ۹۹ میں، دوسری مثالوں میں مثلاً دفعات ۹۷ اور ۹۸ میں اس کی شکل

لاَ ع { صہ (لا) لوک لا + لاَ س ک (لا) }

تھی جہاں س ایک مثبت یا منفی صحیح عدد تھا (۱ مثال ۱ دفعہ ۹۷ میں ۴، مثال ۱ دفعہ ۹۸ میں)۔
ہم اِن شکلوں کو (دوسرے رتبہ کی خطی تفرقی مساوات کے)
اُن تکملوں کی تعریفیں قرار دیتے ہیں جو مبدا، پر باقاعدہ ہیں صرف

---

(بقیہ صفحہ گذشتہ)... ف (ج + ر) سے ضرب دیا جاتا ہے جہاں ف (ج) = ۰ قوت نمائی مساوات ہے اور ر، جس کی اصلوں میں سے کسی دو کے درمیان بڑے سے بڑا فرق ہے جہاں یہ اصلیں اس جٹ سے متعلق ہیں جن میں صحیح عددوں کا فرق ہے (دیکھو ہمارا طریقہ صورت (۳) کے لیے)۔ اس مسئلہ میں اور ج کے لحاظ سے اس کے متواتر جزئی تفرقی سروں میں علی الترتیب ان اصلوں کو درج کیا جاتا ہے جو اس طرح مرتب ہوتے ہیں کہ کسی ایک اصل اور اصل مابعد کے درمیان فرق ایک مثبت صحیح عدد ہوتا ہے یا صفر لیکن مثالوں کو اس طریقہ سے حل کرنے میں بہت زیادہ غیر ضروری کام انجام دینا پڑتا ہے اور اس لیے نویں باب میں ہم نے اس میں بہت کچھ ترمیم کی ہے بالخصوص صورت (۴) میں۔

[1] مبدا، سے مختلف نقطوں پر دفعہ ۵ ۷ ا میں بحث کی گئی ہے - بدقسمتی سے لفظ "باقاعدہ" کا مفہوم تفرقی مساواتوں میں مختلف اور تفاعلوں کے نظریہ میں مختلف ہے جس میں یہ کل شکلی کے مرادف ہے - مثلاً ایک جملہ جس میں لوک لا یا لاَ ع شامل ہو (جہاں ع صفر یا مثبت صحیح عدد نہیں ہے) مبدا پر باقاعدہ تکملہ ہوسکتا ہے لیکن اس نقطہ پر باقاعدہ تفاعل نہیں ہوسکتا۔

اس ترمیم کے ساتھ کہ س صفر بھی ہوسکتا ہے۔ اس ترمیم سے کوئی تحقیقی فرق پیدا نہیں ہوگا کیونکہ اگر س صفر ہے تو تکملہ

و = لاَعہ { ھ (لا) لوک لا + ک (لا) }

کی بجائے دو تکملوں کا خطی اجتماع

و ـ ک (۰) ع / ک (۰) = لاَعہ { ھ (لا) لوک لا + ک (لا) ـ ک (۰) / ھ (۰) ھ (لا) }

رکھ سکتے ہیں جس کی شکل مشابہ ہے سوائے اس کے کہ ک (لا) کی بجائے ایک نیا کثیر رکنی تفاعل ہے جس کا ایک جزو ضربی لا ہے۔ اس طرح و کی پہلی شکل میں یعنے لاَعہ ک (لا) میں ہم ہمیشہ عہ اور بہ کو غیر مساوی فرض کرسکتے ہیں کیونکہ اگر ایسا نہ ہو تو و کی بجائے و ـ ک (۰) / ھ (۰) ع

رکھا جاسکتا ہے جس کا ایک جزو ضربی لاَعہ+۱ ہے۔

م ویں رتبہ کی خطی تفرقی مساوات کے لیے مبدا پر باقاعدہ تکملہ کی یہ تعریف کی جاتی ہے کہ وہ شکل

لاَعہ { ھ (لا) (لوک لا)َس + لاَس ک (لا) (لوک لا)َر-۱ + ...... + لاَن ن (لا) }

کا ہوتا ہے جہاں س اور ر صفر یا کوئی صحیح عدد (مثبت یا منفی) ہیں اور ر قیمتوں ۰، ۱، ۲، ...... م-۱، میں سے کوئی اختیار کرسکتا ہے۔ اس طرح پہلے رتبہ کی مساواتوں کے لیے باقاعدہ تکملوں میں لوک لا نہیں آسکتا۔ دوسرے رتبہ کے لیے لوکارتم یا تو خطی طور پر نوع پذیر ہوگا یا بالکل موجود ہی نہ ہوگا۔ اس کو دسویں باب سے حسب ذیل طریقہ پر ماخوذ کیا جاسکتا ہے: دفعہ ۱۰۷ میں دونوں تکملے لوکارتموں سے پاک تھے۔ دفعہ ۱۱۰ میں ہم نے دوسرا تکملہ

(۲۱۰)

؎ دیکھو صفحہ ۴۱۷ کے حاشیہ کا نوٹ

شکل $لا^{ج}\sum^{\infty}$ اِن لا$^{ن}$ کے ایک سلسلہ کو ج کے لحاظ سے جزئی طور پر تفرق کرکے حاصل کیا جہاں سب اِ ج کے تفاعل ہیں اور پھر تفرق کے بعد ج کی بجائے بہ رکھا۔ نتیجہ (۱۰۱ میں بیان نہیں کیا گیا)

$$لا^{ب}\left\{\left(\sum^{\infty} اِن (بہ) لا^{ن}\right) لوک لا + \left(\sum^{\infty} \frac{جف اِن (بہ)}{جف بہ} لا^{ن}\right)\right\}$$

ہے جس کی شکل $لا^{ع}\{ م (لا) لوک (لا) + لا^{س} ک (لا)\}$ ہے۔

اگر سروں اِن (بہ) میں سے پہلے لہ سر صفر ہوں اور سروں $\frac{جف اِن (بہ)}{جف بہ}$ میں سے پہلے م سر بھی صفر ہوں تو ع = بہ + لہ اور س = م - لہ۔ یہ قابل ترجیہ ہے کہ لوک لا کا ہم جزو ضربی خود ایک تکملہ ہے۔ اِس کو بلاواسطہ ثابت کیا جا سکتا ہے۔ فرض کرو کہ تفرقی مساوات

$$ما + ما ف (لا) - ا ق (لا) = ۰ ، \quad \ldots \quad (۱)$$

ہے جہاں ف (لا) اور ق (لا) مبداء کے قریب ایکساں[له] (یعنے وحیدالقیمت) ہیں۔

اگر اِس مساوات کی دائیں جانب ہم ما کی بجائے تکملہ

$$لا^{ع}\{ م (لا) لوک لا + لا^{س} ک (لا)\} = ع لوک لا + ط \text{ (فرض کرو)}$$

درج کریں تو نتیجہ کو تکملہ کی تعریف کی رو سے متماثلاً صفر ہونا چاہئے۔

---

له اِس تفرقی مساوات میں وہ مساواتیں مخصوص صورتوں کے طور پر شامل ہیں جو نویں اور دسویں باب میں زیر بحث آچکی ہیں۔

اِس نتیجہ میں لوک لا کا ہم جزو ضربی ($ع_۲$ + $ع_۱$ ف + ع ق) ہے۔ نتیجہ میں یہ اور دوسری تمام رقمیں، اِلّا لوک لا کے، لاَ اور ایک ایکسان تفاعل کے حاصل ضرب ہیں کیونکہ ع اور ط اور اِس لیے ع، $ع_۱$، $ع_۲$، ط، $ط_۱$، $ط_۲$ اِس قسم کے حاصل ضرب ہیں اور ف اور ق ایکساں ہیں۔ اگر ہم لوک لا کے ہم جزو ضربی سے اِس تماثلہ کو تقسیم کر سکتے تو یہ لغو نتیجہ حاصل ہوتا کہ غیر یکساں تفاعل لوک لا دو ایکساں تفاعلوں کا خارج قسمت ہے یعنے خود ایک ایکساں تفاعل ہے۔ اِس لیے یہ تقسیم ناجائز ہے اور یہ صرف اُس صورت میں ہو سکتی ہے کہ ہم جزو ضربی صفر ہو، یعنے ع خود ایک تکملہ ہو۔

اِس کے مشابہ مسئلہ لوک لا کی اعلیٰ ترین قوت کے ہم جزو ضربی کے لیے جوم ویں رتبہ کی مساوات (جس کے سر مبداء کے قریب ایکساں ہوں) کے باقاعدہ تکملہ میں وقوع پذیر ہو درست ہے۔ اِس طرح ہر اُس صورت میں جس میں باقاعدہ تکملے ہوں کم از کم ایک کو لوگارثموں سے پاک ہونا چاہئے اور شکل لاَ ھ (لا) کا ہونا چاہئے۔

## (۲۱۱) ۱۷۳۔ فوش (Fuch) کا مسئلہ۔ دوسرے رتبہ کی ایک خطی تفرقی مساوات کے سر مبداء کے قریب ایکساں ہیں۔ وہ ضروری اور کافی شرط کہ اس کے تمام تکملے مبداء پر باقاعدہ ہوں یہ ہے کہ یہ مساوات شکل

$$لا^۲ ی_۲ + لا ی_۱ ف (لا) + ی ق (لا) = ۰$$

میں بیان ہو سکے جہاں ف اور ق مبدا، پر کل شکلی ہیں۔

فرابینیس کے طریقہ کی بحث (دفعات ۱۰۶ تا ۱۱۰) سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ یہ شرط کافی ہے۔ اب ہمیں یہ ثابت کرنا ہے کہ وہ ضروری ہے۔ دفعہ ۱۷۲ کی رو سے کم از کم ایک تکملہ شکل لا^ع ھ (لا) کا ہے۔

اِس کو ع (لا) سے تعبیر کرو۔ ما = ع ∫ ی فرلا رکھو اور دفعہ ۱۷۲ کی

مساوات (۱) میں اندراج کرو۔ وہ رقمیں جن میں تکمل کی علامت آتی ہے جزو ضربی (ع٫٫ + ع٫ ف + ع ق) رکھتی ہیں اور اس لیے معدوم ہوتی ہیں کیونکہ ع ایک تکملہ ہے، پس حاصل ہوتا ہے

ع٫ ی + ۲ ع ی٫ + ف ع ی = ۰ ........ (۲)

اب تکملہ ما کی شکل

لا^ج ک (لا) یا لا^ع {ھ (لا) لوک لا + لا^س ک (لا)}

ہوگی۔ اِس لیے

ما / ع (لا) = لا^(ب-ع) ک (لا) / ھ (لا) یا لوک لا + لا^س ک (لا) / ھ (لا)

= لا^(ب-ع) ھ (لا)′ یا لوک لا + لا^س ھ (لا)′ فرض کرو

∴ ی = فر/فرلا (ما/لا) = لا^(ب-ع-۱) {(ب - ع) ھ + لا ھ٫}

یا = لا^(-۱) + لا^(س-۱) (س ھ + لا ھ٫)

دونوں صورتوں میں ہم ی کو شکل[1] لا^ج ک (لا) میں لکھ سکتے ہیں

---

[1] پہلی صورت میں ج = ب - ع - ۱، دوسری صورت میں ج = - ۱ یا س - ۱ بموجب اس کے کہ س مثبت ہے یا منفی۔

جہاں ک (لا) کل شکلی ہے اگر ک (۰) ≠ ۰ پس مساوات (۲) سے

$$ف = - \frac{ی_۱}{ی} - \frac{ع_۱ ۲}{ع} = - \frac{ج}{لا} - \frac{ک_۱}{ک} - \frac{۲ ا}{لا}$$

$$- \frac{ھ_۱ ۲}{ھ} = \frac{ف(لا)}{لا}$$ فرض کرو جہاں ف مبدا پر کل شکلی ہے۔

نیز چونکہ لاعـ ھ (لا) مساوات (۱) کا ایک تکملہ ہے اس لیے

$$لا^{عـ} ھ_۲ + ۲ عـ لا^{عـ - ۱} ھ_۱ + عـ (عـ - ۱) لا^{عـ - ۲} ھ$$

$$+ (لا^{عـ} ھ_۱ + عـ لا^{عـ - ۱} ھ) ف + لا^{عـ} ھ ق = ۰$$

$$\therefore ق = \frac{۱}{لا^۲} \{ - \frac{لا^۲ ھ_۲}{ھ} - \frac{۲ عـ لا ھ_۱}{ھ} - عـ (عـ - ۱)$$

$$- (\frac{لا ھ_۱}{ھ} + عـ) ف \} = \frac{ق(لا)}{لا^۲}$$ فرض کرو

جہاں ق مبدا پر کل شکلی ہے۔

مساوات (۱) کی طرفین کو لا^۲ سے ضرب دینے اور لا ف اور لا^۲ ق کی بجائے علی الترتیب ف اور ق رکھنے سے ہمیں متذکرہ شکل حاصل ہوتی ہے۔

## حل طلب مثالیں

(۲۱۲) $ما = ا لا^{\frac{۱}{۲}} + ب لا^{\frac{۱}{۲}}$ لوک لا سے اختیاری مستقلوں کو ساقط کر کے تفرقی مساوات

$$۸ لا^۲ (۴ - لوک لا) ما_۲ + ۲ لا (۸ - لوک لا) ما_۱ - ما لوک لا = ۰$$

حاصل کرو جو" اس لیے" دوسرے رتبہ کی ایک خطی تفرقی مساوات ہے جس کے تمام تکملے مبداء پر باقاعدہ ہیں لیکن اس کو اُس شکل میں بیان نہیں کیا جا سکتا جو فوش کے مسئلہ میں مذکور ہے۔

[اِس مثال سے اُس مفروضہ کی اہمیت معلوم ہوتی ہے کہ تفرقی مساوات کے سر مبداء کے قریب ایکساں ہونے چاہئیں۔ حقیقت میں اس سے ایک سخت قید عائد ہوتی ہے کیونکہ شکل

ما = ۱ لاآ ز (لا) + ب لاآ {ھ (لا) لوک لا + لاس ک (لا)}

کے تمام کامل ابتدائی خارج ہو جاتے ہیں اِلّا اُس خاص صورت کے جہاں لاآ ز (لا)، لاآ ھ (لا) کا صرف ایک عددی ضعف ہو۔]

## ۱۷۴ - معمولی اور نادر نقطے

یہ ہو سکتا ہے کہ ف اور ق مبداء پر معدوم ہوں (برخلاف دوسرے [illegible] کے)۔ بالخصوص اگر ف، لا سے اور ق، لاآ سے تقسیم پذیر ہو تو مساوات کی ابتدائی شکل (۱) میں ف اور ق [illegible] اس صورت میں مبداء کو ایک معمولی نقطہ کہا جاتا ہے اور فرابینیس کا طریقہ استعمال کرنے پر ایک قوت نمائی مساوات حاصل ہو گی جس کی اصلیں صفر اور ایک ہونگی اور ان سے (حسب دفعہ ۹۹) ایک غیر متعین سر اور بالآخر دو خطی طور پر غیر تابع تکملے حاصل ہوں گے جو دونوں قوت کے سلسلے ہوں گے۔ نہ لوکارتم واقع ہو سکتے ہیں نہ ایسے قوت نما جو [illegible] عددوں (یا صفر) سے مختلف ہوں۔ لیکن یہ ہو سکتا ہے کہ قوت نمائی مساوات کی اصلیں صفر اور ایک ہوں اور مبداء ایک معمولی نقطہ نہ ہو جیسا کہ دفعہ ۹۸ کی مثال ۲ میں۔

وہ نقطے جو معمولی نہ ہوں نادر کہلاتے ہیں۔ اگر ایک نادر نقطہ پر (جس کے قرب میں مساوات کے سر ایکساں ہیں) تمام تکملے باقاعدہ ہوں تو اُس کو باقاعدہ نادر نقطہ کہتے ہیں۔

یہ تعریفیں خود تفرقی مساوات کے نادر نقطوں سے متعلق ہیں یعنے اس کے سروں سے جبکہ مساوات کو شکل (۱) میں لکھا گیا ہو۔ معمولی نقطوں کی بحث سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ تکملوں کی ندرتیں مساوات کی ندرتیں ہی ہیں لیکن اس کا عکس درست نہیں ہے۔ مثلاً $\text{ما} = \text{ا}\,\text{لا}^{\text{م}} + \text{ب}\,\text{لا}^{\text{ن}}$ سے اختیاری مستقلوں ا اور ب کو ساقط کرنے سے

$$\text{لا}^{2}\,\text{ما}_{2} - (\text{م} + \text{ن} - 1)\,\text{لا}\,\text{ما}_{1} + \text{م ن ما} = 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ اگر م اور ن نامساوی مثبت صحیح عدد ہیں یا اگر ایک صفر ہے اور دوسرا ۱ سے مختلف کوئی دوسرا مثبت صحیح عدد تو مبدا مساوات کی ندرت ہے لیکن تکملوں کی نہیں۔ جب ہر تکملہ ایک نقطہ پر جو مساوات کے لئے نادر ہے کُل شکلی ہو (جیسا کہ یہاں ہے) تو یہ ندرت کو ظاہری کہا جاتا ہے۔ باقی سب صورتوں میں ندرت کو حقیقی کہتے ہیں۔ ظاہری ندرت پر یہ ضروری ہے کہ قوت نمائی مساوات کی اصلیں نامساوی مثبت صحیح عدد ہوں یا صفر اور ایک سے بڑا مثبت صحیح عدد ہوں۔ یہ بھی ضروری ہے کہ چھوٹی اصل سے ایک غیر متعین اسر حاصل ہو (دفعہ ۹۹ کے مطابق)۔ (۲۱۴)

## حل طلب مثالیں

(۱) ثابت کرو کہ وہ ضروری (مگر نا کافی) شرط کہ مبدا مساوات

$$\text{لا}^{2}\,\text{ما}_{2} + \text{لا}\,\text{ما}_{1}\,\text{ف}(\text{لا}) + \text{ما}\,\text{ق}(\text{لا}) = 0$$

کی ظاہری ندرت ہو جہاں ف(لا) اور ق(لا) مبدا پر کُل شکلی ہیں یہ ہے کہ

ف(۰) = ایک منفی صحیح عدد۔ نیز ثابت کرو کہ وہ ضروری اور کافی شرطیں کہ مبدا ایک معمولی نقطہ ہو ف(۰) = ق(۰) = ق۱(۰) = ۰ ہیں۔

(۲) ثابت کرو کہ مبدا مساوات

$$\text{لا}\,(1+\text{لا}^{1})\,\text{ما}_2-\text{ما}_1-\text{لا}^{3}\,\text{ما}=0$$

کی ظاہری ندرت ہے۔ نیز کامل ابتدائی

$$\text{ما}=\text{ا}\left(1+\tfrac{1}{8}\text{لا}^{4}-\tfrac{1}{16}\text{لا}^{6}+\tfrac{1}{24}\text{لا}^{8}-\dots\right)+\text{ب}\left(\text{لا}^{2}-\tfrac{1}{4}\text{لا}^{4}+\tfrac{1}{6}\text{لا}^{6}-\tfrac{7}{64}\text{لا}^{8}\dots\dots\right)$$

کو حاصل کرو۔

(۳) ثابت کرو کہ مبدا، مساوات

$$\text{لا}^{2}\,\text{ما}_2+(\text{لا}^{2}-2)\,\text{ما}=0$$

کی حقیقی ندرت ہے لیکن یہ کہ تمام تکملے لوگارثموں سے پاک ہیں۔

[قوت نمائی مساوات کی اصلیں ۔۱ اور ۲ ہیں۔ چھوٹی اصل سے ا غیر متعین حاصل ہوتا ہے (دیکھو دفعہ ۹۹)۔ محصلہ لامتناہی سلسلہ کو جمع کیا جا سکتا ہے اور بالآخر

$$\text{ما}=\text{ا}\,\text{لا}^{-1}(\text{جم لا}+\text{لا جب لا})+\text{ب}\,\text{لا}^{-1}(\text{جب لا}-\text{لا جم لا})$$

حاصل ہوتا ہے۔]

## ۱۷۵ ــ فوشی نمونہ کی مساواتیں

مبدا کے سوا دوسرے نقطوں پر بحث کرنے میں ہم متغیر کو تبدیل کرتے ہیں چنانچہ $\text{لا}' = \text{لا} - \text{ا}$ یا $\text{لا}' = \text{لا}^{-1}$ رکھتے ہیں بموجب اس کے کہ زیر بحث نقطہ محدود نقطہ $\text{لا} = \text{ا}$ ہو یا لامتناہی پر کا نقطہ $\text{لا} = \infty$۔

وہ نقطے جو معمولی نہ ہوں نادر کہلاتے ہیں - اگر ایک نادر نقطے (جس کے قریب میں مساوات کے سر ایکساں ہیں) تمام تکملے باقاعدہ ہوں تو اس کو باقاعدہ نادر نقطہ کہتے ہیں -

یہ تعریفیں خود تفرقی مساوات کے نادر نقطوں سے متعلق ہیں یعنے اس کے سروں سے جبکہ مساوات کو شکل (۱) میں لکھا گیا ہو - معمولی نقطوں کی بحث سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ تکملوں کی ندرتیں مساوات کی ندرتیں بھی ہیں لیکن اس کا عکس درست نہیں ہے - مثلاً ما = ا لا^م + ب لا^ن سے اختیاری مستقلوں ا اور ب کو ساقط کرنے سے

$$\text{لا}^2\,\text{ما}_2 - (\text{م} + \text{ن} - 1)\,\text{لا}\,\text{ما}_1 + \text{م}\,\text{ن}\,\text{ما} = 0$$

حاصل ہوتا ہے - اگر م اور ن نامساوی مثبت صحیح عدد ہیں یا اگر ایک صفر ہے اور دوسرا ا سے مختلف کوئی دوسرا مثبت صحیح عدد تو مبدا مساوات کی ندرت ہے لیکن تکملوں کی نہیں - جب ہر تکملہ ایک نقطہ پر جو مساوات کے لئے نادر ہے کُل شکلی ہو (جیساکہ یہاں ہے) تو ندرت کو ظاہری کہا جاتا ہے - باقی سب صورتوں میں ندرت کو حقیقی کہتے ہیں - ظاہری ندرت پر یہ ضروری ہے کہ قوت نمائی مساوات کی اصلیں نامساوی مثبت صحیح عدد ہوں یا صفر اور ایک سے بڑا مثبت صحیح عدد ہوں - یہ بھی ضروری ہے کہ چھوٹی اصل سے ایک غیر متعین سر حاصل ہو (دفعہ ۹۹ کے مطابق) - (۲۱۴)

## حل طلب مثالیں

(۱) ثابت کرو کہ وہ ضروری (مگر ناکافی) شرط کہ مبدا مساوات

$$\text{لا}^2\,\text{ما}_2 + \text{لا}\,\text{ما}_1\,\text{ف}(\text{لا}) + \text{ما}\,\text{ق}(\text{لا}) = 0$$

کی ظاہری ندرت ہو جہاں ف (لا) اور ق (لا) مبدا پر کُل شکلی ہیں یہ ہے کہ

ف (۰) = ایک منفی صحیح عدد۔ نیز ثابت کرو کہ وہ ضروری اور کافی شرطیں کہ مبدا ایک معمولی نقطہ ہو ف (۰) = ق (۰) = $\text{ق}_1$(۰) = ۰ ہیں۔

(۲) ثابت کرو کہ مبدا، مساوات

$$\text{لا}(1+\text{لا}^2)\,\text{ما}_2 - \text{ما}_1 - \text{لا}^3\,\text{ما} = 0$$

کی ظاہری ندرت ہے۔ نیز کامل ابتدائی

$$\text{ما} = \text{ا}\left(1 + \frac{1}{8}\text{لا}^4 - \frac{1}{16}\text{لا}^6 + \frac{1}{24}\text{لا}^8 - \ldots\right) + \text{ب}\left(\text{لا}^2 - \frac{1}{4}\text{لا}^4 + \frac{1}{6}\text{لا}^6 - \frac{7}{64}\text{لا}^8 \ldots\ldots\right)$$

کو حاصل کرو۔

(۳) ثابت کرو کہ مبدا، مساوات

$$\text{لا}^2\,\text{ما}_2 + (\text{لا}^2 - 2)\,\text{ما} = 0$$

کی حقیقی ندرت ہے لیکن یہ کہ تمام تکملے لوگارثموں سے پاک ہیں۔

[قوت نمائی مساوات کی اصلیں ۔ ۱ اور ۲ ہیں۔ چھوٹی اصل سے $\text{ا}_2$ غیر متعین حاصل ہوتا ہے (دیکھو دفعہ ۹۹)۔ محصلہ لا متناہی سلسلہ کو جمع کیا جا سکتا ہے اور بالآخر

$$\text{ما} = \text{ا}\,\text{لا}^{-1}(\text{جم لا} + \text{لا جب لا}) + \text{ب}\,\text{لا}^{-1}(\text{جب لا} - \text{لا جم لا})$$

حاصل ہوتا ہے۔]

## ۱۷۵ — فوشتی نمونہ کی مساواتیں۔

مبدا کے سوا دوسرے نقطوں پر بحث کرنے میں ہم متغیر کو تبدیل کرتے ہیں چنانچہ ل = لا ۔ ۱ یا ل = $\text{لا}^{-1}$ رکھتے ہیں بموجب اس کے کہ زیر بحث نقطہ محدود نقطہ لا = ۱ ہو یا لا متناہی پر کا نقطہ لا = ∞۔

اِس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر مساوات (۱) میں تفاعل ف اور ق ہر محدود نقطے پر الا چند نقطوں ا، ب، ج، . . . . کے کُل شکلی ہوں تو نقطے ا، ب، ج، . . . . ہی صرف ممکن محدود نادر نقطے ہوں گے۔ اِس طرح ہم اِن نقطوں کو صرف معائنہ سے یہ دیکھ کر معلوم کر سکتے ہیں کہ کہاں ف اور ق متغیر کی تبدیلی کے بغیر کُل شکلی نہیں ہیں۔ مثلاً اگر

$$ف = \frac{لا + ۲}{لا(لا - ۳)} \quad \text{اور} \quad ق = \frac{لا + ۱۰}{لا^۲(لا - ۳)(لا - ۴)^۳}$$

تو ممکن محدود نادر نقطے صرف لا = ۰، ۳، ۴ سے حاصل ہوتے ہیں۔

اس کے علاوہ اگر یہ امتحان کرنا ہو کہ آیا کوئی نادر نقطہ لا = ا باقاعدہ ہے یا نہیں تو صرف یہ دیکھنا ہوگا کہ آیا (لا - ا) ف اور (لا - ا)$^۲$ ق دونوں لا = ا پر کُل شکلی ہیں۔ اوپر کی مثال میں صفر اور ۳ باقاعدہ نادر نقطے ہیں لیکن ۴ بے قاعدہ ہے کیونکہ (لا - ۴)$^۲$ ق، لا = ۴ پر کُل شکلی نہیں ہے اور اس کی وجہ یہ ہے کہ (لا - ۴) نسب نما میں ایک جزو ضربی ہے۔

(۲۱۴) لا متناہی پر کے نقطہ لا = ∞ پر متغیر کو تبدیل کر کے بحث کیجا سکتی ہے۔

اگر کسی مساوات کے (جس کے سر ہر جگہ ایکساں ہوں) تمام نادر نقطے باقاعدہ ہوں تو مساوات کو فوشی نمونہ کی مساوات کہتے ہیں۔

# حل طلب مثالیں

(۱) ثابت کرو کہ زائد ہندسی مساوات

$$لا(۱ - لا) ی_۲ + \{ج - (ا + ب + ۱) لا\} ی_۱ - ا ب ی = ۰$$

کے لیے نادر نقطے صرف ۰، ۱، اور ∞ ہیں جو باقاعدہ ہیں۔

(۲) ثابت کرو کہ لیجنڈر کی مساوات

$$(\text{۱} - \text{لا}^2)\,\text{ما}_2 - \text{۲}\,\text{لا}\,\text{ما}_1 + \text{ن}(\text{ن}+\text{۱})\,\text{ما} = \text{۰}$$

کے لیے نادر نقطے صرف ۱، -۱ اور $\infty$ ہیں جو باقاعدہ ہیں۔

(۳) ثابت کرو کہ بیسل کی مساوات

$$\text{لا}^2\,\text{ما}_2 + \text{لا}\,\text{ما}_1 + (\text{لا}^2 - \text{ن}^2)\,\text{ما} = \text{۰}$$

کے لیے نادر نقطے صرف ۰ اور $\infty$ ہیں جن میں سے پہلا باقاعدہ ہے لیکن دوسرا نہیں۔

(۴) ثابت کرو کہ ریمان کی ف مساوات

$$\text{ما} = \text{ف}\left\{\begin{matrix} \text{ا} & \text{ب} & \text{ج} & \\ \text{عہ} & \text{بہ} & \text{جہ} & \text{لا} \\ \text{عہَ} & \text{بہَ} & \text{جہَ} & \end{matrix}\right\}$$

یعنی

$$\text{ما}_2 + \Sigma\left(\frac{\text{۱} - \text{عہ} - \text{عہَ}}{\text{لا} - \text{ا}}\right)\text{ما}_1 + \left\{\Sigma\frac{\text{عہ}\,\text{عہَ}(\text{ا}-\text{ب})(\text{ا}-\text{ج})}{\text{لا}-\text{ا}}\right\} \times \frac{\text{ما}}{(\text{لا}-\text{ا})(\text{لا}-\text{ب})(\text{لا}-\text{ج})} = \text{۰}$$

کے لیے ا، ب، ج باقاعدہ نادر نقطے ہیں اور باقی دوسرے سب نقطے بشمول $\infty$ معمولی نقطے ہیں بشرطیکہ عہ + عہَ + بہ + بہَ + جہ + جہَ = ۱۔ متغیر کو تبدیل کر کے ثابت کرو کہ نقطہ ا کے متناظر قوت نمائی مساوات کی اصلیں عہ اور عہَ ہیں۔

(۵) ثابت کرو کہ مثالوں ۱، ۲، اور ۴ کی مساواتیں فوشی نمونہ کی ہیں لیکن مثال ۳ اس نمونہ کی نہیں ہے۔

(۶) ثابت کرو کہ حسب ذیل مساوات فوشی نمونہ کی ہے:

$$\text{ما}_2 + \frac{\text{ف}}{\text{سا}}\,\text{ما}_1 + \frac{\text{ق}}{\text{سا}^2}\,\text{ما} = ۰$$

جہاں سا خطی اجزا (لا - ا)، (لا - ب)، (لا - ج) ... کی کسی تعداد (فرض کرو ن) کا حاصل ضرب ہے جن میں سے کوئی دو مساوی نہیں ہیں، اور ف اور ق، لا کے کثیر رقمی ہیں جن کے درجے علی الترتیب (ن-۱) اور (ن - ۲) سے بڑے نہیں ہیں ۔

## ۱۷۶ - تمیز نما یندہ - مساوات

$$\text{ما}_2 + \text{لا}^{-\text{لہ}}\,\text{ف}(\text{لا})\,\text{ما}_1 + \text{لا}^{-\text{مہ}}\,\text{ق}(\text{لا})\,\text{ما} = ۰$$

پر غور کرو جہاں لہ اور مہ مثبت صحیح عدد ہیں یا صفر، اور ف اور ق لا کے کل شکلی تفاعل ہیں جو صفر نہیں ہوتے جبکہ لا = ۰ ۔

اگر ہم اس کو فرابینس کے طریقہ سے حل کرنے کی سعی کریں تو ما کی بجائے لا کی قوتوں کے ایک سلسلہ کو (جو لا^ج سے شروع ہو) درج کرنے اور تفرقی مساوات کی دائیں جانب سے جو نتیجہ حاصل ہو اُس میں لا کی کم ترین قوت کے سر کو صفر کے مساوی رکھنے سے قوت نمائی مساوات حاصل ہو گی ۔ اِس کی پہلی، دوسری، اور تیسری رقموں سے لا کی کم ترین قوتیں علی الترتیب ج - ۲، ج - لہ - ۱، اور ج - مہ ہونگی ۔ تین صورتیں پیدا ہوتی ہیں : (۲۱۵)

(۱) اگر اِن میں سے پہلا عدد باقی دو میں سے کسی سے بڑا نہیں ہے تو قوت نمائی مساوات دوسرے درجہ کی ہوگی ۔

(۲) اگر اِن میں سے دوسرا عدد پہلے سے کم لیکن تیسرے سے بڑا نہیں ہے تو قوت نمائی مساوات پہلے درجہ کی ہوگی ۔

(دیکھو مثال ۲ اور ۴ صفحہ ۲۳۳)۔

(۳) اگر اِن میں سے تیسرا عدد سب سے کم ہو تو قوت نمائی

مساوات کا درجہ صفر ہوگا۔ (دیکھو صفحہ ۲۳۲ مثال)۔

پہلی صورت (۱) میں لہ > ۱ اور مہ > ۲، اس لیے فوش کے مسئلہ کی رُو سے دو باقاعدہ تکملے ہونے چاہئیں۔

دوسری صورت (۲) میں ایک باقاعدہ تکملہ ہو سکتا ہے۔ لیکن اگر حاصل شدہ واحد سلسلہ لا کی تمام قیمتوں کے لیے متسع ہو (جیسا اکثر ہوتا ہے، دیکھو مثال ۴ صفحہ ۲۳۳) تو کوئی باقاعدہ تکملہ نہیں ہوگا۔

تیسری صورت (۳) میں کوئی سلسلہ نہیں ہے اور اس لیے کوئی باقاعدہ تکملہ بھی نہیں ہے۔

ممیز نمایندہ وہ عدد ہے جو اُس صورت کو تعبیر کرتا ہے جو پیدا ہوتی ہے اگر ابتداء صفر سے کی جائے چنانچہ صورت (۱) کے لیے صفر، صورت (۲) کے لیے (۱)، اور صورت (۳) کے لیے (۲) اس تعریف کو اور قوت نمائی مساوات کے بڑے سے بڑے ممکن درجہ کی بحث کو بڑی آسانی سے کسی رتبہ کی مساواتوں پر اطلاق پذیر کیا جاسکتا ہے چنانچہ حسب ذیل نتیجہ برآمد ہوتا ہے: رتبہ م اور ممیز نمایندہ ر کی ایک خطی تفرقی مساوات کے باقاعدہ تکملے م - ر سے زیادہ نہیں ہو سکتے۔

**۱۷۷ - طبعی اور تحت طبعی تکملے۔** دفعہ ۱۰۰ میں یہ معلوم ہوا تھا کہ فرابنیس کا طریقہ ایک ایسا تکملہ دریافت کرنے میں ناکام رہا جس کا ایک جزو ضربی ق^لا ہو۔ یہ طبعی تکملہ کی ایک مخصوص صورت ہے جس کی یہ تعریف کیجاتی ہے کہ وہ شکل ق^ی ع کا ہوتا ہے جہاں ی $\frac{1}{لا}$ کا ایک کثیر رقمی ہے (سادہ ترین صورت میں یہ تفاعل $\frac{1}{لا}$ کا

ایک عددی ضعف ہوتا ہے اور ع، لا کا ایک ایسا تفاعل ہے جیسا کہ باقاعدہ
تسلسل میں واقع ہوتا ہے ۔ تحت طبعی تکملوں اور طبعی
تکملوں میں صرف یہ فرق ہے کہ اول الذکر میں لا کی بجائے اس کا جذر المربع
ہوتا ہے (یا اس کا جذر الکعب یا اس سے اعلیٰ جذر جبکہ تفرقی
مساواتیں دوسرے رتبہ سے اعلیٰ رتبہ کی ہوں)۔

طبعی اور تحت طبعی تکملوں کو حاصل کرنے کا طریقہ
حسب ذیل مثالوں میں بتلایا گیا ہے:

**مثال (۱)** $ما_{۲} - ۲ لا^{-۱} ما_{۱} + لا^{-۲} (-۴ + ۲ لا^{۲}) ما = ۰$ ...... (۱)

یہاں قوت نمائی مساوات کی کوئی اصلیں نہیں ہیں اور اس لیئے کوئی
باقاعدہ تکملے نہیں ہیں (یعنے ممیز نمایندہ ۲ ہے) اس کی وجہ ما کے سر میں
رقم $-۴ لا^{-۴}$ کی موجودگی ہے۔

(۲۱۶)

رکھو $ما = لا^{ی} ع$

تو $ما_{۱} = لا^{ی} (ع_{۱} + ی ع)$، $ما_{۲} = لا^{ی} \{ ع_{۲} + ۲ ی ع_{۱} + (ی^{۲} + ی) ع \}$

مساوات (۱) $لا^{ی}$ سے تقسیم کرنے کے بعد

$$ع_{۲} + (-۲ لا^{-۱} + ۲ ی) ع_{۱} + (-۴ لا^{-۴} + ۲ لا^{-۲} - ۲ لا^{-۱} ی + ی^{۲} + ی) ع = ۰ \quad (۲)$$

میں مستحیل ہوتی ہے۔

رقم $-۴ لا^{-۴}$ کو خارج کرنے کے لیے ی کو $ا لا^{-۱}$ لو جہاں $ا = \pm ۲$ تو
مساوات (۲)

$$ع_{۲} + (-۲ لا^{-۱} + ۲ ا لا^{-۲}) ع_{۱} + (۲ لا^{-۲} - ۴ ا لا^{-۳}) ع = ۰$$

ہو جاتی ہے جس کا ممیز نمائندہ ہے −۱ اسلیئے ایک باقاعدہ تکملہ ہو سکتا ہے
اس کو معلوم کرنے کے لیے فرابینیس کا طریقہ استعمال کیا جائے تو ا کی دونوں

قیمتوں کے لیے سادہ نتیجہ ع = لا^۲ حاصل ہوتا ہے ۔ قوت نما جزو ضربی سے ضرب دینے پر آخرالامر د و طبعی تکملے لا^۲ و لا^{-۲} اور لا^۲ و لا^{۱/۲} حاصل ہوتے ہیں۔

**مثال (۲)** $ما_۲ + ۴ لا^{-۲} ما_۱ + لا^{-۶} (-۴ + ۲ لا^۲ - ۴ لا^۳) ما = ۰$

یہاں بھی کوئی باقاعدہ تکملے نہیں ہیں ۔ مثال (۱) کی طرح عمل کرنے سے

$$ع_۲ + (۴ لا^{-۲} + ۲ ی_۱) ع_۱ + (-۴ لا^{-۶} + ۲ لا^{-۴} - ۴ لا^{-۳} + ۴ لا^{-۲} ی_۱ + ی_۱^۲ + ی_۲) ع = ۰$$

رقم -۴ لا^{-۶} کو خارج کرنے کے لیے ی_۱ میں رقم ب لا^{-۳} کا موجود ہونا فرض کرو جہاں ب = ± ۲ ۔ اگر ی_۱ = ا لا^{-۲} + ب لا^{-۳} تو ع کے سر میں لا^{-۵} والی کوئی رقم نہیں ہوگی بشرطیکہ ا کو ایسا منتخب کیا گیا ہو کہ ۴ ب + ۲ ا ب = ۰ یعنی ا = -۲ ۔

انتخاب ی_۱ = -۲ لا^{-۲} + ۲ لا^{-۳} سے مساوات

$$ع_۲ + ۴ لا^{-۳} ع_۱ - ۴ لا^{-۴} ع = ۰$$

حاصل ہوگی جس کا ایک باقاعدہ تکملہ ع = لا ہے ۔

دوسرے انتخاب ی_۱ = -۲ لا^{-۲} - ۲ لا^{-۳} سے مساوات

$$ع_۲ - ۴ لا^{-۳} ع_۱ + ۸ لا^{-۴} ع_۱ = ۰$$

حاصل ہوگی ۔ اس کا کوئی باقاعدہ تکملہ نہیں ہے کیونکہ صرف سلسلہ

$$لا^۲ \left(۱ + \frac{۱}{۴} لا^۲ + \frac{۳ \times ۱}{۴^۲} لا^۴ + \frac{۵ \times ۳ \times ۱}{۴^۳} لا^۶ + \cdots\cdots\right)$$

حاصل ہوتا ہے جو متنسع ہے ۔

پس ابتدائی مساوات کا ایک طبعی تکملہ لا و $^{(۲ لا^{-۲} - لا^{۲})}$ ہے۔

**مثال (۳)** $\quad ما_{۲} + لا^{۲}(-۱ + ۳ لا) ما_{۱} + لا^{۲} ما = ۰$.

یہاں ممیز نمایندہ ا ہے۔ قوت نمائی مساوات پہلے درجہ کی ہے لیکن (جیساکہ مثال ۴ صفحہ ۴۳۰ میں بتایا گیا ہے) محصلہ سلسلہ متبع ہے۔ حسب سابق عمل کرنے پر

$$ع_{۲} + (- لا^{-۲} + ۳ لا^{-۱} + ۲ ی_{۱}) ع_{۱} + \{ لا^{-۲} + (- لا^{-۲} + ۳ لا^{-۱}) ی_{۱}$$

$$+ ی_{۱}^{۲} + ی_{۲} \} ع = ۰$$

چونکہ ابتدائی مساوات میں تکلیف دہ رقم $ما_{۱}$ کے سرمیں - $لا^{۲}$ تھی اور ما کا سر صرف ایسا تھا جو تکملوں کے باقاعدہ ہونے کی صورت میں واقع ہوتا ہے اس لیے شائد یہ مناسب معلوم ہوگا کہ ع کے سر کو $ی_{۱} = \frac{۱}{۲} لا^{-۲}$ لیکر سادہ بنایا جا سکتا ہے۔ لیکن اس کی وجہ سے ع کے سر میں $لا^{-۴}$ میں ایک رقم داخل ہوگی اور ایک ایسی مساوات حاصل ہوگی جس کے کوئی باقاعدہ تکملے نہیں ہوں گے۔

فرض کرو کہ ہم دوسری مساوات کو جس کا ممیز نمایندہ ا ہو اِس امید میں حاصل کرنے کی کوشش کرتے ہیں کہ متناظر سلسلہ شاید مستدق ہو۔ رکھو

(۲۱۷) $ی_{۱} = ا لا^{-۲}$، ع کا سر $لا^{-۴}$ والی رقموں سے پاک ہوگا اگر $ا^{۲} - ا = ۰$۔ یعنے $ا = ۰$ یا ۱۔ لیکن $ا = ۰$ سے ابتدائی مساوات حاصل ہوتی ہے اور $ا = ۱$ سے مساوات

$$ع_{۲} + (۳ لا^{-۱} + لا^{-۲}) ع_{۱} + (لا^{-۲} + لا^{-۳}) ع = ۰.$$

ملتی ہے جس کا باقاعدہ تکملہ ع = $\overline{لا}^{1}$ ہے اور اس لئے طبعی تکملہ ما = $\overline{لا}^{1}$ لو $\overline{لا}^{1}$ حاصل ہوتا ہے۔

مثال (۴) $ما_{2} + \frac{1}{2} \overline{لا}^{1} ما_{1} - \overline{لا}^{3} ما = 0$

اس مساوات کے کوئی باقاعدہ تکملے نہیں ہیں حسب سابق عمل کرنے سے

$ع_{2} + (\frac{1}{2}\overline{لا}^{1} + 2ی_{1})ع_{1} + (-\overline{لا}^{3} + \frac{1}{2}\overline{لا}^{1}ی_{1} + ی_{1}^{2} + ی_{2})ع = 0$

$-\overline{لا}^{3}$ کو خارج کرنے کے لیے $ی_{1} = ک \overline{لا}^{\frac{3}{2}}$ لو جہاں $ک = \pm 1$

اس سے $ع_{2} + (\frac{1}{2}\overline{لا}^{1} + 2ک \overline{لا}^{\frac{3}{2}})ع_{1} - ک \overline{لا}^{\frac{5}{2}} ع = 0$،

$ع = لا^{ج} \sum_{0}^{\infty} ا_{ن} لا^{\frac{ن}{2}}$ ایک تکملہ ہوگا اگر

$ا_{0}(2ک ج - ک) = 0$، اس لیے $ج = \frac{1}{2}$

$ا_{1}\{2ک(ج + \frac{1}{2}) - ک\} + ا_{0}\{ج(ج-1) + \frac{1}{2}ج\} = 0$

یعنی $ک ا_{1} + 0 = 0$، اس لیے $ا_{1} = 0$۔

اسی طرح $ا_{ن} = 0$، ن کی تمام قیمتوں کے لیے جو ا سے بڑی ہیں، اسلیے $ع = لا^{\frac{1}{2}}$

ابتدائی مساوات کے دو تحت طبعی تکملے

$لا^{\frac{1}{2}}$ لو $^{-2 \overline{لا}^{\frac{1}{2}}}$ اور $لا^{\frac{1}{2}}$ لو $^{2 \overline{لا}^{\frac{1}{2}}}$

ہیں۔

# حل طلب مثالیں

حسب ذیل مساواتوں (۱) تا (۵) کے تحت طبعی تکملے معلوم کرو۔

(۱) $ما_۲ + ۲ لا^{-۱} ما_۱ - لا^{-۴} ما = ۰$، [جواب: $و^{\frac{۱}{لا}}$ ، $و^{-\frac{۱}{لا}}$]

(۲) $ما_۲ + لا^{-۱} ما_۱ + لا^{-۴}(۱ - \frac{۱}{۴} لا^{-۲}) ما = ۰$،

[جواب: $لا^{\frac{۱}{۲}} و^{\frac{خ}{لا}}$ ، $لا^{\frac{۱}{۲}} و^{-\frac{خ}{لا}}$ یا $لا^{\frac{۱}{۲}}$ جم $(\frac{۱}{لا})$، $لا^{\frac{۱}{۲}}$ جب $(\frac{۱}{لا})$]

(۳) $ما_۲ + لا^{-۲}(-۲ + لا) ما_۱ + لا^{-۴}(۱ + لا - لا^۲ + لا^۳) ما = ۰$

[جواب: ع $و^{\frac{۱}{لا}}$ ، و $و^{\frac{۱}{لا}}$ جہاں ع اور و سے وہی مراد ہے جو صفحہ ۲۲۷ پر ہے]

(۴) $ما_۲ - \frac{۱}{۲} لا^{-۱} ما_۱ - ۴ لا^{-۳} ما = ۰$

[جواب: $لا(۱ + \frac{۱}{۴} لا^{\frac{۱}{۲}}) و^{۴ لا^{-\frac{۱}{۲}}}$ ، $لا(۱ - \frac{۱}{۴} لا^{\frac{۱}{۲}}) و^{۴ لا^{-\frac{۱}{۲}}}$]

(۵) $ما_۲ - لا^{-۴}(۱ + ۵ لا^۲) ما = ۰$

[جواب: $لا^{-۱}(۱ + \frac{۱}{۲} لا^۲) و^{\frac{۱}{۲} لا^{-۲}}$ ، $ی = -\frac{۱}{۲} لا^{-۲}$ سے متسع سلسلہ حاصل ہوتا ہے]

(۶) اندراج $لا = \frac{۱}{۷}$ سے صفر رتبہ کی بیسل کی مساوات کو مستحیل کرو اور استحالہ شدہ مساوات کے طبعی تکملے معلوم کرنے کی کوشش کرو۔ ثابت کرو کہ محصلہ سلسلے متسع ہیں۔ ابتدائی متغیر کی طرف رجوع کرکے سلسلہ

$$و^{-خ لا} لا^{-\frac{1}{2}} \left\{ ۱ - \frac{۱^۲}{۸ خ لا} + \frac{۱^۲ \times ۳^۲}{\underline{|۲} (۸ خ لا)^۲} - \frac{۱^۲ \times ۳^۲ \times ۵^۲}{\underline{|۳} (۸ خ لا)^۳} + \ldots \right\}$$

اور اس کے مشابہ سلسلہ جس میں خ کی علامت بدلی ہوئی ہو حاصل کرو۔

[بیسل کی مساوات کی استحالہ شدہ شکل مثال ا صفحہ کے جواب میں دی گئی ہے۔

یہ سلسلے اگرچہ منتسع ہیں لیکن بہت کارآمد ہیں۔ اِن کو **متقاربی سلسلے** کہتے ہیں۔ لا کی کسی دی ہوئی قیمت کے لیے جو کافی بڑی ہو اِن سلسلوں سے ایک تقرب حاصل ہوتا ہے جس کی خطا کو مناسب طور پر کم کیا جا سکتا ہے لیکن اِس کو لا انتہا صغیر نہیں بنایا جا سکتا۔ دیکھو وہیٹکر اور واٹسن کی کتاب "Modern Analysis" چوتھا اڈیشن دفعات ۱ء۸ تا ۲ء۸، ۳۲ء۸ اور ۵ء۱۷] (۲۱۸)

(۷) وہیٹکر کی مجمع زائدِ ہندسی مساوات

$$\ddot{ا} + \left( -\frac{۱}{۴} + \frac{ک}{لا} + \frac{\frac{۱}{۴} - م^۲}{لا^۲} \right) ا = ۰$$

سے سلسلہ (مثال ۶ کے عمل سے)

$$و^{-\frac{1}{2}لا} لا^{ک} \left[ ۱ + \sum_{ر=۱}^{\infty} \frac{\left\{م^۲ - (ک - \frac{۱}{۲})^۲\right\}\left\{م^۲ - (ک - \frac{۳}{۲})^۲\right\} \ldots \left\{م^۲ - (ک - ر + \frac{۱}{۲})^۲\right\}}{\underline{|ر} \; لا^{ر}} \right]$$

حاصل کرو۔

[یہ سلسلہ عام طور پر اُس تفاعل کا متقاربی پھیلاؤ ہے جو $ط_{ک، م}$ (لا) سے تعبیر کیا جاتا ہے، لیکن اگر $(ک - \frac{۱}{۲} \pm م)$ ایک مثبت صحیح عدد ہو تو یہ سلسلہ مختتم ہوتا ہے اور ایک تکملہ محدود رقموں میں حاصل ہوتا ہے۔ دوسرا سلسلہ $ط_{-ک، م}$ (-لا)، سلسلہ $ط_{ک، م}$ (لا) سے ک اور لا کی علامتیں بدل کر حاصل

کیا جا سکتا ہے۔]

**۱۷۸ — مرتعش ڈوریوں کی مساوات۔** یہ مساوات

$$\frac{\text{جف}^2\,\text{و}}{\text{جف لا}^2} = \frac{1}{\text{ا}^2}\,\frac{\text{جف}^2\,\text{و}}{\text{جف ت}^2}, \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

ہے جہاں ا ایک مستقل ہے۔

رکھو $\text{۷} = \text{لا} - \text{ا ت}$، $\text{ٹ} = \text{لا} + \text{ا ت}$

تو $$\frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف و}}{\text{جف ۷}}\,\frac{\text{جف ۷}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف و}}{\text{جف ٹ}}\,\frac{\text{جف ٹ}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف و}}{\text{جف ۷}} + \frac{\text{جف و}}{\text{جف ٹ}}$$

اور $$\frac{\text{جف}^2\,\text{و}}{\text{جف لا}^2} = \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}}\left(\frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}}\right) = \left(\frac{\text{جف}}{\text{جف ۷}} + \frac{\text{جف}}{\text{جف ٹ}}\right)\left(\frac{\text{جف و}}{\text{جف ۷}} + \frac{\text{جف و}}{\text{جف ٹ}}\right) = \frac{\text{جف}^2\,\text{و}}{\text{جف ۷}^2} + 2\,\frac{\text{جف}^2\,\text{و}}{\text{جف ۷ جف ٹ}} + \frac{\text{جف}^2\,\text{و}}{\text{جف ٹ}^2}$$

اسی طرح $$\frac{\text{جف و}}{\text{جف ت}} = \frac{\text{جف و}}{\text{جف ۷}}\,\frac{\text{جف ۷}}{\text{جف ت}} + \frac{\text{جف و}}{\text{جف ٹ}}\,\frac{\text{جف ٹ}}{\text{جف ت}} = \text{ا}\left(-\frac{\text{جف و}}{\text{جف ۷}} + \frac{\text{جف و}}{\text{جف ٹ}}\right)$$

اور $$\frac{\text{جف}^2\,\text{و}}{\text{جف ت}^2} = \text{ا}^2\left(\frac{\text{جف}^2\,\text{و}}{\text{جف ۷}^2} - 2\,\frac{\text{جف}^2\,\text{و}}{\text{جف ۷ جف ٹ}} + \frac{\text{جف}^2\,\text{و}}{\text{جف ٹ}^2}\right)$$

مساوات (۱) میں مندرج کرنے پر

$$4\,\frac{\text{جف}^2\,\text{و}}{\text{جف ۷ جف ٹ}} = 0$$

جس سے $\dfrac{\text{جف و}}{\text{جف ت}} = \text{فہ (ت)}$

اور $\text{و} = \text{ف (لا)} + \int \text{فہ (ت) فرت}$

یا $\text{و} = \text{ف (لا)} + \text{فا (ت)}$

یعنے $\text{و} = \text{ف (لا - ا ت)} + \text{فا (لا + ا ت)} \quad \ldots (2)$

جہاں ف اور فا اختیاری تفاعل ہیں۔

(۲۱۹) ف (لا - ا ت) نہیں بدلتا اگر لا میں ا کا اور ت میں اکا اضافہ کیا جائے اس لیے اس سے ایک موج تعبیر ہوتی ہے۔ جو محور لا کی مثبت سمت پر رفتار ا سے حرکت کرتی ہے۔ اسی طرح فا (لا + ا ت) سے ایک موج تعبیر ہوتی ہے جو اسی خط پر اسی رفتار سے مخالف سمت میں حرکت کرتی ہے۔

مساوات (۱) کو حل کرنے کا دوسرا طریقہ یہ ہے کہ دفعہ ۱۴۵ میں بیان کردہ عام نتیجہ کو استعمال کیا جائے اور لا، ما، ی کی بجائے علی الترتیب ت، لا، و کو رکھا جائے۔ مساوات کو

$$\left( \frac{\text{جف}^2}{\text{جف ت}^2} - \text{ا}^2 \frac{\text{جف}^2}{\text{جف لا}^2} \right) \text{و} = 0$$

یا $(\text{عف}^2 - \text{ا}^2 \, \text{عف}^2) \, \text{و} = 0$

لکھنے سے امدادی مساوات $\text{م}^2 - \text{ا}^2 = 0$ حاصل ہوگی جس کی اصلیں - ا ، ا ہیں اور اس سے

$$\text{و} = \text{ف (لا - ا ت)} + \text{فا (لا + ا ت)}$$

حسب سابق حاصل ہوگا۔

## ۱۷۹ - موج کی مساوات کے خاص حل - مساوات

$$\frac{\text{جف}^2\,\text{و}}{\text{جف لا}^2} + \frac{\text{جف}^2\,\text{و}}{\text{جف ما}^2} + \frac{\text{جف}^2\,\text{و}}{\text{جف ی}^2} = \frac{1}{\text{ر}^2}\,\frac{\text{جف}^2\,\text{و}}{\text{جف ت}^2}\text{،} \quad \ldots\ldots (۳)$$

ہے جہاں ر ایک مستقل ہے - یہ ایک بعدی مساوات (۱) کی سہ بعدی نظیر ہے - فرض کرو کہ ہم (۲) کے مشابہ حل معلوم کرنے کی کوشش کرتے ہیں لیکن لا، ت کی بجائے لا، ما، ی، ت کے ساتھ -

رکھو

$$\text{و} = \text{ف}(\text{ل لا} + \text{م ما} + \text{ن ی} - \text{ر ت}) + \text{فا}(\text{ل لا} + \text{م ما} + \text{ن ی} + \text{ر ت}) \quad \ldots\ldots (۴)$$

جہاں ل، م، ن مستقل ہیں - مساوات (۳) پوری ہوتی ہے اگر

$$\text{ل}^2 + \text{م}^2 + \text{ن}^2 = 1$$

اِس صورت میں ل، م، ن، ایک خاص خط کے حقیقی سمتی جیوب التمام ہیں - پہلا تفاعل نہیں بدلتا اگر لا، ما، ی، ت میں علی الترتیب ل ر، م ر، ن ر، ۱ کا اضافہ کیا جائے اِس لیے اُس سے ایک مستوی موج (جس کے عماد کے سمتی جیوب التمام ل، م، ن ہیں) تعبیر ہوتی ہے جو خود اپنے متوازی رفتار ر سے حرکت کرتی ہے - دوسرے تفاعل سے ایک متوازی موج تعبیر ہوتی ہے جو اُسی رفتار ر سے مخالف سمت میں حرکت کرتی ہے - اِس لیے مساوات (۴) مستوی موجوں کی اشاعت کو تعبیر کرتی ہے - یہ موج کی مساوات کا ایک خاص حل ہے -

کروی موجوں کے لیے حل حاصل کرنے میں مساوات (۳) کو کروی قطبی محددوں میں مستعمل کیا جاتا ہے - یہ کام اُصولاً لاپلاس کی مساوات[۱] کا استحالہ ہے چنانچہ حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{\text{ر}^2}\,\frac{\text{جف}}{\text{جف ر}}\left(\text{ر}^2\,\frac{\text{جف و}}{\text{جف ر}}\right) + \frac{1}{\text{ر}^2\,\text{جب ط}}\,\frac{\text{جف}}{\text{جف ط}}\left(\text{جب ط}\,\frac{\text{جف و}}{\text{جف ط}}\right)$$

[۱] دیکھو ایڈورڈ کا "تفرقی احصاء" دفعہ ۵۳۲ یا کسی سادہ طریقہ کے لیے جس میں گاس کا مسئلہ استعمال کیا جاتا ہے سکونیات تحلیلی پر کوئی کتاب -

$$+\ \frac{1}{\text{ر}^2\,\text{جب}^2\text{ط}}\ \frac{\text{جف}^2\text{و}}{\text{جف فہ}^2}=\frac{1}{\text{ا}^2}\ \frac{\text{جف}^2\text{و}}{\text{جف ت}^2}\ ،\quad \dots(5)$$

اس حل کے لیے جو مبداء کے گرد تمام سمتوں میں متشاکل ہو یعنی (۲۲۰)
ط اور فہ پر منحصر نہ ہو یہ مساوات

$$\frac{1}{\text{ر}^2}\ \frac{\text{جف}}{\text{جف ر}}\left(\text{ر}^2\ \frac{\text{جف و}}{\text{جف ر}}\right)=\frac{1}{\text{ا}^2}\ \frac{\text{جف}^2\text{و}}{\text{جف ت}^2}\ ،\quad \dots(6)$$

میں تحویل ہوتی ہے۔

استحالہ ع = ر و سے

$$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ر}}=\text{و}+\text{ر}\ \frac{\text{جف و}}{\text{جف ر}}$$

اور
$$\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف ر}^2}=2\ \frac{\text{جف و}}{\text{جف ر}}+\text{ر}\ \frac{\text{جف}^2\text{و}}{\text{جف ر}^2}=\frac{1}{\text{ر}}\ \frac{\text{جف}}{\text{جف ر}}\left(\text{ر}^2\ \frac{\text{جف و}}{\text{جف ر}}\right)$$

اس لیے مساوات (۶) کو ر سے ضرب دینے کے بعد وہ

$$\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف ر}^2}=\frac{1}{\text{ا}^2}\ \frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف ت}^2}$$

ہو جاتی ہے جس سے

$$\text{ع}=\text{ف}(\text{ر}-\text{ا ت})+\text{فا}(\text{ر}+\text{ا ت})$$

یعنی
$$\text{و}=\frac{1}{\text{ر}}\left\{\text{ف}(\text{ر}-\text{ا ت})+\text{فا}(\text{ر}+\text{ا ت})\right\}\ ،\quad \dots(7)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس سے دو کروی موجیں تعبیر ہوتی ہیں جن کی رفتار وہی ا ہے اور ان میں سے ایک مبداء سے پرے ہٹتی جاتی ہے اور دوسری مبداء کے قریب آتی جاتی ہے۔ جزو ضربی $\frac{1}{\text{ر}}$ سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ خلل کی شدت گھٹتی ہے جبکہ مبداء سے فاصلہ بڑھتا ہے۔

## ۱۸۰ — پوائسن (یا لیوولی) کا عام حل۔ اس سے

بوقت ت نقطہ ف پر و کی قیمت، تفاعلوں گ اور گ' (فرض کرو) کی اوسط قیمتوں کی رقوم میں جن کو ایک کرہ پر لیا گیا ہو حاصل ہوتی ہے جہاں کرہ کا مرکز ف اور اس کا متغیر نصف قطر ا ت ہے اور گ، گ' ایسے تفاعل ہیں جن سے علی الترتیب و اور $\frac{\text{جف و}}{\text{جف ت}}$ کی قیمتیں فضا، کے کسی نقطہ پر حاصل ہوتی ہیں جبکہ ت = ۰۔

ف کو مبدا، مانکر کروی قطبی محدد لو۔

اب ایک تفاعل ف (ر، ط، فہ، ت) کی اوسط قیمت ف̄ جو نصف قطر ر کے ایک کرہ پر لی گئی ہو

$$\overline{\text{ف}} = \frac{1}{4\pi\,\text{ر}^2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\text{ف ر}^2\,\text{جب ط فرط فرفہ}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\text{ف}_{\text{ر}}\,\text{جب ط فرط فرفہ}$$

سے حاصل ہوتی ہے۔

موج کی مساوات (۵) کی ہر رقم کی اوسط قیمت کو نصف قطر ر کے ایک کرہ پر لو۔ دوسری رقم ہو جاتی ہے

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\text{ر}^2}\,\frac{\text{جف}}{\text{جف ط}}\left(\text{جب ط}\,\frac{\text{جف و}}{\text{جف ط}}\right)\text{فرط فرفہ}$$

$$= \frac{1}{4\pi\,\text{ر}^2}\int_0^{2\pi}\left[\text{جب ط}\,\frac{\text{جف و}}{\text{جف ط}}\right]_0^{\pi}\text{فرفہ}$$

اور تیسری رقم ہو جاتی ہے

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\text{ر}^2\,\text{جب ط}}\,\frac{\text{جف}^2\text{و}}{\text{جف فہ}^2}\,\text{فرط فرفہ}$$

$$= \frac{1}{4\pi\,\text{ر}^2}\int_0^{\pi}\left[\frac{1}{\text{جب ط}}\,\frac{\text{جف و}}{\text{جف فہ}}\right]_0^{2\pi}\text{فرط}$$

دونوں صفر ہیں کیونکہ دونوں حدود پر جب ط معدوم ہوتا ہے۔ (۲۲۱)

اور فہ = ۲ ٹ سے $\frac{\text{جف و}}{\text{جف فہ}}$ کی وہی قیمت حاصل ہوتی ہے جو فہ = . سے (جو فی الواقع وہی حل ہے)۔ مساوات (۵) کی پہلی اور چوتھی رقمیں معدوم نہیں ہوتیں۔ اِن سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{جف و}}{\text{جف ت}^2} \frac{1}{ا^2} = \left( ر^2 \frac{\text{جف و}}{\text{جف ر}} \right) \frac{\text{جف}}{\text{جف ر}} \frac{1}{ر^2} \quad \ldots\ldots (۸)$$

اِس لیے

$$ر و = ف (ر - ا ت) + فا (ر + ا ت) \quad \ldots\ldots (۹)$$

$$= ف (- ا ت) + فا (ا ت) + ر \{ فَ (- ا ت) + فاَ (ا ت) \}$$

$$+ \frac{1}{2} ر^2 \{ فً (- ا ت) + فاً (ا ت) \} + \ldots\ldots (۱۰)$$

اگر ت کی تمام قیمتوں کے لیے مبدا (ر = ۰) پر و محدود ہو تو

$$ف (- ا ت) + فا (ا ت) = ۰$$

$$فَ (- ا ت) = \frac{\text{ز ف} (- ا ت)}{\text{ز} (- ا ت)} = - \frac{\text{ز} \{ - \text{فا} (ا ت) \}}{\text{ز} (ا ت)} = فاَ (ا ت)$$

پس مساوات (۱۰) سے

$$و = فَ (- ا ت) + فاَ (ا ت) = ۲ فاَ (ا ت) \quad .. (۱۱)$$

جہاں لاحقہ صفر اُس نتیجہ کو تعبیر کرتا ہے جو ر = ۰ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

مساوات (۹) سے

$$\frac{\text{جف}}{\text{جف ر}} (ر و) = فَ (ر - ا ت) + فاَ (ر + ا ت)$$

اور

$$\frac{\text{جف و}}{\text{جف ت}} ر = - ا فَ (ر - ا ت) + ا فاَ (ر + ا ت)$$

اِس لیے

$$۲ فاَ (ر + ا ت) = \frac{\text{جف}}{\text{جف ر}} (ر و) + \frac{ر}{ا} \frac{\text{جف و}}{\text{جف ت}}$$

ر اور ت کی تمام قیمتوں کے لیے - ت = ۰ رکھنے اور ابتدائی شرطوں کو استعمال کرنے سے

$$۲\,فا(ر) = \frac{جف}{جف\,ر}(ر\,گ) + \frac{ر\,\bar{گ}}{ا}$$

اِس لیے ر کو خاص قیمت ا ت دینے اور مساوات (۱۱) کو استعمال کرنے سے

$$\bar{و} = \frac{جف}{جف(ا\,ت)}(ا\,ت\,گ) + ت\,\bar{گ}$$

لیکن $\bar{و}$ جو صفر نصف قطر کے کرہ پر و کی اوسط قیمت ہے صرف و ہے۔

$$اِس\ لیے\quad و = \frac{جف}{جف\,ت}(ت\,گ) + ت\,\bar{گ}$$

اِس حل کی شکل سے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ بوقت ت کسی نقطہ ف پر و کی قیمت صرف اُن نقطوں پر کے ابتدائی خلل پر منحصر ہوتی ہے جو مرکز ف اور نصف قطر ا ت کے کرہ کی سطح پر واقع ہیں -

(۴۲۲) دھماکہ میں ابتدائی خلل بالعموم ایک ایسے علاقہ میں محدود ہوتا ہے جو ایک بند سطح س سے گھرا ہوا ہو - اگر ف اس سطح کے باہر ہے اور ف سے س تک کم سے کم فاصلہ د ہے تو وقت $\frac{د}{ا}$ گزرنے تک ف پر کوئی اثر پیدا نہیں ہوگا کیونکہ اس سے پیشتر متعلقہ کرہ صرف ایسے علاقوں میں سے گزرے گا جہاں کوئی ابتدائی خلل نہیں ہے۔ کسی وقت ت پر ناصیۂ موج (اُن نقطوں کا طریق جہاں خلل عین ابھی پہنچا ہو) ایک ایسی سطح ہے جو سطح س سے اس کے تمام باہر وار عمادوں کو فاصلہ ا ت تک خارج کرکے حاصل کی گئی ہے -

موج کی مساوات کے دیگر عام حل کرخوف (Kirchhoff) نے [۱]

---

[۱] دیکھو جینیں کی کتاب Electricity and Magnetism (پانچواں اڈیشن)
باٹر (روڈا) کتاب Optics (مترجمہ میاں انیس علی گیلانی) صفحہ ۱۷۹ -

جس کے حل کی شکل علم المناظر میں اہمیت رکھتی ہے اور وہیٹکر[51] اور بیٹ میان (Bateman) نے حاصل کئے ہیں۔

## حل طلب مثال

تصدیق کرو کہ موج کی مساوات کا ایک حل

$$\text{و} = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \text{ف}\,(\text{لا جب ع جم ر} + \text{ما جب ع جب ر} + \text{ی جم ع} + \text{ا ت، ع، ر})\ \text{فرع فرر}$$

ہے جہاں تفاعل ف ایسا ہے کہ تکمل کی علامت کے تحت تفرق جائز ہیں۔
[یہ وھیٹیکر کا حل ہے]۔

## ۱۸۱ — ریاضیاتی طبیعات کی دیگر تفرقی مساواتیں

ان میں

لاپلاس کی مساوات $\frac{\text{جف}^2\,\text{و}}{\text{جف لا}^2} + \frac{\text{جف}^2\,\text{و}}{\text{جف ما}^2} + \frac{\text{جف}^2\,\text{و}}{\text{جف ی}^2} = 0$،

پوائسن کی مساوات $\frac{\text{جف}^2\,\text{و}}{\text{جف لا}^2} + \frac{\text{جف}^2\,\text{و}}{\text{جف ما}^2} + \frac{\text{جف}^2\,\text{و}}{\text{جف ی}^2} = -4\pi\,\text{جہ ثہ}$،

حرارت کے ایصال کی مساوات $\frac{\text{جف}^2\,\text{و}}{\text{جف لا}^2} + \frac{\text{جف}^2\,\text{و}}{\text{جف ما}^2} + \frac{\text{جف}^2\,\text{و}}{\text{جف ی}^2} = \frac{1}{\text{ا}}\,\frac{\text{جف و}}{\text{جف ت}}$،

تیلغرافی کی مساوات $\text{ل ک}\,\frac{\text{جف}^2\,\text{و}}{\text{جف ت}^2} + \text{ک ر}\,\frac{\text{جف و}}{\text{جف ت}} = \frac{\text{جف}^2\,\text{و}}{\text{جف لا}^2}$،

اور شروڈنگر Schrodinger کی مساوات

$$\frac{\text{جف}^2\,\text{سا}}{\text{جف لا}^2} + \frac{\text{جف}^2\,\text{سا}}{\text{جف ما}^2} + \frac{\text{جف}^2\,\text{سا}}{\text{جف ی}^2} + \frac{8\pi^2\,\text{م}\,(\text{ط} - \text{و})\,\text{سا}}{\text{ھ}^2} = 0$$

[51] دیکھو وھیٹیکر اور واٹسن کی کتاب Modern Analysis چوتھا ایڈیشن دفعہ ۱۸٫۶

[52] ایضاً صفحہ ۴۰۶

شامل ہیں۔ ایک مخصوص صورت میں شروڈنگر کی مساوات کا حل اس دفعہ کے ختم پر ایک مثال میں دیا گیا ہے۔

ان مساواتوں پر دو نقطہ ہائے نظر سے بحث کی جا سکتی ہے۔ نظری ریاضی[۱] کی کتابوں میں ان مساواتوں کے عام حلوں پر منطقی بحث کی جاتی ہے لیکن طبیعی اس بحث کی طوالت اور ان عام حلوں کے اطلاق کی مشکلوں سے گھبراتا ہے۔ طبیعات کی کتابوں میں حلوں کو حاصل کرنے کے لیے جو بالعموم عام ہونے کی بجائے مخصوص ہوتے ہیں منطق اور وجدان دونوں سے کام لیا جاتا ہے۔ ایسے حل ایک طبیعیاتی مفہوم رکھتے ہیں اور وہ کبھی بھی صرف منطق سے حاصل نہیں ہو سکتے۔

ان نتیجوں کے درست ہونے میں بالعموم بہت کم شبہ ہوتا ہے لیکن کوئی ابہام خواہ وہ کتنا ہی خفیف ہو ریاضی داں کو ناگوار ہوتا ہے۔ وہ جانتا ہے کہ نظری ریاضیات میں وجدان پر بھروسہ نہیں کیا جا سکتا چنانچہ وہ اس کے اس قیمتی اور قابل اعتماد حصہ کو قدر کی نگاہ سے نہیں دیکھتا جس سے طبیعات میں کام لیا جاتا ہے۔ ان میں سے ہر نقطۂ نظر پر طول طویل بحث کرنے کی ضرورت ہے جس کی یہاں گنجائش نہیں[۲]۔

[ریاضیاتی طبیعات کی زیادہ ابتدائی مساواتوں کو اس کتاب کے

---

[۱] مثلاً گرسا کی کتاب "Cours d'Analyse Mathematique" جلد دوم

[۲] دیکھو ریمن و بیبر کی کتاب "Partielle Differentialgleichungen und deren Anwendung auf physikalische Fragen" (تازہ ترین اڈیشن میں بہت سی تبدیلیاں کی گئی ہیں اور اس کا نام "Die Differential-und Integralgleichungen der Mechanik und Physik" رکھا گیا ہے)۔ جیفری کی کتاب "Operational Methods in Mathematical Physics" ہیوی سائڈ کا طریقہ

پکرڈ کی کتاب "Lecons sur Quelques Types Simples d' Equations aux Derivees Partielles avec des Applications a la Physique Mathematique."

ویبسٹر کی کتاب "Partial Differential Equations of Mathematical Physics."

اور بیٹمین کی کتاب "Partial Differential Equations of Mathematical Physics"

مختلف مقامات پر حل کیا گیا ہے مثلاً دیکھو صفحات ۴۳، ۵۱، ۵۲، ۶۸، ۸۰، ۹۱۔ ۹۴ — ۱۱۹، ۳۷۳ — ۳۷۸، ۴۶۷، ۴۷۸ — ۴۹۲، ۴۹۷، ۴۹۹

## حل طلب مثال

شروڈنگر کی مساوات میں ک کی بجائے $\frac{ح}{۲ ط}$ رکھ کر، و کی خاص شکل — $\frac{ن}{ر}$ فرض کر کے، کارٹیسری محددوں کو کروی قطبی محددوں میں تبدیل کر کے، اور سا کی بجائے ر۱ ع (ر) س (ط، قہ) رکھ کر (مقابلہ کرو دفعہ ۹۷ کے ساتھ) حاصل کرو

$$\left\{ \frac{د^۲ ع}{د ر^۲} + \frac{۲ م}{ک^۲} \left( ط + \frac{ز^۲}{ر} \right) ع \right\} س$$

$$+ \frac{ع}{ر^۲} \left\{ \frac{۱}{جب ط} \frac{جف}{جف ط} \left( جب ط \frac{جف س}{جف ط} \right) + \frac{۱}{جب^۲ ط} \frac{جف^۲ س}{جف قہ^۲} \right\} = ۰$$

ر$^ل$ س کو لاپلاس کی مساوات کا ایک حل لیکر (اور اس لیے ر$^{ل+۱}$ س پچھلی مساوات کا ایک حل ہوگا جبکہ م کی بجائے صفر رکھا جائے)

$$\frac{د^۲ ع}{د ر^۲} + \left\{ \frac{۲}{ک^۲} م \left( ط + \frac{ز^۲}{ر} \right) - \frac{ل(ل+۱)}{ر^۲} \right\} ع = ۰$$

کو حاصل کرو —

بالآخر اندراجات

$$\frac{ز^۲}{ک} \sqrt{\frac{-م}{۲ ط}} ، ک = \sqrt{-۲ م ط} ، \frac{۲ ر}{ک} = لا$$

سے اس کو وھٹیکر کی مجتمع زائد ہندسی مساوات (مثال ۷ دفعہ ۷۷ کے آخر) میں تحویل کرو جس میں ما، لا، م کی بجائے علی الترتیب ع، س، اور $(ل+\frac{۱}{۲})$ ہوں —

## ۱۸۲ — عددی تقرب۔ آڈم کا طریقہ۔ اب ہم آٹھویں باب کے

مضمون کی طرف رجوع کرکے ایک ایسا طریقہ بیان کرتے ہیں جس کے متعلق پروفیسر وہیٹیکر کا خیال ہے کہ وہ اُن سب طریقوں میں بہترین ہے جن کا امتحان ایڈنبرگ کے ریاضی معمل میں کیا گیا تھا۔ اختصاراً یہ کہہ سکتے ہیں کہ وہ ٹیلر کے مسئلہ اور ایک خاص ضابطہ کو ملا کر استعمال کرنے کے مُرادف ہے۔ یہ خاص ضابطہ ذیل میں درج ہے اور اس کا تعلق محدود فرقوں کے علم احصاء سے ہے۔ ٹیلر کا مسئلہ لا کے ایسے اضافوں کے لیے استعمال کیا جاتا ہے جو اس قدر چھوٹے ہوں کہ سلسلہ بسرعت مستدق ہو جائے۔ اس طریقہ پر ما کی چند قیمتیں (بالعموم چار) حاصل کرلینے کے بعد ہمیں اتنا مواد مل جاتا ہے کہ فرقوں کے ضابطہ سے مزید قیمتیں حاصل ہوسکتی ہیں اور لا کے بڑے اضافوں کیلیے ٹیلر کے مسئلہ کی ضرورت نہیں پڑتی۔ آخری نتیجہ میں جو خطاء پیدا ہوگی اُس کی تخمین مصرحۂ ذیل طریقہ پر کیجا سکتی ہے۔

**مثال** - تفرقی مساوات لا $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ + ما - ۲ لا = ۰ دی گئی ہے اور ابتدائی قیمتیں لا = ۲، ما = ۲،۵ معلوم ہیں۔ لا = ۲،۰۵، ۲،۱۰، ۲،۱۵، ۲،۲۰، ۲،۲۵، ۲،۳۰، ۲،۳۵، ۲،۴۰، ۲،۴۵، ۲،۵۰ کے متناظر ما کی قیمتیں معلوم کرو اور نتیجوں میں خطاؤں کے رتبہ کی تخمین کرو۔

ہم لا کے اضافہ کو ھ سے، (لا + ن ھ) کو لان سے، لان کے متناظر ما کی قیمت کو مان سے تعبیر کریں گے۔

لا کے لحاظ سے ما کے متواتر تفرقی سروں کو مَا، مًا، ... سے اور ان کی ابتدائی قیمتوں کو لاحقہ صفر سے تعبیر کیا جائے گا۔

ٹیلر کے سلسلہ

$$\text{ما} = \text{با} + (\text{لا}-2)\,\text{بَا} + \frac{(\text{لا}-2)^2}{\lfloor 2}\,\text{بًا} + \frac{(\text{لا}-2)^3}{\lfloor 3}\,\text{مًا} + \ldots\ldots$$

میں سروں کو معلوم کرنے کے لیے ابتدائی تفرقی مساوات میں اور اس کے متواتر تفرقی سروں میں لا = ۲ اور ما = ۵٫۲ رکھو تو

$$\text{لا ما}' + \text{ما} - ۲\,\text{لا} = ۰\text{،} \qquad \text{با}' = \frac{۳}{۴}$$

$$\text{لا ما}'' + ۲\,\text{ما}' - ۲ = ۰\text{،} \qquad \text{با}'' = ۱ - \text{با}' = \frac{۱}{۴}$$

اور علیٰ ہذا القیاس، چنانچہ آخر الامر حاصل ہوگا

$$\text{ما} = ۲\frac{۱}{۲} + \frac{۳}{۴}(\text{لا} - ۲) + \frac{۱}{۸}(\text{لا} - ۲)^{۲} - \frac{۱}{۱۶}(\text{لا} - ۲)^{۳}$$

$$+ \frac{۱}{۳۲}(\text{لا} - ۲)^{۴} - \frac{۱}{۶۴}(\text{لا} - ۲)^{۵} + \cdots (۱)$$

اگر ہم اس سلسلہ میں علی التواتر لا = ۲٫۰۵، ۲٫۱۰، ۲٫۱۵، ۲٫۲۰ رکھیں تو اس سلسلہ کی آخری رقم کی قیمت زیادہ سے زیادہ

$$\frac{۱}{۶۴}(۰٫۲)^{۵} = ۰٫۰۰۰۰۰۵$$

ہوگی اور اس لیے ما کی متناظر قیمتیں اعشاریہ کے پانچ مقامات تک درست ہوں گی۔

اس طرح حاصل ہوگا

$$\text{با}_{۱} = ۲٫۵۳۷۸۰\text{،} \quad \text{با}_{۲} = ۲٫۵۷۶۱۹\text{،} \quad \text{با}_{۳} = ۲٫۶۱۵۱۲\text{،} \quad \text{با}_{۴} = ۲٫۶۵۴۵۵$$

اب ہم فرقوں کا ضابطہ[1]

---

[1] یہ ضابطہ اس طرح حاصل ہوتا ہے کہ نیوٹن ادراجی ضابطہ

$$\text{ق}_{ن}(\text{لا}_{ن} + \text{ر ھ}) = \text{ق}_{ن} + \text{ر}\,\Delta\,\text{ق}_{ن-۱} + \frac{\text{ر}(\text{ر}+۱)}{\lfloor ۲}\,\Delta^{۲}\,\text{ق}_{ن-۲} + \cdots$$

کو حدود صفر اور ایک کے درمیان ر کے لحاظ سے تکمل کیا جاتا ہے۔ دیکھو وہیٹکر اور رابن سن کی کتاب "Calculus of Observations صفحہ ۳۶۵"

$$\text{ما}_{\text{ن}+1} - \text{ما}_{\text{ن}} = \text{ق}_{\text{ن}} + \frac{1}{2}\Delta\text{ق}_{\text{ن}-1} + \frac{5}{12}\Delta^{2}\text{ق}_{\text{ن}-2} + \frac{3}{8}\Delta^{3}\text{ق}_{\text{ن}-3}$$

$$+ \frac{251}{720}\Delta^{4}\text{ق}_{\text{ن}-4} + \cdots\cdots \quad (۲)$$

استعمال کرتے ہیں جہاں $\text{ق}_{\text{ن}}$ سے $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ کی وہ قیمت تعبیر ہوتی ہے جبکہ لا = لا$_{\text{ن}}$، ما = ما$_{\text{ن}}$ چنانچہ اوپر کی مثال میں

$$\text{ق}_{\text{ن}} = ۰،۰۵\left(۲ - \frac{\text{ما}_{\text{ن}}}{\text{لا}_{\text{ن}}}\right)،$$

$\Delta\text{ق}_{\text{ن}}$ سے $\text{ق}_{\text{ن}+1} - \text{ق}_{\text{ن}}$ تعبیر ہوتا ہے

$\Delta^{2}\text{ق}_{\text{ن}}$ سے $\Delta\text{ق}_{\text{ن}+1} - \Delta\text{ق}_{\text{ن}}$ تعبیر ہوتا ہے، علیٰ ہذا القیاس۔

ن = ۵ رکھنے سے مساوات (۲) سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ما}_{5} = \text{ما}_{4} + \text{ق}_{4} + \frac{1}{2}\Delta\text{ق}_{3} + \frac{5}{12}\Delta^{2}\text{ق}_{2} + \frac{3}{8}\Delta^{3}\text{ق}_{1}$$

$$+ \frac{251}{720}\Delta^{4}\text{ق}_{.} + \cdots\cdots \quad (۳)$$

اب $\text{ق}_{.} = ۰،۰۵\left(۲ - \frac{\text{ما}_{.}}{\text{لا}_{.}}\right) = ۰،۰۳۷۵۰$

اسی طرح $\text{ق}_{1} = ۰،۰۳۸۱۰$، $\text{ق}_{2} = ۰،۰۳۸۶۶$، $\text{ق}_{3} = ۰،۰۳۹۱۸$،
$\text{ق}_{4} = ۰،۰۳۹۶۷$

پس $\Delta\text{ق}_{.} = \text{ق}_{1} - \text{ق}_{.} = ۰،۰۰۰۶۰$ اور علیٰ ہذا - اِن فرقوں کو محسوب کرنے میں عددوں کو حسب ذیل جدول کی شکل میں لکھ لینے سے سہولت پیدا ہوگی:

| ق | $\Delta$ق | $\Delta^2$ق | $\Delta^3$ق | $\Delta^4$ق |
|---|---|---|---|---|
| ق₀ = ۰٫۰۳۷۵۰ | | | | |
| | ۰٫۰۰۰۶۰ | | | |
| ق₁ = ۰٫۰۳۸۱۰ | | -۰٫۰۰۰۰۴ | | |
| | ۰٫۰۰۰۵۶ | | ۰٫۰۰۰۰۰ | |
| ق₂ = ۰٫۰۳۸۶۶ | | -۰٫۰۰۰۰۴ | | ۰٫۰۰۰۰۱ |
| | ۰٫۰۰۰۵۲ | | ۰٫۰۰۰۰۱ | |
| ق₃ = ۰٫۰۳۹۱۸ | | -۰٫۰۰۰۰۳ | | |
| | ۰٫۰۰۰۴۹ | | | |
| ق₄ = ۰٫۰۳۹۶۷ | | | | |

اب ہم اُن فرقوں کے مختلف رتبوں کی عددی قیمت کا امتحان کریں گے جو اِس جدول میں مندرج ہیں۔ $\Delta$ق سے $\Delta^2$ق تک گذرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ بیّن تخفیف ہے۔ لیکن $\Delta^3$ق میں صرف قدرے زیادہ تخفیف ہے اور $\Delta^4$ق میں تو کوئی تخفیف ہی نہیں ہے۔ اِس سے پتہ چلتا ہے کہ $\Delta^3$ق اور $\Delta^4$ق غیر صحیح ہیں۔ اِس لیے ہم اِن کا لحاظ نہیں کرتے اور مساوات (۳) کو تقریبی شکل میں استعمال کرتے ہیں۔

$$ل_۵ = ل_۴ + ق_۴ + \frac{۱}{۲} \Delta ق_۳ + \frac{۵}{۱۲} \Delta^۲ ق_۲$$

$$= ۲٫۶۵۴۵۵ + ۰٫۰۳۹۶۷ + ۰٫۰۰۰۲۵ - ۰٫۰۰۰۰۱$$

$$= ۲٫۶۹۴۴۶$$

سلسلہ کی صرف چار رقموں کو لینے سے جو خطا پیدا ہوتی ہے وہ آخری رقم کو رکھنے کی بہ نسبت بہت ہی خفیف ہے اور اِس لیے اعشاریہ کے پانچ مقامات تک اِس کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔ اِس کے برخلاف، اگرچہ پہلی اور دوسری رقموں کی اصلی قیمتوں کا فرق اُس فرق سے جو ان کی (پانچ اعشاریہ والی) تقریبی قیمتوں کے درمیان ہے ۰٫۰۰۰۰۵ سے زیادہ نہیں ہے،

(۲۲۶) لیکن یہ خطائیں زیادہ ناموافق صورت میں Δ ق میں دگنی اور $\Delta^2$ ق میں پھر دگنی ہو سکتی ہیں۔ اگر ما۵ کو محسوب کرنے میں ہر رقم میں بڑی سے بڑی ممکن خطا واقع ہو اور یہ سب خطائیں ایک ہی علامت کی ہوں تو بھی ما۵ میں بہ حیثیت مجموعی جو خطا پیدا ہوگی وہ ۰٫۰۰۰۰۲۵ سے کم ہوگی۔

اب ق۵ = ۰٫۰۵ (۲ - ما۵ / لا۵) = ۰٫۰۴۰۱۲ - اس کے متعلق ہم یہ بھروسہ کر سکتے ہیں کہ وہ اعشاریہ کے ۵ مقامات تک صحیح ہے کیونکہ ما۵ میں ۰٫۰۰۰۰۲۵ کی خطا چھوٹے عدد $\frac{۰٫۰۵}{۲٫۲۵}$ سے مضروب ہوگی اور اس لیے وہ ہمارے رتبہ تقرب تک ناقابل التفات ہے۔ ق۵ کی قیمت کو اوپر کی جدول میں درج کرکے ہم فوراً Δ ق۴ = ۰٫۰۰۰۴۵ اور $\Delta^2$ ق۳ = -۰٫۰۰۰۰۴ حاصل کر سکتے ہیں اور اس لیے

$$ما_۶ = ما_۵ + ق_۵ + \frac{۱}{۲}\Delta ق_۴ + \frac{۵}{۱۲}\Delta^2 ق_۳$$

= ۲٫۶۹۴۴۶ + ۰٫۰۴۰۱۲ + ۰٫۰۰۰۲۲ - ۰٫۰۰۰۰۲

= ۲٫۷۳۴۷۸

(چونکہ Δ ق۴ اور Δ ق۴ دونوں کے لیے آخری ہندسہ طاق ہے اس لیے نصف کرنے میں یہ تصفیہ کرنا پڑتا ہے کہ دو مساوی طور پر اچھے پانچ اعشاروی تقربوں میں سے کون سا تقرب منتخب کیا جائے۔ ہم متبادلاً بڑے اور چھوٹے کو منتخب کرتے ہیں اور اس طرح خطاؤں کے جمع ہونے سے بچتے ہیں۔)

اس طریقہ پر عمل کرکے ہم نتیجوں کو حسب ذیل جدول میں حاصل کرتے ہیں:

| ما | ق | Δ ق | $\Delta^2$ ق |
|---|---|---|---|
| ما۰ = ۲٫۰۰۰۰۰ | ق۰ = ۰٫۰۵۰۰۰ | | |
| | | | |
| | | ۰٫۰۰۰۰۶۰ | |

| ما | ق | Δق | $\Delta^2$ق |
|---|---|---|---|
| $ما_1$ = ۲٫۵۳۷۸۰ | $ق_1$ = ۰٫۰۳۸۱۰ | | ۰٫۰۰۰۰۴ − |
| | | ۰٫۰۰۰۵۶ | |
| $ما_2$ = ۲٫۵۷۶۱۹ | $ق_2$ = ۰٫۰۳۸۶۶ | | ۰٫۰۰۰۰۴ − |
| | | ۰٫۰۰۰۵۲ | |
| $ما_3$ = ۲٫۶۱۵۱۲ | $ق_3$ = ۰٫۰۳۹۱۸ | | ۰٫۰۰۰۰۳ − |
| | | ۰٫۰۰۰۴۹ | |
| $ما_4$ = ۲٫۶۵۴۵۵ | $ق_4$ = ۰٫۰۳۹۶۷ | | ۰٫۰۰۰۰۴ − |
| | | ۰٫۰۰۰۴۵ | |
| $ما_5$ = ۲٫۶۹۴۴۶ | $ق_5$ = ۰٫۰۴۰۱۲ | | ۰٫۰۰۰۰۲ − |
| | | ۰٫۰۰۰۴۳ | |
| $ما_6$ = ۲٫۷۳۴۷۸ | $ق_6$ = ۰٫۰۴۰۵۵ | | ۰٫۰۰۰۰۳ − |
| | | ۰٫۰۰۰۴۰ | |
| $ما_7$ = ۲٫۷۷۵۵۴ | $ق_7$ = ۰٫۰۴۰۹۵ | | ۰٫۰۰۰۰۳ − |
| | | ۰٫۰۰۰۳۷ | |
| $ما_8$ = ۲٫۸۱۶۶۸ | $ق_8$ = ۰٫۰۴۱۳۲ | | ۰٫۰۰۰۰۲ − |
| | | ۰٫۰۰۰۳۵ | |
| $ما_9$ = ۲٫۸۵۸۱۷ | $ق_9$ = ۰٫۰۴۱۶۷ | | |
| $ما_{10}$ = ۲٫۹۰۰۰۱ | | | |

ما ؤں کے متعلق یہ توقع کی جا سکتی ہے کہ اِن کے آخری ہندسے میں چھوٹی خطائیں ہیں۔ واقعہ یہ ہے کہ وہ تفرقی مساوات جس کا ہم نے انتخاب کیا ہے اُس کا ٹھیک حل ما = لا + $\frac{1}{\text{لا}}$ ہے۔ اِس سے محسوب کیا جائے تو $ما_5$ میں ۰٫۰۰۰۰۲ کی خطاء اور $ما_7$، $ما_8$، $ما_9$، $ما_{10}$ میں ۰٫۰۰۰۰۱ کی خطاء اور دوسروں میں کوئی خطاء معلوم نہیں ہوتی۔

اگر اِس سے زیادہ صحت مطلوب ہو تو ما$_{۱}$، ما$_{۲}$، ما$_{۳}$، ما$_{۴}$ کو اعشاریہ کے زیادہ مقامات تک محسوب کرنا چاہیئے مثلاً ۸ مقامات تک۔ طالبعلم کو ایسا کرنا چاہیے۔ یہ معلوم ہوگا کہ $\Delta$ق، $\Delta^{۲}$ق، $\Delta^{۳}$ق، اور $\Delta^{۴}$ق (۲۲۷) سب کے سب قابل اعتماد ہیں اور اِس لیے اِن کو فرقوں کے ضابطہ میں استعمال کیا جا سکتا ہے۔ آخری نتیجے حسب ذیل ہیں:

| | | |
|---|---|---|
| ما$_{۰}$ = | ۲٫۵۰۰۰۰۰۰۰ | |
| ما$_{۱}$ = | ۲٫۵۳۷۸۰۴۸۸ | |
| ما$_{۲}$ = | ۲٫۵۷۶۱۹۰۴۸ | |
| ما$_{۳}$ = | ۲٫۶۱۵۱۱۶۲۸ | |
| ما$_{۴}$ = | ۲٫۶۵۴۵۴۵۴۵ | |
| ما$_{۵}$ = | ۲٫۶۹۴۴۴۴۴۲ | (خطا ۔۲ آخری ہندسہ میں) |
| ما$_{۶}$ = | ۲٫۷۳۴۷۸۲۵۸ | (خطا ۔۳ 〃 〃) |
| ما$_{۷}$ = | ۲٫۷۷۵۵۳۱۸۸ | (〃 ۔۳ 〃 〃) |
| ما$_{۸}$ = | ۲٫۸۱۶۶۶۶۶۱ | (〃 ۔۶ 〃 〃) |
| ما$_{۹}$ = | ۲٫۸۵۸۱۶۳۲۳ | (〃 ۔۴ 〃 〃) |
| ما$_{۱۰}$ = | ۲٫۸۹۹۹۹۹۹۳ | (〃 ۔۷ 〃 〃) |

ما$_{۱۰}$ کو محسوب کرنے میں آخری رقم $\frac{۲۵۱}{۷۲۰}$ $\Delta^{۴}$ق$_{۵}$ کی قیمت ۔۰٫۰۰۰۰۰۰۰۹ ہے۔ اِس کی مقدار سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اِس دفعہ خطائیں (اعشاریہ کے پانچ مقامات کے برخلاف) غالباً اعلیٰ فرقوں کے ترک کرنے سے پیدا ہوئی ہیں۔ اِس کی تصحیح اِس طرح ہو سکتی ہے کہ یا تو ہم ما$_{۵}$ کو صحیح طور پر ٹیلر کے مسئلہ سے محسوب کریں اور $\Delta^{۵}$ق کو استعمال کریں یا (جیسا کہ بالعموم کیا جاتا ہے) وقفہ کو اتنا گھٹا دیں کہ $\Delta^{۵}$ق اُس رتبہ تک جہاں تک ہمیں صحت مطلوب ہے ناقابل قدر ہو جائے۔

## ۱۸۳۔ دفعات ۹۰ تا ۹۳ کے طریقہ کی ریمس کی توسیع

۔ ای۔ ریمس (E. Remes) نے عددوں م اور مر کیلئے جن کی تعریف دفعہ ۹۲ میں کی گئی ہے مناسب قیمتیں مقرر کرنے کا ایک منظم طریقہ[1] بیان کیا ہے:

صورت (۱) م = ف (ا، ب)، مر = ف{ا + ھ، ب + ھ ف (ا + ھ، ب + ھ)}، اگر

$$\frac{\text{فرف}}{\text{فزلا}} > 0 ، \quad \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} > 0$$

صورت (۲) م = ف (ا، ب)، مر = ف{ا + ھ، ب + ھ ف (ا، ب)}، اگر

$$\frac{\text{فرف}}{\text{فزلا}} > 0 ، \quad \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} < 0$$

صورت (۳) م = ف{ا + ھ، ب + ھ ف (ا + ھ، ب − ھ)}، مر = ف (ا، ب)، اگر

$$\frac{\text{فرف}}{\text{فزلا}} < 0 ، \quad \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} > 0$$

صورت (۴) م = ف{ا + ھ، ب + ھ ف (ا، ب)}، مر = ف (ا، ب)، اگر

$$\frac{\text{فرف}}{\text{فزلا}} < 0 ، \quad \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} < 0$$

یہ قیمتیں صفحہ ۲۱۱ کی نامساواتوں (۷)، (۸)، (۹)، (۱۰) کو پورا کرتی ہیں۔ ریمس یہ کہتا ہے کہ اگر ہم س اور ر کی تعریفیں رشتوں

$$\text{ر} = \tfrac{1}{2}\text{ھ}\{\text{ف (ا، ب)} + \text{ف (ا + ھ، ب + م ھ)}\}$$

$$\text{س} = \tfrac{1}{2}\text{ھ}\{\text{ف (ا، ب)} + \text{ف (ا + ھ، ب + مر ھ)}\}$$

[1] Phil. Mag., Series 7, Vol. 5, Feb. 1928.

کے ذریعہ کریں تو بھی یہ نامساواتیں درست رہتی ہیں جبکہ ق کی بجائے ر اور ق کی بجائے ر کو رکھا جاتا ہے۔

فرض کرو کہ حَ سے $\frac{1}{3}$(ع + ۲ ق) تعبیر ہوتا ہے اگر $\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} \cdot \frac{\text{فر}^2\text{ ف}}{\text{فر لا}^2} > 0$   (۲۲۸)

لیکن $\frac{1}{3}$(ع + ۲ ق) تعبیر ہوتا ہے اگر $\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} \cdot \frac{\text{فر}^2\text{ ف}}{\text{فر لا}^2} < 0$

فرض کرو کہ حً سے $\frac{1}{3}$(۲ ع + ر) تعبیر ہوتا ہے اگر $\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} \cdot \frac{\text{فر}^2\text{ ف}}{\text{فر لا}^2} > 0$

لیکن $\frac{1}{3}$(۲ ع + ر) تعبیر ہوتا ہے اگر $\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} \cdot \frac{\text{فر}^2\text{ ف}}{\text{فر لا}^2} < 0$

اب رمیس یہ ثابت کرتا ہے کہ تقربوں حَ اور حً میں خطائیں علی الترتیب کم سے کم چوتھے اور تیسرے رتبہ کی (اگر اضافہ کو پہلے رتبہ کی مقدار لیا جائے) ہوں گی اگر $\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} \cdot \frac{\text{فر ف}}{\text{فر لا}} \cdot \frac{\text{فر}^2\text{ ف}}{\text{فر لا}^2} > 0$، لیکن علی الترتیب کم سے کم تیسرے اور چوتھے رتبہ کی ہونگی اگر $\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} \cdot \frac{\text{فر ف}}{\text{فر لا}} \cdot \frac{\text{فر}^2\text{ ف}}{\text{فر لا}^2} < 0$۔ یہ نتیجہ م اور مہ کے اُس انتخاب پر منحصر ہے جس کی صراحت اوپر کی گئی ہے۔ صفحہ ۲۰۰ کی مثال کی خطا اُس سے بہت چھوٹی ہے جس کی توقع اِس نتیجہ سے ہو سکتی تھی لیکن اس کی وجہ غالباً م اور مہ کا اتفاقیہ اچھا انتخاب ہے جن کو اُس طریقہ سے حاصل نہیں کیا گیا تھا جو رمیس کا مجوزہ ہے۔

عام طور پر آڈمس یا کُٹا کے طریقے زیادہ بہتر معلوم ہوتے ہیں۔

---

(۲۲۹)

# ضمیمہ ۱

## وہ ضروری اور کافی شرط کہ مساوات م فرلا + ن فرما = ۰ ٹھیک ہو۔

(ا) اگر یہ مساوات ٹھیک ہے تو

م فرلا + ن فرما = ایک کامل تفرقہ = فرف، فرض کرو

اس لیے $\text{م} = \frac{\text{جف.ف}}{\text{جف.لا}}$ ، اور $\text{ن} = \frac{\text{جف.ف}}{\text{جف.ما}}$

اس لیے $\frac{\text{جف.ن}}{\text{جف.لا}} = \frac{\text{جف}^{2}\text{.ف}}{\text{جف.لا جف.ما}} = \frac{\text{جف}^{2}\text{.ف}}{\text{جف.ما جف.لا}} = \frac{\text{جف.م}}{\text{جف.ما}}$

اس لیے یہ شرط ضروری ہے۔

(ب) اس کے بالعکس، اگر $\frac{\text{جف.ن}}{\text{جف.لا}} = \frac{\text{جف.م}}{\text{جف.ما}}$ تو رکھو ف

$= \int$ م فرلا جہاں تکمل کی تکمیل اس مفروضہ پر کی گئی ہے کہ ما مستقل ہے۔

تب $\frac{\text{جف.ف}}{\text{جف.لا}} = \text{م}$ اور $\frac{\text{جف}^{2}\text{.ف}}{\text{جف.لا جف.ما}} = \frac{\text{جف}^{2}\text{.ف}}{\text{جف.ما جف.لا}} = \frac{\text{جف.م}}{\text{جف.ما}}$

$= \frac{\text{جف.ن}}{\text{جف.لا}}$

اس لیے $\frac{\text{جف}}{\text{جف.لا}}\left(\text{ن} - \frac{\text{جف.ف}}{\text{جف.ما}}\right) = 0$،

ن۔ $\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}}$ = مستقل، جہانتک کہ لا کا تعلق ہے یعنی ما کا ایک تفاعل،

= فہ (ما)، فرض کرو

تب ن = $\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}}$ + فہ (ما)

اب رکھو ف = ف + ∫ فہ (ما) فرما

تو ن = $\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}}$

نیز م = $\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}}$، ف کی تعریف کی رو سے

= $\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}}$، کیونکہ ف اور ف میں صرف ما کے ایک تفاعل کا فرق ہے پس م فرلا + ن فرما = $\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}}$ فرلا + $\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}}$ فرما = فرف، ایک کامل تفرقہ۔

اِس لیے مساوات ٹھیک ہے یعنی شرط کافی ہے۔

[ ہما۔ امفروضہ $\frac{\text{جف}^2\text{ ف}}{\text{جف لا جف ما}} = \frac{\text{جف}^2\text{ ف}}{\text{جف ما جف لا}}$ جایز ہے اگر ف اور اِس کے پہلے اور دوسرے تفرقی سرمسلسل ہوں۔ دیکھو لیمب کا (Infinitesimal Calculus) دوسرا ایڈیشن دفعہ ۲۱۰ یا تیسرا اڈیشن دفعہ ۱۹۳ ]۔

(۲۴۰)

# ضمیمہ ب

## مساوات

$$\text{ف}(\text{لا، ما، ی})\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}}+\text{ق}(\text{لا، ما، ی})\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}}+\text{ر}(\text{لا، ما، ی})\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ی}}=۰$$

## کے کوئی مخصوص تکملے نہیں ہوتے جبکہ اس کو چار ابعادی سمجھا گیا ہو۔

فرض کرو کہ $\text{ع}(\text{لا، ما، ی})=\text{ا}$،

$\text{و}(\text{لا، ما، ی})=\text{ب}$

مساواتوں $\frac{\text{فرلا}}{\text{ف}}=\frac{\text{فرما}}{\text{ق}}=\frac{\text{فری}}{\text{ر}}$ کے کوئی دو غیر تابع تکملے ایسے

تب آسانی سے ثابت ہوتا ہے کہ

$$\text{ف}\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}+\text{ق}\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}+\text{ر}\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ی}}=۰ \quad \ldots(۱)$$

اور

$$\text{ف}\frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}}+\text{ف}\frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}}+\text{ر}\frac{\text{جف و}}{\text{جف ی}}=۰ \quad \ldots(۲)$$

مساوات (۱) کی دائیں جانب ا نہیں ہے اور اس لئے صرف رشتہ ع = ا کی وجہ سے معدوم نہیں ہو سکتی۔ اس لیے اس کو متماثلاً معدوم ہونا چاہئے۔ اسی طرح مساوات (۲) متماثلاً پوری ہوتی ہے۔

اب فرض کرو کہ ابتدائی جزئی تفرقی مساوات کا کوئی تکملہ ف = ط (لا، ما، ی) ہے تو

ف $\frac{\text{جف ط}}{\text{جف لا}}$ + ق $\frac{\text{جف ط}}{\text{جف ما}}$ + ر $\frac{\text{جف ط}}{\text{جف ی}}$ = ۰، ...... (۳)

یہ دوسری متماثلہ مساوات ہے کیونکہ ف اس میں وقوع پذیر نہیں ہوتا۔ مساواتوں (۱)، (۲)، (۳) سے ف، ق، ر کو ساقط کیا جائے تو حاصل ہوگا

$$\frac{\text{جف}(\text{ع، و، ط})}{\text{جف}(\text{لا، ما، ی})} = ۰ \text{ متماثلاً}$$

پس ط، ع اور و کا ایک تفاعل ہے، فرض کرو کہ

ط = فہ (ع، و)

یعنے ف = ط، عام تکملہ کا حصہ ہے اور چونکہ ف = ط کوئی تکملہ ہے اس لیے کوئی مخصوص تکملے نہیں ہیں۔

[طالب علم کو اوپر کے بیان سے معلوم ہوا ہوگا کہ تفرقی مساوات کے متماثلاً پورا ہونے کی کیا اہمیت ہے۔ ہل نے Proc. London Math. Soc. 1917. لگرانج کی خطی مساوات کے تکملوں کی ایک نئی تقسیم کی ہے جس میں اس نازک فرق کو دکھایا گیا ہے جو ایک مساوات کو متماثلاً پورا کرنے والے تکملوں اور ایسی خاصیت نہ رکھنے والے تکملوں کے درمیان ہوتا ہے]

(۲۲۱)

# ضمیمہ

## وہ جملہ جو پہلے رتبہ کی ایک واحد جزئی تفرقی مساوات کو جیکوبی کے طریقہ پر حل کرنے سے فری کے لیے حاصل ہوتا ہے (دفعہ ۱۴۰) ہمیشہ تکمل پذیر ہوتا ہے۔

یہ ثابت کرنے کے لیے کہ

فری = $\text{ع}_1$ $\text{فرلا}_1$ + $\text{ع}_2$ $\text{فرلا}_2$ + $\text{ع}_3$ $\text{فرلا}_3$

تکمل پذیر ہے یہ ثابت کرنا ضروری اور کافی ہے کہ

ل = م = ن = ۰ (ا)

اب دفعہ ۱۴۰ کی مساواتوں (۸)، (۹)، (۱۰) کو جمع کرنے اور رشتہ (فا، $\text{فا}_1$) = ۰ کو استعمال کرنے لیکن (ا) کی صداقت کو تسلیم نہ کرنے سے حاصل ہوتا ہے

ل $\dfrac{\text{جف}(\text{فا}، \text{فا}_1)}{\text{جف}(\text{ع}_2، \text{ع}_3)}$ + م $\dfrac{\text{جف}(\text{فا}، \text{فا}_1)}{\text{جف}(\text{ع}_3، \text{ع}_1)}$ + ن $\dfrac{\text{جف}(\text{فا}، \text{فا}_1)}{\text{جف}(\text{ع}_1، \text{ع}_2)}$ = ۰ (ب)

اسی طرح ل $\dfrac{\text{جف}(\text{فا}، \text{فا}_2)}{\text{جف}(\text{ع}_2، \text{ع}_3)}$ + م $\dfrac{\text{جف}(\text{فا}، \text{فا}_2)}{\text{جف}(\text{ع}_3، \text{ع}_1)}$ + ن $\dfrac{\text{جف}(\text{فا}، \text{فا}_2)}{\text{جف}(\text{ع}_1، \text{ع}_2)}$ = ۰ (ج)

اور ل جف(فا۳، فا) / جف(ع۲، ع۳) + م جف(فا۲، فا) / جف(ع۳، ع۱) + ن جف(فا۲، فا) / جف(ع۱، ع۲) = ۰، (د)

مساواتوں (ب)، (ج)، (د) سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ یا ل = م = ن = ۰ یا △ = ۰ جہاں △ وہ مقطعہ ہے جس کے اجزائے ترکیبی (ب)، (ج)، (د) میں ل، م، ن کے سر ہیں۔

لیکن یہ سر خود مقطعہ

ج = جف(فا۲، فا، فا۱) / جف(ع۱، ع۲، ع۳)

کے اجزائے ترکیبی کے ہم جزو ضربی ہیں اور مقطعوں کے نظریہ کی رو سے

△ = ج^۲۔

اب ج معدوم نہیں ہو سکتا[1] کیونکہ اگر ایسا ہو تو ایک تفاعلی رشتہ کا وجود لازم آئے گا جس سے دفعہ ۱۴۰ کے اس مفروضہ کی تردید ہو گی کہ

فا = فا۱ - ا۱ = فا۲ - ا۲ = ۰

سے ع۱، ع۲، ع۳ کو لا۱، لا۲، لا۳ کے تفاعلوں کے طور پر معلوم کیا جا سکتا ہے۔

اس لیے △ ≠ ۰۔

اس لیے ل = م = ن = ۰۔

---

[1] اس ضمیمہ کی تمام مساواتیں متماثلاً پوری ہوتی ہیں۔

(۲۳۲)

# ضمیمہ د

## مزید مطالعہ کیلئے مشورے

اُن تمام کتابوں کی فہرست جو تفرقی مساواتوں پر لکھی گئی ہیں یہاں درج کرنا مقصود نہیں ہے۔ ہم صرف چند اہم ترین کتابوں کے نام اِن کو تین جماعتوں میں تقسیم کرکے بیان کریں گے۔

ا۔ وہ کتابیں جو تحلیلی نقطۂ نظر سے دلچسپی رکھتی ہیں (دسویں باب کے سلسلہ میں):

(ا) فورسائتھ: "Theory of Differential Equations." مطبع جامعہ کیمبرج، ۱۸۹۰ء اور سنین مابعد۔

یہ اہم تصنیف چھ جلدوں میں ہے اور اِس موضوع پر انگریزی میں سب سے زیادہ مکمل کتاب ہے۔ اِس کو اُس کتاب کے ساتھ خلط ملط نہ کرنا چاہیئے جو مبتدیوں کے لیے ایک جلد میں لکھی گئی ہے (چوتھا اڈیشن ۱۹۱۴ء میکمیلن اینڈ کو)۔

(ب) گرسا: Cours. d' Analyse Mathematique. جلد دوم و سوم (دوسرا اڈیشن ۱۹۱۱ء ۱۹۱۵ء، گاتھیر ویلرس۔ انگریزی ترجمہ (Ginn) نے شائع کیا ہے)۔

(ج) شیلنسگر: Handbuch der Theorie der linearen Differential gleichungen ۱۸۹۵ء ۱۸۹۸ء، ۳ جلدوں میں، ٹاینبر)

(د) اِنس: Ordinary Differential Equations (۱۹۲۰ء، لانگمنس)

(ع) بیبرباخ: Differentialgleichungen

(۱۹۲۶ء، لانگمنس)

۲ — وہ کتابیں جو کچھ تو تحلیلی اور کچھ ہندسی نقطۂ نظر سے تحریر کی گئی ہیں:

(ا) گرسا: Differential Equations (1934, Macmillan Co.). (سنہ ۱۹۳۴ء)

(ب) گرسا: Equations aux dérivées partielles du premier ordre

(سنہ ۱۸۹۶ء، ۱۸۹۸ء، ۲ جلدوں میں، ہرمن ایٹ فلس)

(ج) پیج: "Ordinary Differential Equations from the standpoint of Lie's Transformation Groups (1897, Macmillan)"

(سنہ ۱۸۹۷ء، میکمیلن)

اس میں تفرقی مساواتوں کے مبادیات پر بہت ہی ابتدائی طریقے سے بحث کی گئی ہے۔

(د) ڈکسن: Differential Equations from the group standpoint

(سنہ ۱۹۲۴ء، مطبع جامعہ پرنسٹن)

۳ — وہ کتابیں جو طبیعاتی نقطۂ نظر سے دلچسپی رکھتی ہیں (تیسرے اور چوتھے باب کے سلسلے میں):

(ا) ریمان: "Partielle Differentialgleichungen und deren Anwendung auf physikalische Fragen (1869, Vieweg)

(سنہ ۱۸۶۹ء، وی ویگ)

(ب) ریمان و ویبر: (ا) کی نظر ثانی کرکے اور اس میں بہت کچھ اضافہ کرکے شائع کیا گیا ہے:

(سنہ ۱۹۰۰ء، سنہ ۱۹۰۱ء، وی ویگ)

(ج) بیٹ مین: "Differential Equations" (سنہ ۱۹۱۸ء، لانگمنس)

اس میں تحقیقات جدید کے بہت سے حوالے درج ہیں۔

اصلی مقالوں کا تفصیلی ذکر نا ممکن ہے لیکن پروفیسر ایچ۔ جے۔ اے۔ بل کے وہ مقالے جو Proceedings of the London Mathematical Society میں شائع ہوئے ہیں نظر انداز نہیں کئے جا سکتے۔ میں بل کے مختلف مقالوں کو شائع

کرنا چاہتا ہوں۔ پہلے دو "لگرانج کی خطی جزئی تفرقی مساوات کے خاص تکملے" Journal of the London Mathematical Society 1939 اور "تفرقی مساواتوں کے کامل ابتدائیوں کی ناکاملیت" Math. Gaz. 1939 ہیں۔ میرے مقالہ "خطی تفرقی مساواتوں کے تکملوں کے تحت گروہ" (Tohoku Math. Journal 1937) میں زیادہ وسیع مضمون پر بحث کی گئی ہے۔

دیگر حوالے: فقرہ ۱۸ا کے حاشیہ میں دیکھو۔ ا (ب) اور فورسائتھ کی کتاب (ایک جلد والی) کے جدید اڈیشنوں میں بہت کم تغیر کیا گیا ہے۔

۲۲۳

# متفرق مثالیں پوری کتاب پر

(۱) فرما/فری = (ا۳ − ۳ لا ما)/(ما۳ + ۲ لا ما۲) [لندن]

(۲) فرما/فرلا + ۲ لا ما = ۲ لا (۱ + لا۲) [لندن]

(۳) مسس ما فرما/فرلا + مسس لا = جم ما جم۳ لا [لندن]

(۴) ما = ۲ لا × فرما/فرلا (فرما/فرلا)۲ [لندن]

(۵) (۱ − لا۲) فرما/فرلا − لا ما = لا۲ ما۲ [لندن]

(۶) (عف۲ + ۴) ما = جب ۲ لا [لندن]

(۷) (عف۳ − عف۲ + ۳ عف + ۵) ما = لا۲ + نولا جم ۲ لا [لندن]

(۸) (لا۳ عف۳ + لا۲ عف۲) ما = ۱ + لا + لا۲ [لندن]

(۹) جم لا جب لا فرما/فرلا = ما + جم لا [لندن]

(۱۰) فرلا/فرت = لا + ما + ۲ جم ت
فرما/فرت = ۳ لا − ما [لندن]

(۱۱) ما = لا (فرما/فرلا)۳ + ۱ [لندن]

(۱۲) ما فر۲ما/فرلا۲ − ۲ (فرما/فرلا)۲ = ما۲ [لندن]

(۱۳) (عف۴ + ۸ عف۲ + ۱۶) ما = لا جم ۲ لا [لندن]

(۳۰) $\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}} - \frac{\text{ن}}{\text{لا}}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{لا}^{2\text{ن}}\,\text{ما} = ۰$ [میتھیماٹیکل ٹرائی پاس]

(۳۱) $(\text{ی ع} + \text{لا})^{2} + (\text{ی ق} + \text{ما})^{2} = ۱$ [ " " ]

(۳۲) مساوات $\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}} - ۳\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + ۲\,\text{ما} = \text{قو}^{۳\text{لا}}$ کا حل معلوم

کرو جو معدوم ہو جبکہ لا = ۰ اور نیز جبکہ لا = $\text{لوک}_{\text{و}}\,۲$

[میتھیماٹیکل ٹرائی پاس]

(۳۳) مساوات $\frac{\text{فر}^{2}\,\text{لا}}{\text{فرت}^{2}} + ۲\text{ک}\,\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} + (\text{ک}^{2} + \text{لہ}^{2})\,\text{لا}$

$= \text{ا}\ \text{جم}\ \text{ع ت}$ کو حل کرو۔

ثابت کرو کہ ع کی مختلف قیمتوں کے لیے خاص تکملہ کا حیطہ بڑے سے بڑا ہوگا جبکہ $\text{ع}^{2} = \text{لہ}^{2} - \text{ک}^{2}$ اور ثابت کرو کہ اُس وقت خاص تکملہ

$$\left(\frac{\text{ا}}{۲\,\text{ک لہ}}\right) \text{جم}\,(\text{ع ت} - \text{عہ})$$

ہے جہاں $\text{مس عہ} = \frac{\text{ع}}{\text{ک}}$ [لندن]

(۳۴) مساوات $\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}} + \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\,\text{مس لا} + \text{ما}\ \text{جم}^{2}\,\text{لا} = ۰$

کو ی = جب لا رکھ کر حل کرو۔

(۳۵) (آ) $\frac{\text{جف}^{2}\,\text{و}}{\text{جف لا}^{2}} + \frac{\text{جف}^{2}\,\text{و}}{\text{جف ما}^{2}} + \frac{\text{جف}^{2}\,\text{و}}{\text{جف ی}^{2}} = ۰$ کے حل کو شکل

فا(ر + ی) کا مانکر تفاعل فا کو معلوم کرو جہاں $\text{ر}^{2} = \text{لا}^{2} + \text{ما}^{2} + \text{ی}^{2}$، اور ی کے لحاظ سے تکمل کر کے حل و = ی لوک (ر + ی) - ر کو اخذ کرو۔

(۲) $\frac{جف\, و}{جف\, ت} = ا^۲ \frac{جف^۲ و}{جف\, لا^۲}$ کے ایک حل کو شکل فہ (ضا) کا

مانکر تفاعل فہ کو معلوم کرو جہاں ضا = $\frac{لا}{\sqrt{ت}}$، اور لا کے لحاظ سے

تفرق کرکے ایک دوسرا حل معلوم کرو۔ [لندن]

(۳۶) لا، ما، ی کا ایک منطق صحیح تفاعل و معلوم کرو جو شرط

$$\frac{جف^۲ و}{جف\, لا^۲} + \frac{جف^۲ و}{جف\, ما^۲} + \frac{جف^۲ و}{جف\, ی^۲} = ۰$$

کو پورا کرے اور نیز ایسا ہو کہ ایک کرہ کی سطح پر کے نقطوں پر اس کی قیمت

ا ی^۲ ہو جہاں یہ کرہ اکائی نصف قطر کا ہے اور اس کا مرکز مبدا پر ہے۔

[میتھمیٹیکل ٹرائی پاس]

(۳۷) ثابت کرو کہ لاپلاس کی مساوات $\nabla^۲ \epsilon = ۰$ کا ایک حل (۲۳۵)

$$\epsilon = (ا\, جم\, ن\, طہ + ب\, جب\, ن\, طہ)\, قو^{-لہ ی}\, جےن\, (لہ\, ر)$$

ہے جہاں ر، طہ، ی اسطوانی محدد ہیں اور ا، ب، ن، لہ اختیاری

مستقل ہیں۔ [لندن]

(۳۸) ثابت کرو کہ مساوات $\frac{جف^۲ و}{جف\, لا^۲} + \frac{جف^۲ و}{جف\, ما^۲} + و = ۰$

کا ایک حل جےن (ر) (ان جم ن طہ + بن جب ن طہ) ہے جہاں ر

اور طہ قطبی محدد ہیں اور ان اور بن اختیاری مستقل ہیں۔ [لندن]

(۳۹) بتاؤ کہ مساوات $\frac{جف\, \epsilon}{جف\, ت} = ا^۲ \frac{جف^۲ \epsilon}{جف\, لا^۲}$

کے حل سلسلوں میں کس طرح معلوم کئے جا سکتے ہیں اور پوری طرح

سے اس صورت کو حل کرو جس میں

$$ج\ جزت = \frac{جف\ ع}{جف\ لا} = ۱ = ع$$

جبکہ لا = ۰ [لندن]

(۴۰) مساوات $۴ \frac{فر^۲ ما}{فر\ لا^۲} + ۹\ لا\ ما = ۰$

کے دو غیر تابع حل لا کی صعودی قوتوں میں حاصل کرو اور مساوات کے متغیروں کو بدل کر یا کسی اور طرح ثابت کرو کہ کامل حل کو شکل

$$ما = ا\ لا^{\frac{۱}{۲}} جـ_{\frac{۱}{۳}} (لا^{\frac{۳}{۲}}) + ب\ لا^{\frac{۱}{۲}} جـ_{-\frac{۱}{۳}} (لا^{\frac{۳}{۲}})$$

میں لکھا جا سکتا ہے جہاں ا اور ب اختیاری مستقل ہیں۔ [لندن]

(۴۱) ثابت کرو کہ مساوات $\frac{فر\ ما}{فر\ لا} + ف + ق\ ما + ر\ ما^۲ = ۰$

کا کامل حل اندراج $ما = ما_۱ + \frac{۱}{ی}$ سے حاصل کیا جا سکتا ہے اگر ایک خاص حل ما۱ معلوم ہو جہاں ف، ق اور ر، لا کے تفاعل ہیں۔

ثابت کرو کہ اگر دو خاص حل ما۱ اور ما۲ معلوم ہوں تو کامل حل

$$لوک \left(\frac{ما - ما_۱}{ما - ما_۲}\right) = \int ر (ما_۲ - ما_۱) فر لا + مستقل$$

ہے۔

مساوات $(لا^۲ - ۱) \frac{فر\ ما}{فر\ لا} + لا + ۱ - (لا^۲ + ۱) ما + (لا - ۱) ما^۲ = ۰$

کا کامل حل معلوم کرو، اس مساوات کے دو خاص حل ہیں اور ان کا حاصل ضرب اکائی ہے۔ [لندن]

(۴۲) ثابت کرو کہ تفرقی مساوات

$$(۱ - لا^۲) \frac{فر^۲ ما}{فر\ لا^۲} + ۲ \{ ب + (ا - ۱) لا \} \frac{فر\ ما}{فر\ لا} + ۲\ ا\ ما = ۰$$

کا ایک حل شکل $(\text{۱}+\text{لا})^{\text{ف}}(\text{۱}-\text{لا})^{\text{ق}}$ کا ہے جہاں ف اور ق متعین مستقل ہیں۔ اِس مساوات کو پوری طرح حل کرو اور اِس سے اخذ کرو یا کسی طرح ثابت کرو کہ اگر ۲ا ایک مثبت صحیح عدد ن ہو تو مساوات کا ایک حل، لا میں ایک کثیر رقمی ہے جس کا درجہ ن ہے۔

(۲۳۶)

(۴۳) تصدیق کرو کہ مساوات

$$\text{لا}(\text{۱}-\text{لا}^{\text{۲}})^{\text{۲}}\frac{\text{فر}^{\text{۲}}\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{۲}}}+(\text{۱}-\text{لا}^{\text{۲}})(\text{۱}+\text{۳لا}^{\text{۲}})\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}+\text{۴لا}(\text{۱}+\text{لا}^{\text{۲}})\text{ما}=\text{۰}$$

کا ایک خاص حل $\text{۱}-\text{لا}^{\text{۲}}$ ہے۔ اِس کو پوری طرح حل کرو۔

مبدلوں کے تغیر کے طریقہ سے یا کسی اور طرح اُس مساوات کو پوری طرح حل کرو جو اوپر کی مساوات میں بائیں جانب صفر کی بجائے $(\text{۱}-\text{لا}^{\text{۲}})^{\text{۲}}$ رکھنے سے حاصل ہوتی ہے۔ [لندن]

(۴۴) ثابت کرو کہ مساوات

$$\frac{\text{فر}^{\text{۲}}\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{۲}}}+\text{ف}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}+\text{ق}\,\text{ما}=\text{۰}$$

کا کامل حل جہاں ف اور ق، لا کے دئے ہوئے تفاعل ہیں معلوم ہو سکتا ہے اگر مساوات

$$\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}}+\text{ع}^{\text{۲}}+\text{ق}-\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\frac{\text{فرف}}{\text{فرلا}}-\frac{\text{۱}}{\text{۴}}\text{ف}^{\text{۲}}=\text{۰}$$

کا کوئی حل معلوم ہو۔

اِس سے یا کسی اور طرح مساوات

$$(\text{۱}-\text{لا}^{\text{۲}})\frac{\text{فر}^{\text{۲}}\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{۲}}}-\text{۴لا}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}+(\text{لا}^{\text{۲}}-\text{۳})\text{ما}=\text{۰}$$

کو حل کرو۔ [لندن]

(۴۵) ثابت کرو کہ و = ط قوٰ^لا رکھنے سے مساوات

$$لا \frac{فر^۲ و}{فر لا^۲} - ۲ن \frac{فر و}{فر لا} + لا و = ۰$$

کے کامل حل کو جہاں ن ایک صحیح عدد ہے شکل

(ا جم لا + ب جب لا) ف(لا) + (ا جب لا - ب جم لا) فہ(لا)

میں بیان کیا جا سکتا ہے جہاں ف (لا) اور فہ (لا) موزوں کثیر رقمی ہیں۔ [لندن]

(۴۶) اگر مساوات

ف (لا) ماً - فَ (لا) ماً + فہ (لا) ماَ + خہ (لا) ما = ۰

کے دو غیر تابع حل ع اور و ہوں جہاں زبر لا کے لحاظ سے تفرق کو بیان کرتے ہیں تو ثابت کرو کہ کامل حل

ا ع + ب و + ج ط ہے جہاں

$$ط = ع \int \frac{و ف (لا) فر لا}{(ع وَ - عَ و)^۲} - و \int \frac{ع ف(لا) فر لا}{(ع وَ - عَ و)^۲}$$

اور ا، ب، ج اختیاری مستقل ہیں۔

مساوات

لا^۲ (لا^۲ + ۵) ماً - لا (۷ لا^۴ + ۲۵) ماً + (۲۲ لا^۲ + ۴۰) ماَ - ۳۰ لا ما = ۰

کو حل کرو جس کے حل شکل لا^ن کے ہیں۔ [لندن]

(۴۷) دو غیر تابع قوت کے سلسلے حاصل کرو جو مساوات

$$(لا^۲ - ل^۲) \frac{فر^۲ ما}{فر لا^۲} + ب لا \frac{فر ما}{فر لا} + ج ما = ۰$$

کے حل ہوں اور ان کے استدقاق کا علاقہ معلوم کرو۔ [لندن]

(۴۸) ثابت کرو کہ مساوات

$$لا(۱ - لا) \frac{فر^۲ ما}{فر لا^۲} + (۱ - ۲ لا) \frac{فر ما}{فر لا} - \frac{۱}{۴} ما = ۰$$

کے دو تکملے

$$\text{مج}^{\infty}\, \text{ا}_{\text{ن}}\, \text{لا}^{\text{ن}} ،\quad \text{مج}^{\infty}\, \text{ا}_{\text{ن}} \left(\tfrac{1}{4}\,\text{لوک لا} + 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \dots - \tfrac{1}{2\text{ن}}\right)\text{لا}^{\text{ن}} \qquad (237)$$

ہیں جہاں

$$\text{ا}_{\text{ن}} = \left\{ \frac{\text{گا}(\text{ن} + \frac{1}{2})}{\text{گا}(\text{ن} + 1)} \right\}^{2}$$

[لندن]

(۴۹) وہ تفرقی مساوات معلوم کرو جس کا ابتدائی

$$\text{ما} = \text{ا}\left(\text{جب لا} + \frac{\text{جم لا}}{\text{لا}}\right) + \text{ب}\left(\text{جم لا} - \frac{\text{جب لا}}{\text{لا}}\right)$$

ہے جہاں ا ، ب اختیاری مستقل ہیں۔ [لندن]

(۵۰) وہ شرط حاصل کرو کہ مساوات

$$\text{ف فرلا} + \text{ق فرما} = 0$$

کا ایک متکمل جزو ضربی ہو جو صرف لا کا ایک تفاعل ہو۔ نتیجہ کو

$$(3\,\text{لا ما} - 2\,\text{ا ما}^{2})\,\text{فرلا} + (\text{لا}^{2} - 2\,\text{ا لا ما})\,\text{فرما} = 0$$

کے تکمل کرنے میں استعمال کرو۔ [لندن]

(۵۱) ثابت کرو کہ مساواتوں

$$\text{ما} - \text{لا}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \frac{2\,\text{ا لا}^{2}}{\text{لا}^{2} - \text{ما}^{2}}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = 0 ،$$

$$\text{لا}^{2} - \text{ما}^{2} + 2\,(\text{لا ما} + \text{ب لا}^{2})\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = 0$$

کا ایک مشترک ابتدائی ہے۔ اس کو معلوم کرو۔ [لندن]

(۵۲) ثابت کرو کہ مساوات

$$\text{ف}\,\frac{\text{فر}^{2}\text{ع}}{\text{فرلا}^{2}} + \text{ق}\,\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} + \text{ر ع} = 0$$

کا کوئی حل مساوات

$$\frac{\text{فر}^{2}}{\text{فر لا}^{2}}(\text{ف ی}) - \frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}(\text{ق ی}) + \text{ر ی} = ۰$$

کا ایک متکمل جزو ضربی ہے اور اس کے بالعکس یعنے یہ کہ ثانی الذکر مساوات کا کوئی حل اول الذکر کا ایک متکمل جزو ضربی ہے ـ
پس ان میں سے پہلی مساوات کو پوری طرح تکمل کرو، یہ دیا گیا ہے کہ

$$\frac{\text{فر}^{2}}{\text{فر لا}^{2}}\left(\frac{\text{ف}}{\text{ق}}\right) + \frac{\text{ر}}{\text{ق}} = ۰$$

[لندن]

(۵۳) اگر مساوات

$$\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{2}} + \text{ف}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{ق ما} = ۰$$

کا ایک حل جہاں ف اور ق، لا کے تفاعل ہیں

$$\text{ما} = \text{ا جب}(\text{ن لا} + \text{ع})$$

ہو سکے جہاں ا اور ع اختیاری مستقل ہیں تو ف اور ق کے درمیان رشتہ معلوم کرو ـ

(۵۴) مساوات $\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{2}} - ۴\,\text{ما} = \frac{۲\,\text{ما}}{(۱-\text{لا})^{2}}$

کو حل کرو اگر یہ دیا گیا ہو کہ اس کے دو تکملے شکل

$$\text{ما} = \frac{\text{ا} + \text{ب لا}}{۱ - \text{لا}}\,\text{و}^{\text{ک لا}}$$

کے ہیں ـ

[لندن]

(۵۵) ثابت کرو کہ اُس خطی تفرقی مساوات کو جس کے حل مساوات

$$\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{2}} + \text{ف}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{ق ما} = ۰$$

کے حلوں کے مربع ہیں

$$\left(\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}} + ۲\text{ف}\right)\left(\frac{\text{فر}^۲\,\text{ما}}{\text{فر لا}^۲} + \text{ف}\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + ۲\text{ق ما}\right) + ۲\text{ق}\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = ۰$$

لکھا جا سکتا ہے

(۵۶) ثابت کرو کہ کُلّی تفرقی مساوات

$$۳\,\text{لا}^۲(\text{ما} + \text{ی})\,\text{فر لا} + (\text{ی}^۲ - \text{لا}^۳)\,\text{فر ما} + (\text{ما}^۲ - \text{لا}^۳)\,\text{فر ی} = ۰$$

تکمل پذیری کی شرط کو پورا کرتی ہے، اِس کو تکمل کرو۔ [لندن]

(۵۷) عامل $\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}$ کو عف سے تعبیر کیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر لا، لا کا ایک تفاعل ہو اور فہ (عف)، عف کا ایک منطق صحیح تفاعل ہو تو

$$\text{فہ}(\text{عف})\,\text{لا}\,\text{لا} = \text{لا}\,\text{فہ}(\text{عف})\,\text{لا} + \text{فہ}'(\text{عف})\,\text{لا}$$

نتیجہ کی توسیع اِس صورت پر کرو جس میں $\frac{۱}{\text{فہ}(\text{عف})}$، عف کا ایک منطق صحیح تفاعل ہے۔

تفرقی مساوات

$$\frac{\text{فر}^۳\,\text{ما}}{\text{فر لا}^۳} + ۸\,\text{ما} = ۳\,\text{لا}^۲ + \text{لا}\,\text{قو}^{-۲\text{لا}}\,\text{جم لا}$$

کو حل کرو۔ [لندن]

(۵۸) ثابت کرو کہ

$$۳\frac{\text{فر}^۲\,\text{ما}}{\text{فر لا}^۲} + ۴\,\text{لا}\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} - ۸\,\text{ما} = ۰$$

کا ایک تکملہ، لا میں ایک کثیر رقمی ہے۔ عام حل اخذ کرو۔ [شیفیلڈ]

(۵۹) ثابت کرو کہ اگر مساوات ف فرلا + ق فرما + ر فری = ۰ میں ف، ق اور ر، لا، ما اور ی کے متجانس تفاعل ہوں اور ان کا درجہ ایک ہی ہو تو ایک متغیر کو دوسرے دو سے جدا کیا جا سکتا ہے اور

اِس سے مساوات ٹھیک بنجاتی ہے اگر وہ تکمل پذیر ہو۔

مساوات

$$ی^3 (لا^2 فرلا + ما^2 فرما) + ی \{لا ما ی^2 + ی^4 - (لا^2 + ما^2)^2\} (فرلا + فرما)$$

$$+ (لا + ما) \{ی^4 - ی^2 (لا^2 + ما^2) - (لا^2 + ما^2)^2\} فری = ۰$$

کو تکمل کرو اور تکملہ جبریہ شکل میں حاصل کرو۔ [لندن]

(۶۰) ثابت کرو کہ اگر مساوات ف فرلا + ق فرما + ر فری = ۰ ٹھیک ہو تو اس کو شکل لہ فر ع + مہ فر و = ۰ میں تحویل کیا جا سکتا ہے جہاں $\frac{لہ}{مہ}$ صرف ع اور و کا ایک تفاعل ہے اور ع = مستقل اور و = مستقل مساواتوں

$$\frac{فرلا}{\frac{جف\ ق}{جف\ ی} - \frac{جف\ ر}{جف\ ما}} = \frac{فرما}{\frac{جف\ ر}{جف\ لا} - \frac{جف\ ف}{جف\ ی}} = \frac{فری}{\frac{جف\ ف}{جف\ ما} - \frac{جف\ ق}{جف\ لا}}$$

کے دو غیر تابع حل ہیں۔

اِس سے یا کسی اور طرح مساوات

$$(ما ی + ی^2) فرلا - لا ی فرما + لا ما فری = ۰$$

کو تکمل کرو۔ [لندن]

(۶۱) ثابت کرو کہ ی^2 = ۲ لا ما،

$$لا + ما + \sqrt{ی^2 - ۲ لا ما} = ف (لا + ما + ی^2)$$

میں جو

$$\{۲ \sqrt{ی^2 - ۲ لا ما} - ۲ لا - ۱\} ی ع + \{۱ + ۲ ما - ۲ \sqrt{ی^2 - ۲ لا ما}\} ی ق = لا - ما$$

کا عام حل ہے مثال نہیں ہے لیکن ان کے باوجود وہ اُس مساوات کا حل ہے ۔ [شیفیلڈ]

(۲۴۹) (۶۲) (اَ) بتاؤ کہ ریکیٹی کی مساوات

$$\frac{فر ما}{فر لا} = ا_۰ (لا) + ا_۱ (لا) ما + ا_۲ (لا) ما^۲$$

کو کس طرح دوسرے رتبہ کی خطی مساوات میں تحویل کیا جا سکتا ہے ۔ اِس سے یا کسی اور طرح ثابت کرو کہ کسی چار تکملوں کی چلیپی نسبت مستقل ہوتی ہے ۔

(بَ) تصدیق کرو کہ

$$لا \frac{فر ما}{فر لا} = لا^۲ - \frac{۱}{۴} + ما^۲$$

کے تکملے $\frac{۱}{۲}$ + لا مس لا ، $\frac{۱}{۲}$ - لا مم لا ہیں اور ابتدائی کو ماخوذ کرو۔

[لنڈن]

(۶۳)

$$\frac{فر لا}{فر ت} = - سہ ما ،$$

$$\frac{فر ما}{فر ت} = سہ لا$$

کو معمولی طریقہ پر حل کر کے اور نتیجہ سے ت کو ساقط کر کے ثابت کرو کہ نقطہ (لا ، ما) ، ایک دائرہ پر واقع ہے ۔

نیز اِس کو پہلی مساوات کے لا گنئے میں دوسری مساوات کے ما گنئے کو جمع کر کے ثابت کرو ۔

[اِن مساواتوں سے ایک نقطہ کی جو زاوئی رفتار سہ سے ایک دائرہ مرتسم کر رہا ہے رفتاریں ، محوروں کے متوازی تحلیل شدہ ، حاصل ہوتی ہیں ]

(۶۴) منحنیوں $ما^۲ (۱ - لا) = لا^۳$

کے قائم مرماۃ معلوم کرو ۔

ثابت کرو کہ وہ نظام

ر² = ب² (۳ + جم ۲ طہ)

میں تحویل ہوتے ہیں۔ [شیفیلڈ]

(۶۵) فرلا/فرت = ن ما - م ی،

فرما/فرت = ل ی - ن لا،

فری/فرت = م لا - ل ا

جہاں ل، م، ن مستقل ہیں، ثابت کرو کہ

ل لا + م ما + ن ی،

لا² + ما² + ی²

اور (فرلا/فرت)² + (فرما/فرت)² + (فری/فرت)²

سب مستقل ہیں۔ اِن نتیجوں کی تعبیر بیان کرو۔

(۶۶) ایک مستوی منحنی ایسا ہے کہ مثلث ف ن ت کا رقبہ قطعۂ ا ف ن کے رقبہ کا مُ گنا ہے جہاں ن ت کسی نقطہ ف پر کا زیر مماس، ف ن مُعین، اور ا مبدا ہے جو منحنی پر ہے۔ ثابت کرو کہ اِس منحنی کی مساوات ما^{م²-۱} = ا^{م²-۲} لا ہے۔

ثابت کرو کہ قطعہ ا ف ن کو محور لا کے گرد گھمانے سے جو حجم مرتسم ہوتا ہے وہ اُس مخروط کے حجم کے ساتھ مستقل نسبت رکھتا ہے جو مثلث ف ن ت کی گردش سے تکوین پاتا ہے۔ [لندن]

(۲۴۰) (۶۷) اندراج لا = رجم طہ، ما = رجب طہ استعمال کر کے یا کسی اور طرح تفرقی مساوات

$$(لا^۲ + ما^۲)(لا ع - ما)^۲ = ۱ + ع^۲$$

کو حل کرو۔

نیز نادر حل معلوم کرو اور نتیجوں کی ہندسی تعبیر بیان کرو۔ [لندن]

(۶۸) ثابت کرو کہ مساوات

$$(لا^۲ + ما^۲ - ۲ لا ع ما)^۲ = ۴ ا^۲ ما^۲ (۱ - ع^۲)$$

کلیرو کی شکل میں، ما^۲۔ لا^۲ کو نیا متبوع متغیر بنانے سے تحویل ہوسکتی ہے۔ اسکو حل کرو اور ثابت کرو کہ نادر حل سے دو قائم زائد تعبیر ہوتے ہیں۔ نیز اسکی تصدیق کرو کہ یہ حل دی ہوئی مساوات کو پورا کرتا ہے۔ [لندن]

(۶۹) ثابت کرو کہ وہ منحنی جن میں نصف قطر انحنا اس طول کے مساوی ہوتے ہیں جو عماد پر ایک ثابت خط مستقیم سے منقطع ہوتا ہے دائرے ہوں گے یا زنجیرے۔ [لندن]

(۷۰) مساوات

$$ما = لا - ۲ ا ع + ا ع^۲$$

کو حل کرو اور نادر حل معلوم کرو۔ [لندن]

(۷۱) ایک مستوی منحنی ایسا ہے کہ اس کا نصف قطر انحناء غہ اس مقطوعہ نہ کے ساتھ جو عماد پر منحنی اور محور لا کے درمیان منقطع ہوتا ہے رشتہ غہ نہ = ج^۲ رکھتا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر منحنی کے تقعر کو محور لا کی جانب سے کھا لیا جائے تو

$$ما^۲ = ج^۲ جب^۲ فہ + ب$$

جہاں و لا کے ساتھ مماس کا میلان فہ ہے۔ صورت ب = ۰ میں لا کی قیمت، فہ کے تفاعل کے طور پر حاصل کرو اور منحنی کی شکل کا نقشہ کھینچو۔ [لندن]

(۷۲) اگر منحنیوں کے ایک قبیل کی تفرقی مساوات کو دو قطبی محددوں ر، ر، طہ میں بیان کیا گیا ہو تو ثابت کرو کہ قائم مرماہ کی

تفرقی مساوات، فرر کی بجائے رفرطہ، فرَرَ کی بجائے رَفرطہَ، رفرطہ کی بجائے۔ فرر، رَفرطَہ کی بجائے۔ فرَرَ لکھنے سے حاصل ہوتی ہے۔

منحنیوں

$$\frac{ا}{ر} + \frac{ب}{رَ} = ج$$

کے قائم مرماۃ معلوم کرو جہاں ج ایک متغیر مبدل ہے۔ [لندن]

(۷۳) ایک منحنی کے نقطہ ن پر کا عماد ایک ثابت خط مستقیم سے نقطہ گ پر ملتا ہے اور ن گ کے وسطی نقطہ کا طریق ایک خط مستقیم ہے جو ثابت خط مستقیم سے زاویہ مم ۳' پر مائل ہے۔ ثابت کرو کہ ن کا طریق ایک مکافی ہے۔ [لندن]

(۷۴) مساوات ۲ (ع - ۱) ما = ع² لا کو حل کرو۔ ثابت کرو کہ "ع ممیز" اس مساوات کا ایک حل ہے اور ان منحنیوں کے قبیل کا لفاف ہے جو عام حل سے حاصل ہوتے ہیں۔ [لندن]

(۷۵) مکافی ما² = ۴ ا لا کے دریچوں کی تفرقی مساوات معلوم کرو اور اس کو تکمل کرو۔ نادر حل کی نوعیت کیا ہے؟ [لندن]

(۲۴۱)

(۷۶) ثابت کرو کہ اگر ایک سطح کے عماد سب کے سب ایک ثابت خط مستقیم سے ملیں تو یہ سطح ایک گردشی سطح ہونی چاہئے۔
[لندن]

(۷۷) جزئی تفرقی مساوات

$$ع\ لا + ق\ ما = \sqrt{لا^{2} + ما^{2}}$$

کو تکمل کرو۔
عام تکملہ کی اور ذیلی تکملوں کی ہندسی تعبیر بیان کرو۔ [لندن]

(۷۸) تفرقی مساوات $ی(لا + ۲ما)\frac{جف\ ی}{جف\ لا} - ی(ما + ۲لا)\frac{جف\ ی}{جف\ ما} = ا - لا^{2}$

کو تکمل کرو -

ایسے خاص حل معلوم کرو کہ ی = ۰ کے متوازی کسی مستوی سے جو تراشِ منقطع ہو وہ (۱) ایک دائرہ، (۲) ایک قائم زائد ہو۔ [لندن]

(۷۹) منحنیوں کا ایک قبیل مساواتوں

$$\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + ۶ \text{ی}^2 = \text{عہ}، \quad ۲ \text{لا}^2 + ۵ \text{ما}^2 + \text{ی}^2 + ۴ \text{لا ما} = \text{بہ}$$

سے تعبیر ہوتا ہے جہاں عہ، بہ مبدل ہیں -

ثابت کرو کہ منحنیوں کا یہ قبیل سطحوں کے ایک قبیل سے علی القوائم قطع ہو سکتا ہے اور اس قبیل کی مساوات معلوم کرو- [لندن]

(۸۰) حل کرو

$$\text{ب} (\text{ب ج ما} + \text{د لا ی}) \text{ع} + \text{ا} (\text{اج لا} + \text{ب ما ی}) \text{ق}$$
$$= \text{ا ب} (\text{ی}^2 - \text{ج}^2)$$

اور ثابت کرو کہ حل کسی ایسی سطح کو تعبیر کرتا ہے جو اُن خطوں سے تکوین پاتی ہے جو دو دیے ہوئے خطوں سے ملتے ہیں -

(۸۱) حل کرو (اَ) $\text{ل} \frac{\text{فرب}}{\text{فرت}} + \text{ر ب} = \text{ع}$

جہاں ل، ر، اور ع مستقل ہیں -

[یہ مساوات برقی رو ب کے لیے ہے جو مزاحمت ر اور ذاتی امالہ کی قدر ل کے ایک تار میں ایک مستقل اولٹیج ع کے تحت ہے-]

(۲) اختیاری مستقل کی قیمت معلوم کرو اگر ب = ب جبکہ ت = ۰.

(۳) ب کس قیمت کے قریب آئے گا جبکہ ت بڑا ہو؟

[مستقل روؤں کے لیے اوہم کا کلیہ]

(۸۲) حل کرو $\text{ل} \frac{\text{فرب}}{\text{فرت}} + \text{ر ب} = \text{ع جم ع ت}$

[حروف کا مفہوم وہی ہے جو پچھلی مثال میں بیان کیا گیا ہے

الا آنکہ او لیشج ع جم ع ت مستقل ہونے کی بجائے اب دَوری ہے ۔ منتیم تفاعل جلد ہی قابل نظر انداز ہو جاتا ہے یعنے رو کے آزاد اہتزازوں کی تقصیر ہو جاتی ہے ]

$$\text{ل}\ \frac{\text{فر}^2\text{ق}}{\text{فرت}^2} + \text{ما}\ \frac{\text{فرق}}{\text{فرت}} + \frac{\text{ق}}{\text{ج}} = \text{ع جم ع ت} \qquad (۸۳)$$

کا خاص تکملہ معلوم کرو ۔

[اس سے لیڈنی مرتبان کے ایک پترے پر بارق حاصل ہوتا ہے جبکہ دَوری محرکہ برق ع جم ع ت اس دَور میں عمل کرتا ہے جو پتروں کو ملاتا ہے ۔ خاص تکملہ سے وہ بار حاصل ہوتا ہے جو آزاد برقی اہتزازوں کی تقصیر کے بعد پایا جاتا ہے ] ۔

(۲۴۲)

(۸۴) ثابت کرو کہ مساواتیں

$$۲\,\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} + ۳\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} - ۱۶\text{لا} - ۳\text{ما} = ۰\text{،}\quad ۷\,\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} - ۲\text{لا} - ۳\text{ما} = ۰$$

آزمائشی حل ما = م لا سے پوری ہوتی ہیں بشرطیکہ م ، دو درجی مساوات

$$\frac{۲ + ۳\text{م}}{۷} = \frac{۱۶ + ۳\text{م}}{۲ + ۳\text{م}}$$

کی ایک اصل ہو ، اور لا ، مساوات

$$۷\,\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} - (۲ + ۳\text{م})\text{لا} = ۰$$

سے حاصل ہو ۔

پس ثابت کرو کہ ان تفرقی مساواتوں کے حلوں کے دو جٹ

$$\text{ما} = ۴\text{لا} = ۴\,\text{ا قو}^{۲\text{ت}}$$

اور

$$\text{ما} = -۳\text{لا} = -۳\,\text{ب قو}^{-\text{ت}}$$

ہیں اور اس لیے عام حل

$$لا = ا\, قو^{۲ت} + ب\, قو^{ت}$$

$$ما = ۴\, ا\, قو^{۲ت} - ۳\, ب\, قو^{ت}$$

ہے -

(۸۵) پچھلی مثال کا طریقہ مساواتوں

$$۲ \frac{فر^۲\, لا}{فرت^۲} + ۲۳\, لا - ۸\, ما = ۰,$$

$$۳ \frac{فر^۲\, لا}{فرت^۲} + ۲ \frac{فر^۲\, ما}{فرت^۲} - ۱۳\, لا + ۱۰\, ما = ۰$$

کو حل کرنے میں استعمال کرو -

[اس نمونہ کی مساواتیں اُن مسئلوں میں واقع ہوتی ہیں جو آزادی کے دو درجے رکھنے والے نظاموں کے صغیر اہتزازوں سے متعلق ہوتے ہیں - ما = ۲ لا (یا ما = -۵ لا) سے جو حرکت حاصل ہوتی ہے اس کو انعکاسی صدر یا طبعی اسلوب کہتے ہیں - صریحًا یہ حرکت ایسی ہے کہ نظام کے تمام حصے ایک ہی دور سے ساتھ ساتھ ایک ہی سمت میں یعنی موسیقی طور پر حرکت کررہے ہیں - اگر ما - ۲ لا اور ما + ۵ لا کو لا اور ما کی بجائے نئے متغیر قرار دیا جائے تو ان کو صدر یا طبعی محدد کہا جاتا ہے -]

(۸۶) اگر ل، م، ن، ر، س مثبت عدد ہوں اور

$ل\, ن > م^۲$ تو ثابت کرو کہ لا اور ما جن کی تعریف مساواتوں

$$ل \frac{فر\, لا}{فرت} + م \frac{فر\, ما}{فرت} + ر\, لا = ۰,$$

$$م \frac{فر\, لا}{فرت} + ن \frac{فر\, ما}{فرت} + س\, ما = ۰$$

سے ہوئی ہو لا انتہا گھٹتے ہیں جبکہ ت بڑھتا ہے -

[ثابت کرو کہ $\text{لا} = \text{ا} \, \text{قو}^{\text{عہ ت}} + \text{ب} \, \text{قو}^{\text{بہ ت}}$ اور $\text{ما} = \text{ع} \, \text{قو}^{\text{عہ ت}} + \text{ف} \, \text{قو}^{\text{بہ ت}}$ جہاں عہ اور بہ حقیقی اور منفی ہیں۔ اِن مساواتوں سے دو باہم اثر کرنے والے برقی دَوروں کے آزاد اہتزاز حاصل ہوتے ہیں۔ ل اور ن ذاتی امالہ کی اور م باہمی امالہ کی قدریں ہیں اور ر اور س مزاحمتیں ہیں]

(۸۷) ثابت کرو (حلوں کا پوری طرح عمل کئے بغیر) کہ ہمزاد مساواتوں

$$\text{ل} \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} + \text{م} \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} + \text{ر} \, \text{لا} + \int \frac{\text{لا فرت}}{\text{ج}} = \text{ع جب ع ت}،$$

$$\text{م} \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} + \text{ن} \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} + \text{س} \, \text{ما} = ۰$$

(۲۴۴) کے خاص تکملے نہیں بدلتے اگر پہلی مساوات میں رقم $\int \frac{\text{لا}}{\text{ج}} \, \text{فرت}$ کو ترک کیا جائے اور ل کی بجائے $\text{ل} - \frac{۱}{\text{ج ع}^۲}$ رکھا جائے۔

[یہ اِس واقعہ سے مستنبط ہوتا ہے کہ خاص تکملے شکل ا جب (ع ت - عہ) کے ہیں]

[ان مساواتوں سے دو باہم اثر کرنے والے دوروں میں رَوئیں حاصل ہوتی ہیں جبکہ اوّلی دور جس میں گنجائش ج کا ایک مکثفہ ہے ایک متبادل محرکہ برق کے زیرِ عمل ہو۔ اِس مثال سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ مکثفہ کے اثر کی خود امالہ کے اضافہ سے تلافی ہو سکتی ہے]

(۸۸) اگر

$$\text{ل} \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} + \text{م} \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} + \frac{۱}{\text{ج}} \int \text{لا فرت} = \text{ف(ت)}،$$

اور

$$\text{م} \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} + \text{ن} \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} = ۰$$

جہاں $\text{ل ن} - \text{م}^۲$ بہت چھوٹی مثبت مقدار ہے تو ثابت کرو کہ

لا کے لیے جو متمم تفاعل حاصل ہوتا ہے وہ ایک بہت تیز اہتزاز کو تعبیر کرتا ہے۔

[یہ مساواتیں ریالے (Rayleigh) کے اُس نظریے میں واقع ہوتی ہیں جو ایک بند ثانوی امالی لپیٹے کے اولی دَور کے ایک مکثفہ کے اہتزازی اخراج سے متعلق ہے۔ یہ مشاہدہ طلب ہے کہ دوسری مساوات سے یہ واضح ہے کہ ثانوی رَو اپنے اعظم پر ہوتی ہے جب کہ اولی رَو اپنے اقل پر ہو۔ دیکھو گرے کی کتاب (Magnetism and Electricity) دفعات ۴۸۹، ۴۹۰]۔

(۸۹) ثابت کرو کہ ہمزاد مساواتوں

$$م \frac{د^2 لا}{د ت^2} = - ا (لا - لا') + ک جم ع ت ،$$

$$م' \frac{د^2 لا'}{د ت^2} = - ا' لا' + ا (لا - لا')$$

کے خاص تکملوں کو

$$لا = \frac{ب' ک}{ا^2 - ب ب'} جم ع ت ،$$

$$لا' = \frac{- ا ک}{ا^2 - ب ب'} جم ع ت$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں ب = م ع$^2$ - ا اور ب' = م' ع$^2$ - (ا + ا')۔
پس ثابت کرو کہ ع کی دو خاص قیمتوں کے لیے لا اور لا' دونوں لامتناہی ہیں۔

[ان مساواتوں سے "لچکدار دوہرے رقاص" کے اہتزاز حاصل ہوتے ہیں۔ کمیتوں م اور م' کو اس طرح ترتیب دیا گیا ہے کہ وہ صرف ایک ہی افقی خط میں حرکت کر سکتے ہیں۔ ایک کمانی م' کو اِس خط کے ایک ثابت نقطہ سے لاتی ہے اور دوسری کمانی م اور م' کو ملاتی ہے۔

م پر ایک دوری قوت عمل کرتی ہے اور حل سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ دونوں کمیتیں قسری ارتعاشات کرتی ہیں جن کا حیطہ ع کی دو خاص قیمتوں کے لیے بہت بڑا ہو جاتا ہے۔ بلا شبہ یہ کچھ گمک کا مظہر ہے۔ ع کی وہ قیمتیں جن سے اِس صورت میں گمک پیدا ہوتا ہے وہی نہیں ہیں جو ہوتیں اگر صرف ایک کمیت موجود ہوتی۔ اِس کا اطلاق ٹربائن دھرے میں "تیز گھماؤ" کی بحث پر کیا جا سکتا ہے۔ دیکھو اسٹوڈولا کی کتاب (Steam Turbine)]

(۹۰) ثابت کرو کہ ہمزاد مساواتوں (۲۴۴)

$$(\tfrac{1}{3}م+ﻣ)۴ا\frac{فر^۲ط}{فرت^۲}+۲ﻣب\frac{فر^۲فہ}{فرت^۲}=-ج(م+۲ﻣ)ط،$$

$$\frac{۴ب}{۳}\frac{فر^۲فہ}{فرت^۲}+۲ا\frac{فر^۲ط}{فرت^۲}=-ج فہ$$

کے حل کو جہاں م = ﻣ اور ا = ب یہ لکھ کر بیان کیا جا سکتا ہے کہ ط اور فہ دونوں میں سے ہر ایک دو ایسی سادہ موسیقی اہتزازوں سے ترکیب یافتہ ہے جن کے دور $\frac{۲\pi}{ع_۱}$ اور $\frac{۲\pi}{ع_۲}$ ہیں جہاں $ع_۱^۲$ اور $ع_۲^۲$، $ع^۲$ میں دو درجی مساوات

$$۲۸ا^۲ع^۴-۸۴اجع^۲+۲۷ج^۲=۰$$

کی اصلیں ہیں۔

[اِن مساواتوں سے کمیتوں م اور ﻣ اور طولوں ۲ا اور ۲ب کے دو ڈنڈوں کے میلان انتصابی کے ساتھ حاصل ہوتے ہیں جبکہ وہ ایک دوہرے رقاص کے طور پر ایک انتصابی مستوی میں جھول رہے ہوں، پہلا ڈنڈا ایک ثابت نقطہ سے آزادانہ لٹکا ہوا ہے اور دوسرا پہلے کے نچلے سرے سے لٹک رہا ہے۔ اوپر جن اہتزازوں کا ذکر کیا گیا ہے

ان کو صادر (یا طبعی) اہتزاز کہتے ہیں۔ چھوٹے اہتزازوں کے بہت سے مسئلوں میں ایسی مساواتیں وقوع پذیر ہوتی ہیں۔ ان کا تفصیلی ذکر راؤتھ کی کتاب "(Advanced Rigid Dynamics)" میں ملے گا جس میں اس صورت پر بھی خاص توجہ کی گئی ہے جبکہ ع کی مساوات کی اصلیں مساوی ہوں۔]

(۹۱)

$$\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرت}^2} + \text{ک}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} + \text{ج}^2\,\text{لا} = 0،$$

$$\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرت}^2} - \text{ک}\,\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} + \text{ج}^2\,\text{ما} = 0.$$

[ان مساواتوں سے ایک گردشی رقاص کے لنگر کی حرکت معلوم ہوتی ہے جو انتصابی سے زیادہ دور نہیں جھولتا۔ اگر ابتدائی شرطیں ایسی ہوں کہ ب = ۰ تو یہ معلوم ہوگا کہ حرکت ایک دائرہ میں ہے اور زاوئی رفتار ع ہے، لیکن اگر ا = ۰ تو حرکت ایک دائرہ میں زاوئی رفتار ق کے ساتھ مخالف جہت میں حاصل ہوگی۔ (ع، ق، ا، ب کے لیے دیکھو جوابات)۔
ایسی ہی مساواتیں گردشی زداروں (Ions) کے راستہ کے لیے زیمانی اثر (طیف کے ایک خط کا مقناطیسی میدان کی وجہ سے نہرا ہونا) کی تشریح میں درست ہوتی ہیں۔ دیکھو گرے کی کتاب (*Magnetism and Electricity*) دفعات ۵۶۵ تا ۵۶۹]

(۹۲) اگر یہ دیا گیا ہو کہ

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} + \text{د}\,\text{لا} = 0، \\[2mm] \dfrac{\text{فری}}{\text{فرت}} = \text{ب}\,\text{ما}، \\[2mm] \text{لا} + \text{ما} + \text{ی} = \text{ج} \end{array}\right.$$

جہاں د، ب، ج مستقل ہیں تو ی کے لئے تفرقی مساوات حاصل کرو۔
پس ثابت کرو کہ اگر ی = $\dfrac{\text{فری}}{\text{فرت}}$ = ۰ جبکہ ت = ۰

تو
$$ی = ج + \frac{ج}{ا - ب}\left[ب\, قو^{-ا ت} - ا\, قو^{-ب ت}\right]$$

[یہ مساواتیں طبیعاتی کیمیا میں واقع ہوتی ہیں جبکہ شئے ۱ ایک درمیانی شئے ب بنے جو پھر ایک تیسری شئے ج میں تبدیل ہو۔ (۲۴۵) لا، ما، ی کسی وقت ت پر علی الترتیب ۱، ب، ج کے ارتکاز ہیں۔ دیکھو ہارکورٹ اور ایسن "Phil. Trans" بابتہ سنہ ۱۸۶۶ اور سنہ ۱۸۶۷]

(۹۳) ایک سادہ حرکی نظام پر جس کو آزادی کا ایک درجہ حاصل ہے کسی دوسرے حرکی نظام کا اثر جبکہ اول الذکر نظام ثانی الذکر کے ساتھ مربوط ہو مساوات

$$\ddot{لا} + ۲ مہ \dot{لا} + ن^۲ لا = ﻻ$$

سے تعبیر ہو سکتا ہے۔

اگر موجوں کے مہیج نظام کو یکساں برقرار رکھا جائے اور اس لیے ﻻ = ۱ جم ع ت تو ع کی وہ قیمت معلوم کرو جس کے لیے گمک ہے اور ثابت کرو کہ اگر مہ ایک خاص قیمت سے متجاوز ہو تو گمک نہ ہوگی۔ دونوں صورتوں کی تمثیل کے لیے منحنی کھینچو۔ [Math. Trip]

(۹۴) تفرقی مساوات
$$\ddot{لا} + ۲ک \dot{لا} + ن^۲ لا = ۰$$
کو حل کرو جبکہ $ک^۲ < ن^۲$۔

ایک ایسے رقاص کی صورت میں جو چھوٹے اہتزاز کر رہا ہو اور ایک پورے اہتزاز کا وقت ۲ ثانیے ہو اور ہوا کی وجہ سے زاوئی ابطاء ۰٫۰۴ × (رقاص کی زاوئی رفتار) ہو تو ثابت کرو کہ ۱° کا حیطہ ۱۰ مکمل اہتزازوں میں تقریباً ۰٫۰۴° تک گھٹ جائے گا۔

[Math. Trip.] [لوک۱۰ قو = ۴۳۴۲ ٫۰]

(۹۵) ایک نظام کی حرکت عملاً ایک واحد محدد لا پر منحصر ہے، اس کی توانائی کسی لمحہ پر ضابطہ $\frac{1}{2}$ م لاَ$^2$ + $\frac{1}{2}$ ر لا$^2$ سے بیان ہوتی ہے، اور اس کی توانائی کے فرکی قصر کی وقتی شرح $\frac{1}{2}$ ک لاَ$^2$ ہے۔ ثابت کرو کہ اس کے آزاد اہتزاز کا دور (تہ)

$$۲ \pi \left( \frac{ر}{م} - \frac{1}{16} \frac{ک^2}{م^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

ہے۔

ثابت کرو کہ قسری اہتزاز جو نمونہ ا جم ع ت کی ایک خلل ڈالنے والی قوت سے پیدا ہوتا ہے اپنی بڑی سے بڑی قیمت رکھتا ہے جبکہ ع$^2$ = $\frac{ر}{م}$ - $\frac{ک^2}{۸ م^2}$ اور اُس وقت اِس اہتزاز کا حیطہ $\frac{ا م تہ}{\pi ک}$ ہے اور اس کی ہیئت ( Phase ) قوت کی ہیئت سے بقدر مس$^{-1}$ $\frac{۴ م ع}{ک}$ کے پیچھے رہتی ہے۔ [ Math. Trip. ]

(۹۶) ثابت کرو کہ اندراج ت = $\frac{1}{2}$ $\left(\frac{فرس}{فرت}\right)^2$ سے مساوات

$$\frac{فر^2 س}{فرت^2} + ف \left(\frac{فرس}{فرت}\right)^2 = ق$$

خطی شکل

$$\frac{فرت}{فرس} + ۲ ع ت = ق$$

میں تحویل ہوتی ہے۔

$$(س + ۱) \frac{فر^2 س}{فرت^2} + \left(\frac{فرس}{فرت}\right)^2 = (س - ۱) ج$$

سے، اگر $\frac{فرس}{فرت}$ = ۰ اور س = ۲ ا جبکہ ت = ۰؛

$$\left(\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}}\right)^2 = \frac{2\text{ج}}{3}\,(\text{س} - 2\text{ا})$$

اور
$$\frac{\text{فر}^2\text{س}}{\text{فرت}^2} = \frac{\text{ج}}{3}$$

حاصل کرو۔

(۲۴۶) [اس سے حسب ذیل حرکی مسئلہ کا حل حاصل ہوتا ہے: "ایک یکساں زنجیر ایک افقی میز پر لچھے کی شکل میں پڑی ہے اور اس کا ایک سرا ایک چکنی ہلکی چرخی پر سے جو میز کے اوپر ارتفاع ا پر ہے گذرتا ہے' ابتداً زنجیر کا طول ۲ ا آزادانہ دوسری جانب لٹکتا ہے۔ ثابت کرو کہ حرکت میں ایکسان اسراع ہے۔" دیکھو لونی کی کتاب "ایک ذرہ اور استوار اجسام کا علم حرکت" صفحہ ۱۳۱]۔

(۹۷) مساوات

$$\frac{\text{جف}}{\text{جف ر}}\left(\text{ر}^2\,\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ر}}\right) + \frac{1}{\text{جب ط}}\,\frac{\text{جف}}{\text{جف ط}}\left(\text{جب ط}\,\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ط}}\right) = 0$$

کا ایک حل شکل

$$\text{فہ} = \text{ف}\,(\text{ر})\ \text{جم ط}$$

میں معلوم کرو اگر یہ دیا گیا ہو کہ

$$-\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ر}} = \text{و جم ط} \quad \text{جبکہ ر} = \text{ا}$$

اور
$$-\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ر}} = 0 \quad \text{جبکہ ر} = \infty$$

[فہ رفتار قوہ ہے جبکہ نصف قطر ا کا ایک کرہ ایک خط مستقیم میں رفتار و کے ساتھ ایک مائع میں جو لاتناہی پر ساکن ہے حرکت کرے۔ دیکھو ریمزے کی کتاب (Hydro Mechanics حصہ دوم صفحہ ۱۵۲)]۔

(۹۸) $\frac{جف^{2} ما}{جف ت^{2}} = ج^{2} \frac{جف^{2} ما}{جف لا^{2}}$

کا حل معلوم کرو جو معدوم ہو جبکہ لا = ۰ اور ا جم (ع ت + ا) میں تحویل ہو کہ جبکہ لا = ب ۔

[اس سے ایک تنی ہوئی ڈوری کے ایک حصہ کی شکل معلوم ہوتی ہے جبکہ ڈوری دونوں سروں پر ثابت ہو اور اس کا ایک معلومہ نقطہ دوری ہٹاؤ ا جم (ع ت + ا) کے ساتھ متحرک رکھا گیا ہو زیر بحث حصہ وہ ہے جو دستے ہوئے نقطہ اور ایک سرے کے درمیان ہے ۔ دیکھو ریمزے کی کتاب (Hydro-Mechanics) حصہ دوم صفحہ ۲۱۲]

(۹۹) $\frac{جف^{2} فہ}{جف ت^{2}} = ج^{2} \left( \frac{جف^{2} فہ}{جف ر^{2}} + \frac{2}{ر} \frac{جف فہ}{جف ر} \right)$

کا حل شکل

$ر فہ = ف (ج ت - ر) + فا (ج ت + ر)$

میں معلوم کرو ۔

[جہاں ہوا میں آواز کے ایک کروی ماخذ کا رفتار قوہ فہ ہے ۔ دیکھو ریمزے کی محولہ بالا کتاب صفحہ ۳۴۵]

(۱۰۰) $\frac{جف^{2} فہ}{جف لا^{2}} + \frac{جف^{2} فہ}{جف ما^{2}} = ۰$

کا ایک ایسا حل معلوم کرو کہ

$\frac{جف فہ}{جف ما} = ۰$ ، جبکہ ما = - ھ

اور فہ ایسے بدلے جیسے جم (م لا - ن ت) جبکہ ما = ۰

[فہ گہرائی ھ کی ایک نہر میں موجوں کا رفتار قوہ ہے نہر کے رُخ انتصابی ہیں ۔ دیکھو ریمزے کی کتاب صفحہ ۲۶۵]

(۱۰۱) ہمزاد تفرقی مساواتوں

$$\frac{\text{فر}^2 \text{لا}}{\text{فرت}^2} - ۲\text{ن} \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} + \text{ع}^2 \text{لا} = ۰،$$

$$\frac{\text{فر}^2 \text{ما}}{\text{فرت}^2} + ۲\text{ن} \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} + \text{ع}^2 \text{ما} = ۰$$

(۲۲۷) کا حل، ابتدائی شرطوں

$$\text{لا} = \text{ا}،\ \text{ما} = ۰،\ \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = ۰،\ \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} = ۰$$

کے ساتھ، شکل

$$\text{ی} = \frac{\text{ا}}{۲\text{ق}} \left\{ (\text{ق}+\text{ن}) \text{قو}^{\text{خ}(\text{ق}-\text{ن})\text{ت}} + (\text{ق}-\text{ن}) \text{قو}^{-\text{خ}(\text{ق}+\text{ن})\text{ت}} \right\}$$

میں حاصل کرو جہاں

$$\text{ی} = \text{لا} + \text{خ ما} \quad \text{اور} \quad \text{ق} = \sqrt{\text{ع}^2 + \text{ن}^2}$$

ثابت کرو کہ حل برتدویر ( Hypocycloid ) کو تعبیر کرتا ہے جو نصف قطروں ا اور $\frac{\text{ا ن}}{\text{ق}}$ کے دو ہم مرکز دائروں کے درمیان ہے۔

[اس مثال سے فوکو کے رقاص کے تجربہ کا وہ نظریہ حاصل ہوتا ہے جس سے زمین کی گردش ثابت ہوتی ہے۔ دیکھو برامو چ " Pro. London Math. Soc. 1914 " بابتہ سنہ ۱۹۱۴ء]

(۱۰۲) سیاروی حرکت کی آئنسٹائن کی مساوات

$$\frac{\text{فر}^2 \text{ع}}{\text{فرفہ}^2} + \text{ع} = \frac{\text{م}}{\text{ص}^2} + ۳\text{م ع}^2$$

کا تقریبی حل حسب ذیل طریقہ پر معلوم کرو:

(ا) چھوٹی رقم ۳م ع$^2$ کو نظر انداز کرو، اور حاصل کرو

$\text{ع} = \frac{\text{م}}{\text{ھ}^{۲}}\left\{۱ + \text{ز جم}(\text{فہ} - \text{قہ})\right\}$، جیسا کہ نیوٹن کی حرکیات میں۔

(ب) ع کی اس قیمت کو چھوٹی رقم ۳ م $\text{ع}^{۲}$ میں درج کرو اور حاصل کرو

$$\frac{\text{د}^{۲}\text{ع}}{\text{د فہ}^{۲}} + \text{ع} = \frac{\text{م}}{\text{ھ}^{۲}} + \frac{۳\,\text{م}^{۳}}{\text{ھ}^{۴}} + \frac{۶\,\text{م}^{۳}}{\text{ھ}^{۴}}\,\text{ز جم}(\text{فہ} - \text{قہ})$$

$$+ \frac{۳\,\text{م}^{۳}\text{ز}^{۲}}{۲\,\text{ھ}^{۴}}\left\{۱ + \text{جم}\,۲\,(\text{فہ} - \text{قہ})\right\}$$

(ج) اس تفرقی مساوات کی بائیں جانب کی تمام رقموں کو

سوائے $\frac{\text{م}}{\text{ھ}^{۲}}$ اور $\frac{۶\,\text{م}^{۳}}{\text{ھ}^{۴}}\,\text{ز جم}(\text{فہ} - \text{قہ})$ کے نظرانداز کرو۔

جم(فہ - قہ) والی رقم کو رکھنا چاہیئے، اس کا دَور وہی ہے جو متمم تفاعل کا ہے اور اس لیے اس سے ایک مسلسل بڑھنے والا خاص تکملہ پیدا ہوتا ہے۔ [دیکھو کتاب کا مسئلہ مثال ۳۶ صفحہ ۶۹]۔

پس حاصل کرو

$$\text{ع} = \frac{\text{م}}{\text{ھ}^{۲}}\left\{۱ + \text{ز جم}(\text{فہ} - \text{قہ}) + \frac{۳\,\text{م}^{۲}}{\text{ھ}^{۲}}\,\text{ز فہ جب}(\text{فہ} - \text{قہ})\right\}$$

$$= \frac{\text{م}}{\text{ھ}^{۲}}\left\{۱ + \text{ز جم}(\text{فہ} - \text{قہ} - \text{صہ})\right\} \text{ تقریباً}$$

جہاں $\text{صہ} = \frac{۳\,\text{م}^{۲}}{\text{ھ}^{۲}}\,\text{فہ}$ اور $\text{صہ}^{۲}$ کو ترک کر دیا گیا ہے۔

[اس نتیجہ سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ جب سیارہ ایک گردش میں سے حرکت کر لیتا ہے تو حضیض (جو فہ - قہ - صہ = ۰ سے حاصل ہوتا ہے) گردش کی ایک کسر کے مساوی جو $\frac{\text{صہ}}{\text{فہ}} = \frac{۳\,\text{م}^{۲}}{\text{ھ}^{۲}}$ سے حاصل ہوتی ہے آگے بڑھتا ہے۔ جب مستقلوں کو عددی قیمتیں دی جاتی ہیں تو یہ معلوم ہوگا کہ

آئنسٹائن کے نظریہ سے اُس مشہور بے قاعدگی کا ازالہ ہوتا ہے جو عطارد
کے حضیض کی حرکت کے مشاہدہ کردہ اور محسوبہ نتیجوں میں پائی جاتی ہے۔
دیکھو ایڈنگٹن کی
*Report on the Relativity Theory of Gravitation, pp. 48-52*

(۲۴۸) (۱۰۳) لا، ما، لاَ، ماَ کا ایک تفاعل ل (لا، ما، لاَ، ماَ) ہے
اور ی اور ما کی تعریف مساواتوں

$$\text{ی} = \frac{\text{جف ل}}{\text{جف لاَ}}،\quad \text{ما} = \frac{\text{جف ل}}{\text{جف ماَ}}$$

سے کی گئی ہے۔
اگر ان مساواتوں کو لاَ اور ماَ کے لیے ی، ما، لا، ما کے
تفاعلوں کے طور پر حل کیا جا سکے اور اگر ھ (ی، ما، لا، ما) وہ تفاعل
ہو جو

$$\text{ی لاَ} + \text{ما ماَ} - \text{ل}،$$

کو کُلاً ی، ما، لا، ما کی رقوم میں بیان کرنے سے حاصل ہوتا ہے تو
ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جف ھ}}{\text{جف ی}} = \text{لاَ} \qquad (۱)$$

اور

$$\frac{\text{جف ھ}}{\text{جف لا}} = -\frac{\text{جف ل}}{\text{جف لا}} \qquad (۲)$$

نیز ثابت کرو کہ مساوات

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\frac{\text{جف ل}}{\text{جف لاَ}}\right) = \frac{\text{جف ل}}{\text{جف لا}} \qquad (۳)$$

مساوات

$$\frac{\text{فری}}{\text{فرت}} = -\frac{\text{جف ھ}}{\text{جف لا}} \qquad (۴)$$

میں مستحیل ہوتی ہے۔

[یہ علم حرکت میں ہیملٹونی استحالہ ہے۔ مساوات (۳) تعمیمی محددوں میں حرکت کی لگرانجی مساوات کا نمونہ ہے۔ ہیملٹن اس کی بجائے مساواتوں (۱) اور (۴) کا زوج لیتا ہے۔ دیکھو راؤتھ کی کتاب (Elementary Rigid Dynamics) آٹھواں باب۔ اس استحالہ کا مقابلہ ساتویں باب کے آخر میں دی ہوئی متفرق مثالوں میں سے مثال ۲۱ کے استحالہ کے ساتھ کرو جس میں دو جزئی تفرقی مساواتیں ثنویت کے اصول سے ایک دوسرے سے اخذ کی جا سکتی ہیں۔]

(۱۰۴) ثابت کرو کہ اگر ہیملٹن کی جزئی تفرقی مساوات

$$\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ت}} + \text{ه}\left(\text{لا}_1، \text{لا}_2، \ldots \text{لا}_\text{ن}، \text{ع}_1، \text{ع}_2، \ldots \text{ع}_\text{ن}، \text{ت}\right) = 0$$

پر جیکوبی کا طریقہ (دفعہ ۱۴۰) استعمال کیا جائے تو مساواتیں

$$\frac{\text{فرلا}_\text{ر}}{\text{فرت}} = \frac{\text{جف ه}}{\text{جف ع}_\text{ر}}، \quad \frac{\text{فرع}_\text{ر}}{\text{فرت}} = -\frac{\text{جف ه}}{\text{جف لا}_\text{ر}}، \quad (\text{ر} = 1، 2، \ldots \text{ن})$$

حاصل ہوتی ہیں جو ایک حرکی نظام کی حرکت کی مساواتیں، ہیملٹن کی شکل میں، ہیں۔

[دیکھو وٹیکر کی کتاب (Analytical Dynamics) طبع دوم دفعہ ۱۴۲]

(۱۰۵) (آ) ثابت کرو کہ اگر تفرقی مساواتوں کے نظام

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{ع}(\text{لا}، \text{ما}، \text{ی})} = \frac{\text{فرما}}{\text{ق}(\text{لا}، \text{ما}، \text{ی})} = \frac{\text{فری}}{\text{ر}(\text{لا}، \text{ما}، \text{ی})}$$

کے کوئی دو تکملے

$$\text{ع}(\text{لا}، \text{ما}، \text{ی}) = \text{ا}$$
$$\text{و}(\text{لا}، \text{ما}، \text{ی}) = \text{ب}$$

ہوں تو

$$م(لا، ما، ی) = \frac{۱}{ع} \frac{جف(ع، و)}{جف(ما، ی)} = \frac{۱}{ق} \frac{جف(ع، و)}{جف(ی، لا)} = \frac{۱}{ر} \frac{جف(ع، و)}{جف(لا، ما)}$$

فرض کرو

[م کو نظام کا ضارب کہتے ہیں]

(۲) ثابت کرو کہ م، جزئی تفرقی مساوات (۲۴۹)

$$\frac{جف}{جف لا}(م ع) + \frac{جف}{جف ما}(م ق) + \frac{جف}{جف ی}(م ر) = ۰$$

کو پورا کرتا ہے۔

(۳) اگر نظام کا کوئی اور ضارب ن (لا، ما، ی) ہو تو ثابت کرو کہ

$$ع \frac{جف}{جف لا}\left(\frac{م}{ن}\right) + ق \frac{جف}{جف ما}\left(\frac{م}{ن}\right) + ر \frac{جف}{جف ی}\left(\frac{م}{ن}\right) = ۰$$

اور اس لیے یہ کہ

$$\frac{جف\left(\frac{م}{ن}، ع، و\right)}{جف(لا، ما، ی)} = ۰ \quad \text{متماثلاً}$$

اس طرح $\frac{م}{ن}$، ع اور و کا ایک تفاعل ہے اور $\frac{م}{ن} = ج$، تفرقی مساواتوں کے ابتدائی نظام کا ایک تکملہ ہے۔

(۴) اگر ع (لا، ما، ی) = ا کو ی کے لیے حل کیا جا سکے اور اس سے ی = ف (لا، ما، ا) حاصل ہو اور اگر ی کی اس قیمت کو و، ع، ق، ر، م میں درج کرنے سے لا، ما، ا کے جو تفاعل حاصل ہوں اُن کو بڑے حرفوں و، ع، ق، ر، م سے تعبیر کیا جائے تو ثابت کرو کہ $\frac{فرلا}{ع} = \frac{فرما}{ق}$ کا ایک تکملہ و (لا، ما، ا) = ب ہے۔

نیز ثابت کرو کہ

$$\text{۵}\quad -ع = \frac{جف\, و}{جف\, ما} \cdot \frac{جف\, ۶}{جف\, ی}$$

اور

$$مق = \frac{جف\, و}{جف\, لا} \cdot \frac{جف\, ۶}{جف\, ی}$$

(جہاں $\frac{جف\, ۶}{جف\, ی}$ کو لا، ما، ا کی رقوم میں بیان کیا گیا ہے)، اس لیے

$$فرو = م\,(ق\, فرلا - ع\, فرما) \div \frac{جف\, ۶}{جف\, ی}$$

[اس سے یہ واضح ہوتا ہے کہ اگر کوئی تکملہ ۶ = ا اور کوئی ضارب م معلوم ہوں تو م (ق فرلا - ع فرما) ÷ $\frac{جف\, ۶}{جف\, ی}$ ایک کامل تفرقہ ہوگا اور اس سے نظام کا ایک تکملہ حاصل ہوگا جبکہ ا کی بجائے ۶ (لا، ما، ی) کو مندرج کیا جائے۔

اس مسئلہ کے ثبوت کے لیے وہٹیکر کی "(Advanced Rigid Dynamics)" طبع دوم دفعہ ۱۱۹ دیکھو۔ اس سے زیادہ عام مسئلہ یہ ہے کہ اگر تفرقی مساواتوں کے ایک نظام

$$\frac{فرلا_۱}{ع_۱} = \frac{فرلا_۲}{ع_۲} = \ldots = \frac{فرلا_ن}{ع_ن} = \frac{فرلا}{ع}$$

کے (ن - ۱) تکملے معلوم ہوں اور کوئی ضارب بھی معلوم ہو تو دوسرا تکملہ متعین کیا جا سکتا ہے۔ اس کو بالعموم جیکوبی کے آخری ضارب کا مسئلہ کہتے ہیں۔ علم حرکت میں جہاں اس مسئلہ کی کچھ اہمیت ہے (دیکھو وہٹیکر، دسواں باب) آخری ضارب اکائی ہوتا ہے۔]

(۵) ثابت کرو کہ

$$\frac{فرلا}{لای - ۲ما} = \frac{فرما}{۲لا - مای} = \frac{فری}{ما^۲ - لا^۲}$$

کا ایک ضارب اکائی ہے اور ایک تکملہ لا$^2$ + ما$^2$ + ی$^2$ = ا ہے، فرض کرو ع (لا، ما، ی) = ا -

ثابت کرو کہ اِس صورت میں

$$\frac{\text{م}\left(\text{ق فرلا} - \text{ع فرما}\right)}{\frac{\text{فرع}}{\text{فری}}} = \text{فر}\left[-\tfrac{1}{2}\ \text{لاما} - \sqrt{\text{ا} - \text{لا}^2 - \text{ما}^2}\right]$$

اور اِس لیے دوسرا تکملہ لا ما + ۲ ی = ب حاصل کرو -

(۲۵۰) (۱۰۶) ثابت کرو کہ اگر ما = $\int_{\text{ا}}^{\text{ب}}$ و$^{\text{لات}}$ ف (ت) فرت جہاں ا اور ب مستقل ہیں تو

$$\text{لافہ}\left(\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\right)\text{ما} + \text{خہ}\left(\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\right)\text{ما} = \text{و}^{\text{ب لا}}\ \text{فہ}(\text{ب})\ \text{ف}(\text{ب}) - \text{و}^{\text{ا لا}}\ \text{فہ}(\text{ا})\ \text{ف}(\text{ا})$$

$$- \int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{و}^{\text{لات}} \left\{\text{فہ}(\text{ت})\ \text{فَ}(\text{ت}) + \text{فَہ}(\text{ت})\ \text{ف}(\text{ت}) - \text{خہ}(\text{ت})\ \text{ف}(\text{ت})\right\} \text{فرت}$$

اِس سے ثابت کرو کہ ما، تفرقی مساوات

$$\text{لافہ}\left(\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\right)\text{ما} + \text{خہ}\left(\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\right)\text{ما} = ٠$$

کو پورا کرے گا اگر فہ (ت) ف (ت) = و $\left\{\int \frac{\text{خہ}(\text{ت})}{\text{فہ}(\text{ت})}\ \text{فرت}\right\}$

اور و$^{\text{ب لا}}$ فہ (ب) ف (ب) = ٠ = و$^{\text{ا لا}}$ فہ (ا) ف (ا)

اِس طریقہ کو

$$\text{لا}\ \frac{\text{فر}^2\ \text{ما}}{\text{فرلا}^2} + \frac{\text{فرما}}{\text{فرما}} - \text{لاما} = ٠$$

کا حل

$$ا = (\dots) \frac{\text{فرت}}{\dots} + ب \dots \frac{\text{فرت}}{\dots}$$

معلوم کرنے میں جو لا > ۰ کے لیے درست ہے استعمال کرو۔
صورت لا < ۰ کے متناظر حل پہلے تکملے کے حدود کو - ص تا - ا کی بجائے ا تا ص لینے سے حاصل ہو جاتے ہیں۔

[۱۰۶ تا ۱۰۸ مثالوں میں تفرقی مساواتوں کے حلوں کو محدود تکملوں کی شکل میں حاصل کرنے کے لیے چند اہم ترین طریقے بیان ہوئے ہیں]

(۱۰۷) تصدیق کرو

$$\frac{\text{جف و}}{\text{جف ت}} = ک \frac{\text{جف}^2 \text{و}}{\text{جف لا}^2}$$

کا ایک حل

$$و = و_۱ + \frac{۲ \text{و}}{\sqrt{\pi}} \int^{\frac{لا}{۲\sqrt{ک ت}}} ه^{-ی^2} \text{فری}$$

ہے اگر وہ ت = ۰ پر لا کی تمام مثبت قیمتوں کے لیے و + و میں اور لا کی تمام منفی قیمتوں کے لیے و - و میں تحویل ہو۔

[و، وقت ت پر ایک ٹھوس جسم کے ایک نقطہ کی تپش ہے جہاں یہ نقطہ ایک خاص مستوی سے فاصلہ لا پر ہے اور جسم تمام سمتوں میں لا متناہی تک پھیلا ہوا ہے اور یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ ابتدا مستوی لا = ۰ کے دو جانبوں پر تپش کی دو مستقل قیمتیں و + و اور و - و تھیں]

کیلون نے و کے اس جملہ کو زمین کی عمر کا اندازہ لگانے میں استعمال کیا تھا (دیکھو تھامسن اور ٹیٹ کی نیچرل فلاسفی ضمیمہ D) اس مسئلہ میں ایک نئی پیچیدگی اس انکشاف سے پیدا ہو گئی ہے کہ چٹانوں کے تابکارانہ تکسر سے حرارت کی پیدائش مسلسل جاری ہے۔

(۱۰۸) (ا) ثابت کرو کہ مستقل سروں کی خطی جزئی تفرقی مساوات

فا(جف/جف لا ، جف/جف ما ، جف/جف ی) و = ۰

کا ایک حل

و = ∫∫ و^(ل لا + م ما + ن ی) ف (س ، ت) فرس فرت

ہے (حدود کوئی اختیاری مقداریں ہیں جو لا ، ما ، ی کے تابع نہیں ہیں)
(۲۵۴) اگر ل ، م ، ن کوئی مستقل ہوں یا س اور ت کے ایسے تفاعل ہوں کہ

فا (ل ، م ، ن) = ۰

اِس مسئلہ کی توسیع اُس صورت پر کرو جس میں ن متبوع متغیر
لا ، ما ، ی ، ...... اور (ن - ۱) مبدل ر ، ت ..... ہوں۔

و = ∫∫ و^(س(لا جم ت + ما جب ت + س ی)) ف (س ، ت) فرس فرت

کو

جف و/جف ی = جف² و/جف ما² + جف² و/جف لا²

کے حل کے طور پر حاصل کرو۔ (H. Todd)

(ب) اگر فا(جف/جف لا ، جف/جف ما ، جف/جف ی) و = مستقل سرونکی
ایک متجانس خطی جزئی تفرقی مساوات ہو تو ثابت کرو کہ اس کا ایک حل

و = ∫ ف (ل لا + م ما + ن ی ، ت) فرت

ہے جہاں حدود کوئی اختیاری مقداریں ہیں جو لا ، ما ، ی کے تابع نہیں
ہیں اور ل ، م ، ن کوئی مستقل ہیں یا ت کے ایسے تفاعل ہیں کہ

فا (ل ، م ، ن) = ۰

اس مسئلہ کی توسیع اُس صورت پر کرو جس میں ن متبوع متغیر
اور (ن - ۲) مبدل ہوں۔

[دیکھو ایچ۔ٹاڈ، میسنجر آف میتھیمیٹکس ۱۹۱۴ء]

و = ∫₀^{۲ط} ف (لا جم ت + ما جیب ت + خ ی، ت) فر ت

کو

جف² و / جف لا² + جف² و / جف ما² + جف² و / جف ی² = ۰

کے حل کے طور پر حاصل کرو۔ [لاپلاس کی مساوات کا وہیٹیکر کا حل]

(۱۰۹) تفرقی مساوات

فر ما / فر لا + ما = ۱ / لا

میں آزمائشی حل

ما = ل۰ + ل۱ / لا + ل۲ / لا² + ....

کو درج کرکے سلسلہ

ما = ل / لا + ۱! ل / لا² + ۲! ل / لا³ + ....

حاصل کرو۔

ثابت کرو کہ یہ سلسلہ لا کی تمام قیمتوں کے لیے متسع ہے۔

خاص تکملہ

ما = قو^{-لا} ∫_∞^{لا} (قو^{لا} / لا) فر لا

کو حاصل کرو اور تکمل بالحصص کی تکرار سے ثابت کرو کہ

قو^{-لا} ∫_∞^{لا} (قو^{لا} / لا) فر لا = ل / لا + ۱! ل / لا² + ۲! ل / لا³ + ... + ن! ل / لا^{ن+۱}

+ قو^{-لا} ∫_∞^{لا} ((ن+۱)! قو^{لا} / لا^{ن+۲}) فر لا

اس سے ثابت کرو کہ اگر لا منفی ہو تو خاص تکملہ کی بجائے سلسلہ کی ن+۱ رقموں کو لینے سے جو خطا واقع ہوتی ہے وہ (ن+۱) ویں رقم کی عددی قیمت سے کم ہے [ایسے سلسلہ کو متقاربی کہتے ہیں۔ دیکھو براموچ کی (Inf. Series) دفعات ۱۳۰ تا ۱۳۹ یا طبع دوم دفعات ۱۰۶ تا ۱۱۸]

(۲۵۲) (۱۱۰) اگر تفاعلوں فـن (لا) کے تواتر کی تعریف

ف. (لا) = ا + ب (لا - ج)، (جہاں ا، ب، ج مستقل ہیں)

اور فـن (لا) = $\int_{ج}^{لا}$ (ت - لا) فا (ت) فـن-۱ (ت) فرت

سے کیجائے تو ثابت کرو کہ

$$\frac{فر^2}{فر لا^2} فـن (لا) = - فا (لا) فـن-۱ (لا)$$

اس سے ثابت کرو کہ

$$\frac{فر^2 ما}{فر لا^2} + ما فا (لا) = ۰$$

کا ایک حل ما = $\sum^{\infty}$ فـن (لا)

ہے بشرطیکہ لا متناہی سلسلوں پر بعض اعمال جائز ہوں (جن کے ثبوت کے لیے وہیٹیکر اور واٹسن کی modern Analysis صفحہ ۱۸۹[1] دیکھو۔ وہ اس طریقہ سے دوسرے رتبہ کی خطی تفرقی مساوات کے لیے مسئلہ موجودگی کا ثبوت دیتے ہیں۔)

(۱۱۱) ثابت کرو کہ مستقل سروں کی دو خطی ہمزاد تفرقی مساواتوں

ف (عف) لا + فا (عف) ما = ۰،

فہ (عف) لا + خہ (عف) ما = ۰ (جہاں عف = $\frac{فر}{فرت}$)

[1] چوتھے اور تیسرے اڈیشنوں میں صفحہ ۱۹۵۔

کے حل[1] کو

لا = فا (عف) و،

ما = - ف (عف) و

لکھا جاسکتا ہے جہاں و،

{ف (عف) ضہ (عف) - فا (عف) فہ (عف)} و = ۰

کا کامل ابتدائی ہے۔

اس سے ثابت کرو کہ اگر ف، فا، فہ، ضہ کے درجے عف میں علی الترتیب ع، ق، ر، س ہوں تو حل میں وقوع پذیر ہونے والے اختیاری مستقلوں کی تعداد بالعموم عددوں (ع + س) اور (ق + ر) میں سے بڑے عدد کے مساوی ہوگی لیکن اگر ع + س = ق + ر تو اختیاری مستقلوں کی تعداد کمتر ہوسکتی ہے یا صفر بھی ہوسکتی ہے جیسا کہ حسب ذیل مساواتوں کی صورت میں:

(عف + ۱) لا + عف ما = ۰،

(عف + ۳) لا + (عف + ۲) ما = ۰

(۱۱۲) (ا) ثابت کرو کہ اگر پہلے رتبہ کی خطی تفرقی مساوات

ع (لا) ما۱ + ف (لا) ما = ۰

کے کوئی دو حل

ما = ۶ (لا)،

ما = و (لا)

ہوں تو

$$\frac{(\text{و ۶}_1 - \text{۶ و}_1)}{\text{۲۶}} = ۰$$

---

[1] ثابت کیا جاسکتا ہے کہ یہ عام ترین حل نہیں ہوسکتا اگر لا اور ما کے لیے باہم مختلف اختیاری مستقلوں کی تعداد اس تعداد سے کم ہو جو ۓ کے لیے حاصل ہوتی ہے جیسا اسوقت ہوگا جبکہ (ف (عف) اور فا (عف)) میں ایک مشترک جزو ضربی صرف ایک مستقل سے مختلف ہو۔

اور اس لیے　　و = ا ء جہاں ا ایک مستقل ہے۔

(ب) ثابت کرو کہ اگر دوسرے رتبہ کی خطی تفرقی مساوات

ع (لا) ما۲ + ق (لا) ما۱ + ر (لا) ما = ۰

کے کوئی تین حل

(۲۵۳)　　ما = ء (لا)، ما = و (لا)، ما = ط (لا)

ہوں تو

ع فر/فر لا (ط و۱ - و ط۱) + ق (ط و۱ - و ط۱) = ۰

اور　ع فر/فر لا (ء و۱ - و ء۱) + ق (ء و۱ - و ء۱) = ۰

اس سے ثابت کرو کہ

ط = ا ء + ب و

[اس طرح قدم بہ قدم آگے بڑھ کر ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ ن ویں رتبہ کی مشابہ تفرقی مساوات کے ن سے زیادہ خطی غیر تابع حل نہیں ہو سکتے]۔

(۱۱۳) فرض کرو کہ لا کے کوئی تین تفاعل ء، و، ط ہیں۔
ثابت کرو کہ اگر تین ایسے مستقل ا، ب، ج معلوم ہو سکیں کہ ما ≡ ا ء + ب و + ج ط متماثلاً معدوم ہو تو

$$\begin{vmatrix} ء & و & ط \\ ء_1 & و_1 & ط_1 \\ ء_2 & و_2 & ط_2 \end{vmatrix} = 0$$

اور اس کے بالعکس اگر یہ قطعہ جس کو "رانسکی" مقطعہ کہتے ہیں معدوم ہو تو تفاعل خطی طور پر غیر تابع نہیں ہوتے۔

ن تفاعلوں کی صورت میں ان نتیجوں کی توسیع کرو۔

[دوسرے رتبہ کی اُس تفرقی مساوات پر غور کرو جو مقطعہ میں ء، ء۱، ء۲ کی

بجائے علی الترتیب ما، ما۱، ما۲ رکھنے سے حاصل ہوتی ہے۔ ایسی کسی مساوات کے رو سے زیادہ خطی طور پر غیر تابع تکملے نہیں ہو سکتے۔

"رانسکی" منقطعہ رانسکی (Wronski) سے منسوب ہے جو مقطعات پر ابتدائی مقالہ نگاروں میں سے تھا۔

(۱۱۴) ثابت کرو کہ $ی = و^{\frac{1}{2}لا(ت - \frac{1}{ت})}$ سے جزئی تفرقی مساوات

$$ت \frac{جف}{جف\, ت}\left(ت \frac{جف\, ی}{جف\, ت}\right) = \frac{1}{4} لا^2 \left(ت + \frac{1}{ت}\right)^2 ی + \frac{1}{2} لا \left(ت - \frac{1}{ت}\right) ی$$

پوری ہوتی ہے۔

اس لیے اگر پھیلاؤ

$$و^{\frac{1}{2}لا(ت - \frac{1}{ت})} = \sum_{-\infty}^{+\infty} ت^ن \; جـ_ن (لا)$$

میں $ت^ن$ کے سر کو $جـ_ن (لا)$ سے تعبیر کیا جائے تو ثابت کرو کہ رتبہ ن کی بیسل کی مساوات

$$لا^2 \frac{فر^2 ما}{فر\, لا^2} + لا \frac{فر\, ما}{فر\, لا} + (لا^2 - ن^2) ما = ۰$$

$ما = جـ_ن (لا)$ سے پوری ہوتی ہے۔

[لا متناہی سلسلوں پر اعمال کا اطلاق کرنے میں بعض امور پر غور کرنا پڑتا ہے]

(۱۱۵) اگر $ع_{لا}$ سے لا کا ایک تفاعل تعبیر ہو اور عامل ع سے $ع_{لا}$، $ع_{لا+۱}$ میں تبدیل ہو تو حسب ذیل نتیجے ثابت کرو:

$$(\text{۱})\quad ع\, ا^{لا} = ا \times ا^{لا} \quad یعنے \quad (ع - ا)\, ا^{لا} = ۰$$

$$(\text{۲})\quad ع^2\, ا^{لا} = ا^2 \times ا^{لا}$$

(۳) ع (لا اَ^لا) = ا (لا اَ^لا) + ا × اَ^لا یعنے (ع - ا)(لا اَ^لا) = ا × اَ^لا

(۴) (ع - ا)^۲ (لا اَ^لا) = ۰

(۵) (ب. ع^۲ + ب۱ ع + ب۲) اَ^لا = (ب. اَ^۲ + ب۱ ا + ب۲) اَ^لا
اگر ب مستقل ہوں۔

(۶) **خطی تفرقی مساوات** (۲۵۴)

ب. یَ_{لا+۲} + ب۱ یَ_{لا+۱} + ب۲ یَ_لا = ۰

یعنے (ب. ع^۲ + ب۱ ع + ب۲) یَ_لا = ۰

کا ایک حل یَ_لا = ا اَ^لا + ب بَ^لا

ہے اگر ا اور ب اختیاری مستقل ہوں اور اَ اور بَ امدادی مساوات ب. م^۲ + ب۱ م + ب۲ = ۰ کی اصلیں ہوں۔ [دیکھو دفعہ ۲۵]

اِس طریقہ سے (۲ ع^۲ + ۵ ع + ۲) یَ_لا = ۰ کو حل کرو۔

(۷) (ع^۲ - ۲ا ع + اَ^۲) یَ_لا = ۰ کا ایک حل یَ_لا = (ا + ب لا) اَ^لا

ہے۔

یہاں امدادی مساوات م^۲ - ۲ ا م + اَ^۲ = ۰ کی اصلیں مساوی ہیں (دیکھو دفعہ ۳۴)۔

(۸) (ب. ع^۲ + ب۱ ع + ب۲) یَ_لا = ۰

کا ایک حل یَ_لا = رَ^لا (ف جم لا ط + ق جب لا ط)

ہے اگر ف اور ق اختیاری مستقل ہوں، امدادی مساوات

ب. م² + ب₁ م + ب₂ = ۰

کی اصلیں ف ± خ ق ہوں، اور
ف + خ ق = ر (جم ط + خ جیب ط) (دیکھو دفعہ ۲۶)

اِس طریقہ سے (ع² - ۲ ع + ۴) ع لا = ۰ کو حل کرو۔

(۹) مستقل سروں کی خطی تفرقی مساوات

فا (ع) ع لا ≡ (ب. عⁿ + ب₁ عⁿ⁻¹ + ... + بₙ₋₁ ع + بₙ) ع لا
= ت (لا)

کا عام حل ایک خاص تکملہ اور متمم تفاعل کا مجموعہ ہے جہاں متمم تفاعل اُس مساوات کا حل ہے جو بائیں جانب کے لا کے تفاعل کی بجائے صفر درج کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔ (دیکھو دفعہ ۲۹)

(۱۰)    فا (ع) ع لا = ا^لا

کا خاص تکملہ ا^لا / فا (ا) ہے بشرطیکہ فا (ا) ≠ ۰ (دیکھو دفعہ ۲۵)

اِس طریقہ سے (ع² + ۸ ع - ۹) ع لا = ۲^لا کو حل کرو۔

[مزید تمثیلوں کے لیے دیکھو بول کی کتاب (Finite Differences) گیارہواں باب]

(۱۱۶) لگرانج کی مساوات
ما = لا فا (ع) + ف (ع)
پر دفعہ ۵۳ کا طریقہ استعمال کرکے ثابت کرو کہ بالعموم کا حل ابتدائی

حسب ذیل مبدلی شکل

$$\text{لا} = \text{ج}\ \text{فہ}(\text{ع}) + \text{سا}(\text{ع})،$$

$$\text{ما} = \text{ج}\ \text{فا}(\text{ع})\ \text{فہ}(\text{ع}) + \text{فا}(\text{ع})\ \text{سا}(\text{ع}) + \text{ف}(\text{ع})$$

میں حاصل ہوتا ہے (لیکن یہ کلیرو کی شکل کے لیے درست نہیں ہے جس میں $\text{فا}(\text{ع}) = \text{ع}$)۔

اِس سے ثابت کرو کہ اگر $\text{ج}_1$، $\text{ج}_2$، $\text{ج}_3$ کوئی تین منحنی ہوں جو اِس ابتدائی میں شامل ہوں اور ع کی قیمتوں $\text{ج}_1$، $\text{ج}_2$، $\text{ج}_3$ کے متناظر ہوں اور اگر $\text{ج}_1$، $\text{ج}_2$، $\text{ج}_3$ پر علی الترتیب نقطے $\text{ف}_1(\text{لا}_1، \text{ما}_1)$، $\text{ف}_2(\text{لا}_2، \text{ما}_2)$، $\text{ف}_3(\text{لا}_3، \text{ما}_3)$ ایسے ہوں کہ اِن نقطوں پر کے مماس سب کے سب متوازی ہوں تو

$$\frac{(\text{لا}_3 - \text{لا}_1)}{\text{لا}_3 - \text{لا}_2} = \frac{\text{ج}_3 - \text{ج}_1}{\text{ج}_3 - \text{ج}_2} = \frac{\text{ما}_3 - \text{ما}_1}{\text{ما}_3 - \text{ما}_2}$$

(۲۵۵) یعنی $\text{ف}_1$، $\text{ف}_2$، $\text{ف}_3$ ہم خط ہیں اور نسبت $\text{ف}_1\text{ف}_3 : \text{ف}_2\text{ف}_3$ مستقل ہے کیونکہ نقطے اپنے اپنے منحنی پر اس طریقہ پر حرکت کرتے ہیں کہ متناظر مماس متوازی رہتے ہیں۔ [اس طرح اگر دو منحنی کامل ابتدائی میں شامل، دیے گئے ہوں تو ہم ہندسی طور پر دوسرے منحنیوں کی کوئی تعداد معلوم کر سکتے ہیں]

(۱۱۷) ثابت کرو کہ ایک ایسا مستوی منحنی کہ اس کے کسی نقطہ پر کے نصف قطر انحنا کا طول اُس عماد کے طول کا دُگنا ہو جو منحنی اور ایک ثابت خط مستقیم کے درمیان منقطع ہوتا ہے یا تو خط تدویر ہوگا جس کا قاعدہ ثابت خط مستقیم ہوگا یا قطع مکافی ہوگا جس کا مرتب

ثابت خط مستقیم ہوگا۔ [لندن]

(۱۱۸) ایک منحنی کی خاصیت یہ ہے کہ ع = ک مس سا جہاں ع نصف قطر انحنا، اور سا وہ زاویہ ہے جو مماس محور لا کے ساتھ بناتا ہے اور ک مثبت ہے۔ ثابت کرو کہ اس منحنی کی ایک شاخ مساواتوں

لا = ک (۱ - جم ط)، ما = ک { لوک (قط ط + مس ط) - جب ط }

سے حاصل ہوتی ہے جہاں $۰ \leqslant$ ط $<$ $\frac{۱}{۲}$ π اور مبدا کو نقطہ ط = ۰ پر لیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر س وہ قوس ہو جو اس شاخ پر نقطہ ط = ۰ سے ناپی گئی ہے تو

س = ک لوک $\frac{\text{ک}}{\text{ک - لا}}$ [لندن]

(۱۱۹) مساوات $\frac{\text{جف}^۲ \text{ع}}{\text{جف ت}^۲}$ = ج $\frac{\text{جف}^۲ \text{ع}}{\text{جف لا}^۲}$

کا ایک حل شکل     ف (لا) جب م ت

میں معلوم کرو جو ایسا ہو کہ

$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ت}}$ = ک، ایک مستقل، جبکہ لا = ۰ اور ت = ۰

$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}$ = ۰ جبکہ لا = ۰، ت کی تمام قیمتوں کے لیے [لندن]

(۱۲۰) مساوات $\frac{\text{جف}^۲ \text{ی}}{\text{جف لا}^۲}$ + $\frac{\text{جف}^۲ \text{ی}}{\text{جف ما}^۲}$ = ۰

کا ایک ایسا حل معلوم کرو جو حسب ذیل شرطوں کو پورا کرے:

(۱) ی = جب لا جبکہ ما = ۰

(۲) ی = ۰ جبکہ لا = ۰ یا π

(۳) متنوی لا، ا کے اس علاقہ میں جسمیں ا > ۰ اور π > لا > ۰

کسی جگہ بھی ی/لا متناہی نہ ہو جائے ۔ [لندن]

(۱۲۱) تکمل بالحصص کے دو عملوں سے ثابت کرو کہ اگر لا کے تفاعل ف، ق، ر ہوں اور لاحقوں سے لا کے لحاظ سے تفرقوں کو تعبیر کیا جائے تو

ʃ ی (ف ما۲ + ق ما۱ + ر ما) فرلا = ی (ف ما۱ + ق ما)

- ما (ف ی)۱ + ʃ ما {(ف ی)۲ - (ق ی)۱ + ر ی} فرلا

اس سے یہ اخذ کرو کہ دو مساواتیں

ف ما۲ + ق ما۱ + ر ما = ۰، (ف ی)۲ - (ق ی)۱ + ر ی = ۰

ایسی ہیں کہ ایک کا کوئی تکملہ دوسرے کا مکمل جزو ضربی ہے [ایسی مساواتوں کو ایک دوسرے کا معین (Adjoint) کہتے ہیں]

(۲۵۶) ثابت کرو کہ اگر عف سے عامل فر/فرلا تعبیر ہو تو مساوات

{عف + ع (لا)} {عف + ق (لا)} ما = ۰

کی معین مساوات

{عف - ق (لا)} {عف - ع (لا)} ی = ۰

ہے۔ مساوات ما۲ + (لا + لا^۲) ما۱ + (۲ لا + لا^۳) ما = ۰ کی صورت میں اسکی تصدیق کرو۔

[یہاں ع (لا) = لا، ق (لا) = لا^۲] ۔

جف^۲ ما / جف لا^۲ = ۱/لا^۲ · جف^۲ ما / جف ت^۲ کا عام حل

ما کو اجزائے ضربی میں تحلیل کرکے مساوات

$$\left\{\left(\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} - \frac{1}{\text{ا}}\,\frac{\text{جف}}{\text{جف ت}}\right)\left(\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} + \frac{1}{\text{ا}}\,\frac{\text{جف}}{\text{جف ت}}\right)\right\}\text{ ما} = ۰$$

$$= \left\{\left(\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} + \frac{1}{\text{ا}}\,\frac{\text{جف}}{\text{جف ت}}\right)\left(\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} - \frac{1}{\text{ا}}\,\frac{\text{جف}}{\text{جف ت}}\right)\right\}\text{ ما} = ۰$$

لکھی جا سکتی ہے -

پس (دیکھو صفحہ ۶۱ ) ابتدائی مساوات، لگرانج کی دو خطی مساواتوں

$$\frac{\text{جف ما}}{\text{جف لا}} + \frac{1}{\text{ا}}\,\frac{\text{جف ما}}{\text{جف ت}} = ۰ \quad \text{اور} \quad \frac{\text{جف ما}}{\text{جف لا}} - \frac{1}{\text{ا}}\,\frac{\text{جف ما}}{\text{جف ت}} = ۰$$

میں سے ایک کے کسی تکملہ سے پوری ہوتی ہے -

اِن میں سے پہلی کے لیے ذیلی مساواتیں (دفعہ ۱۲۳ سے)

$$\frac{\text{فر لا}}{1} = \frac{\text{فر ت}}{\frac{1}{\text{ا}}} = \frac{\text{فر ما}}{۰}$$

ہیں -

دو غیر تابع تکملے

$$\text{ما} = \text{ب}\ ،\ \text{لا} - \text{ا ت} = \text{ج}$$

ہیں -

عام تکملہ

$$\text{ما} = \text{ف}\,(\text{لا} - \text{ا ت})$$

ہے -

اِسی طرح لگرانج کی دوسری مساوات سے ما = فا (لا + ا ت) حاصل ہوتا ہے - یہ دونوں ابتدائی تفرقی مساوات کے تکملے ہیں - چونکہ وہ خطی ہے اِس لیے ایک تیسرا تکملہ

$$\text{ما} = \text{ف}\,(\text{لا} - \text{ا ت}) + \text{فا}\,(\text{لا} + \text{ا ت})$$

ہے جس میں دو اختیاری تفاعل ہیں اور دوسرے رتبہ کی ایک مساوات کے لیے

اِس سے زیادہ عام حل کی توقع نہیں کی جا سکتی۔ (دیکھو صفحات ۱۱۸ اور ۲۳۷)
دفعہ ۱۴۵ کی مساوات کے لیے اِس کے مشابہ طریقہ استعمال کیا جا سکتا ہے۔

## مبدلوں کا طریقہ — (سی - این - سرنوکس - بینگر)

اگر ایک جزئی تفرقی مساوات، ع = ف (لا، د) \ فہ (ی، د)، ق = فا (ما، د) \ فہ (ی، د) درج کرنے پر ایک متماثلہ ہو جائے تو ہم اِن مساواتوں اور فری = ع فرلا + ق فرما کو تختہ

$$\int$$ فہ (ی، د) فری = $\int$ ف (لا، د) فرلا + $\int$ فا (ما، د) فرما + ب

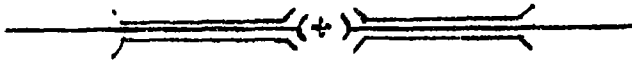
حاصل کرنے کے لیے استعمال کر سکتے ہیں۔

مثلاً مساوات ی$^2$ (ع + ق) = لا$^2$ + ما$^2$ ایک متماثلہ ہو جاتی ہے اگر

ع = (لا$^2$ + د) \ ی$^2$، ق = (ما$^2$ − د) \ ی$^2$،

اس سے ی$^3$ = لا$^3$ + ما$^3$ + ۳ د لا − ۳ د ما + ب

حاصل ہوتا ہے۔

یہ طریقہ معیاری شکلوں ۱ اور ۳ (دفعات ۱۲۹ اور ۱۳۱) کی تمام مساواتوں اور شکل (۲) (دفعہ ۱۳۰) کی بعض مساواتوں پر اطلاق پذیر ہوگا۔

# جوابات

## پہلا باب

### دفعہ ۵

(۱) $\frac{\text{فر}^{۲}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}^{۲}} = ۴\,\text{ما}$ (۲) $\frac{\text{فر}^{۲}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}^{۲}} = -۹\,\text{ما}$

(۳) $\text{ما}\,\frac{\text{فر}^{۲}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}^{۲}} = \left(\frac{\text{فر}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}}\right)^{۲}$ (۴) $\text{ما} = \text{لا}\,\frac{\text{فر}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}} + \left(\frac{\text{فر}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}}\right)^{۳}$

(۵) ایک دائرہ کا مماس اُس خط پر عمود ہوتا ہے جو نقطۂ تماس کو مرکز سے ملاتا ہے۔

(۶) کسی نقطہ پر کا مماس خود خطِ مستقیم ہے۔

(۷) انحناء صفر ہے۔

### دفعہ ۸

(۱) $\text{ما} = \text{ا} + \text{ا}\,\text{لا} + \text{ا}\,\frac{\text{لا}^{۲}}{\underline{|۲}} + \text{ا}\,\frac{\text{لا}^{۳}}{\underline{|۳}} + \text{ا}\,\frac{\text{لا}^{۴}}{\underline{|۴}} + \cdots = \text{ا}\,\text{و}^{\text{لا}}$

(۲) $\text{ما} = \text{ا} + \text{ب}\,\text{لا} - \text{ا}\,\frac{\text{لا}^{۲}}{\underline{|۲}} - \text{ب}\,\frac{\text{لا}^{۳}}{\underline{|۳}} + \text{ا}\,\frac{\text{لا}^{۴}}{\underline{|۴}} + \cdots = \text{ا}\,\text{جم}\,\text{لا}$

$+ \text{ب}\,\text{جب}\,\text{لا}$

# پہلے باب پر متفرق مثالیں

(۱) $\frac{\text{فر}^{۳}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{۳}} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ (۲) $\frac{\text{فر}^{۳}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{۳}} - ۶\,\frac{\text{فر}^{۲}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}} + ۱۱\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} - ۶\,\text{ما} = ۰$

(۳) $\frac{\text{فر}^{۲}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}} - ۲\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + ۲\,\text{ما} = ۰$

(۴) $\text{ما لوک}_{\text{و}}\left[\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \left\{۱ + \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^{۲}\right\}^{\frac{۱}{۲}}\right] = \text{لا}\left\{۱ + \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^{۲}\right\}^{\frac{۱}{۲}}$

(۵) $\frac{\text{فر}^{۳}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{۳}} = ۰$

(۶) $\left\{۱ + \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^{۲}\right\}^{۳} = \text{ا}^{۲}\left(\frac{\text{فر}^{۲}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}}\right)^{۲}$۔ یعنے $\text{غہ}^{۲} = \text{ا}^{۲}$

(۷) $(\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲})\,\frac{\text{فر}^{۲}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}} = ۲\left(\text{لا}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} - \text{ما}\right)\left\{۱ + \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^{۲}\right\}$

(۸) $\left\{۱ + \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^{۲}\right\}\frac{\text{فر}^{۳}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{۳}} = ۳\left(\frac{\text{فر}^{۲}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}}\right)^{۲}\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$

(۱۱) $\text{ما} = \text{ا لا} + \text{ب لا}^{۲}$

(۱۲) $\text{ما} = \text{ا قو}^{\text{لا}} + \text{ب قو}^{-\text{لا}}$

(۱۴) $۶۰^{\circ}$ اور $-۶۰^{\circ}$

(۱۵) تفرق کرو اور رکھو لا = ۱، ما = ۲ تو $\frac{\text{فر}^{۲}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}}$ اور اِس سے غہ حاصل ہوگا۔

(۱۷) (اَ) لا + ۱ = ۰ ، (۲َ) ما$^{۲}$ = لا$^{۲}$ + ۲ لا + ۱

---

# دوسرا باب

## دفعہ ۱۴

(۱) ٦ لا$^{۲}$ + ۵ لا ما + ما$^{۲}$ - ۹ لا - ۴ ما = ج

(۲) جب لا س ما + جب (لا + ما) = ج

(۳) قط لا س ما - و$^{لا}$ = ج

(۴) لا - ما + ج = لوک (لا + ما)

(۵) لا + ما و$^{لا^{۳}}$ = ج ما (٦) ما = ج لا

(۷) و$^{ما}$ (جب لا + جم لا) = ج (۸) لا$^{۴}$ ما + ۴ ج ما + ۴ = ۰

(۹) ما و$^{لا}$ = ج لا (۱۰) جب لا جم ما = ج

## دفعہ ۱۷

(۱) (لا + ما)$^{۳}$ = ج (لا - ما) (۲) لا$^{۲}$ + ۲ ما$^{۲}$ (ج + لوک ۱) = ۰

(۳) لا ما$^{۲}$ = ج (لا - ما)$^{۲}$ (۴) ج لا$^{۲}$ = ما + $\sqrt{لا^{۲} + ما^{۲}}$

(۵) (۲ لا - ۱)$^{۲}$ = ج (لا + ۲ ما - ۵)

(٦) (لا + ۵ ما - ۴)$^{۳}$ (۳ لا + ۲ ما + ۱) = ج

(۷) لا - ما + ج = لوک (۲ لا - ۴ ما + ۱)

(۸) ۳ لا - ۳ ما + ج = ۲ لوک (۳ لا + ٦ ما - ۱)

## دفعہ ۲۱

(۱) ۲ ما = (لا + ا)$^{۵}$ + ۲ ج (لا + ا)$^{۳}$
(۲) لا ما = جب لا + ج جم لا
(۳) ما لوک لا = (لوک لا)$^{۲}$ + ج
(۴) لا$^{۳}$ = ما$^{۳}$ (۳ جب لا + ج)
(۵) ما$^{۲}$ (لا + ج قو$^{لا}$) = ۱
(۶) لا = ما$^{۳}$ + ج ما (۷) لا = قو$^{ما}$ (ج + پس ما)

## دفعہ ۲۲

(۱) مکافی ما$^{۲}$ = ۴ ا لا + ج
(۲) قائم زائد لا ما = ج$^{۲}$
(۳) برنونی کا دوچشمی (منحنی) ر$^{۲}$ = ا$^{۲}$ جب ۲ طہ
(۴) زنجیرہ ما = ک جمز $\frac{لا - ج}{ک}$
(۵) لا ما = ج$^{۲}$
(۶) ما$^{\frac{۲}{۳}}$ = لا$^{\frac{۲}{۳}}$ + ج$^{\frac{۲}{۳}}$ (۷) ما$^{ف}$ = ج لا$^{ق}$
(۸) ر$^{۲}$ = ج قو$^{طہ^{۲}}$ (۹) لوک ر + $\frac{۱}{۲}$ طہ$^{۲}$ + $\frac{۱}{۳}$ طہ$^{۳}$ = ج
(۱۰) مساوی الزاویہ مرغولے ر = ج قو$^{± طہ مس عہ}$

# دوسرے باب پر متفرق مثالیں

(۱) لا ما = ما$^{۳}$ + ج (۲) ج لا$^{۳}$ = ما + $\sqrt{ما^{۲} - لا^{۲}}$

(۳) جب لا جب ما + قو$^{\text{جب لا}}$ = ج

(۴) ۲ لا$^{۲}$ − ۲ لا ما + ۳ ما + ۲ ج لا$^{۲}$ ما = ۰

(۵) ج لا ما = ما + $\sqrt{\text{ما}^{۲} - \text{لا}^{۲}}$

(۱۱) لا$^{۳}$ ما$^{-۲}$ + ۲ لا$^{۵}$ ما$^{-۳}$ = ج

(۱۲) مس$^{-۱}$ (لا ما) + لوک $\left(\frac{\text{لا}}{\text{ما}}\right)$ = ج

(۱۴) (لا$^{۲}$ − ۱ + ما$^{۲}$) قو$^{\text{لا}^{۲}}$ = ج

(۱۵) (۱) مکافی لولب ر (طہ − عہ) = ج

(۲) ارشمیدش کا لولب ر = ج (طہ − عہ)

(۱۶) مکافی ۳ک ما$^{۲}$ = ۲ لا      (۱۸) لا = ما (ج − ک لوک ما)

(۱۹) (۱) لا$^{۲}$ + (ما − ج)$^{۲}$ = ۱ + ج$^{۲}$، ہم محور دائروں کا ایک قبیل جو دئے ہوئے نظام کو ظلی القوائم قطع کرتا ہے۔

(۲) ر$^{۲}$ = ج قو$^{-\text{طہ}^{۲}}$

(۳) ن$^{۲}$ = ر{ج + لوک (قم ن طہ + مم ن طہ)}

(۲۰) $\left(\text{لا} + \text{ما} \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)\left(\text{لا} - \text{ما} \frac{\text{فر لا}}{\text{فر ما}}\right)$ = ا$^{۲}$ − ب$^{۲}$

(۲۱) لوک (۲ لا$^{۲}$ ± لا ما + ما$^{۲}$) + $\frac{۶}{\sqrt{۷}}$ مس$^{-۱}$ $\frac{\text{لا} \pm ۲\,\text{ما}}{\text{لا}\sqrt{۷}}$ = ج

# تیسرا باب

دفعہ ۲۸

(۱) $ما = ا و^{-لا} + ب و^{-۳لا}$ ۔۔۔ (۲) $ما = ا جم ۲لا + ب جب ۲لا$

(۳) $ما = ا و^{-۳لا} + ب و^{-۲لا}$ ۔۔۔ (۴) $ما = و^{۲لا}$ (ا جم [illegible]

(۵) $س = و^{-۲ت} (ا جم ۳ت + ب جب ۳ت)$

(۶) $س = ا + ب و^{-۴ت}$

(۷) $ما = ا و^{لا} + ب و^{-لا} + ج و^{-۲لا}$

(۸) $ما = ۲ و^{-لا} - و^{-۲لا}$

(۹) $ما = ا جم (۲لا - عہ) + ب جم (۳لا - بہ)$

(۱۰) $ما = ا جمز (۲لا - عہ) + ب جمز (۳لا - بہ)$ یا

$ما = ع و^{۲لا} + ف و^{-۲لا} + گ و^{۳لا} + ھ و^{-۳لا}$

(۱۱) $ما = ا و^{-۲لا} + ب و^{لا} جم (لا \sqrt{۳} - عہ)$

(۱۲) $ما = ا و^{۲لا} + ب و^{-۲لا} + ع و^{-لا} جم (لا \sqrt{۳} - عہ)$

$+ ف و^{لا} جم (لا \sqrt{۳} - بہ)$

(۱۳) $ط = عہ جم ت \sqrt{\frac{ج}{ل}}$ ۔۔۔ (۱۴) $ک^{۲} > ۴ م ج$

(۱۶) $ق = ق. و^{-\frac{م ت}{۲ل}} \left(جم ن ت + \frac{م}{۲ل ن} جب ن ت\right)$ جہاں

$ن = \sqrt{\left(\frac{۱}{ل ج} - \frac{م^{۲}}{۴ل^{۲}}\right)}$

## دفعہ ۲۹

(۱) ما = قو$^{لا}$ (۱ + ا جم لا + ب جب لا)

(۲) ما = ۳ + ا قو$^{لا}$ + ب قو$^{۱۲لا}$

(۳) ما = ۲ جب ۳ لا + ا جم ۲ لا + ب جب ۲ لا

(۴) ا = ۲، ب = ۱ (۵) ا = ۶، ب = -۱

(۶) ا = -۴، پ = ۲ (۷) ا = ۱، ب = ۲، پ = ۱

(۸) ا = ۲ (۹) ۴ قو$^{۳لا}$ (۱۰) ۳ قو$^{۲لا}$

(۱۱) -$\frac{۵}{۲}$ جب ۵ لا (۱۲) $\frac{۲۵}{۲۹}$ جم ۵ لا - $\frac{۱۰}{۲۹}$ جب ۵ لا

(۱۳) ۲

## دفعہ ۳۴

(۱) ما = ا + ب لا + (ع + ف لا) قو$^{-لا}$

(۲) ما = (ا + ب لا + ج لا$^۲$) جم لا + (ع + ف لا + گ لا$^۲$) جب لا

(۳) ما = (ا + ب لا) قو$^{لا}$ + ع جم لا + ف جب لا

(۴) ما = ا + ب لا + ج قو$^{لا}$ + (ع + ف لا) قو$^{-\frac{۱}{۲}لا}$

## دفعہ ۳۵

(۱) ما = ۲ قو$^{۳لا}$ + قو$^{-۳لا}$ ( ا جم ۴ لا + ب جب ۴ لا )

(۲) ما = قو$^{-ب لا}$ ( ا جم ق لا + ب جب ق لا ) + $\frac{\text{قو}^{ا لا}}{(ا+ب)^۲ + ق^۲}$

(۳) ما = (ا + ۹ لا) قو$^{۳لا}$ + ب قو$^{-۳لا}$

(۴) ما = ا + (ب + $\frac{۱}{۲}$ لا) قو$^{لا}$ + (ج + $\frac{۱}{۲}$ لا) قو$^{-لا}$

(۵) ما = (ا + $\frac{ا لا}{۲ب}$) جمزب لا + ب جبزب لا

(۶) ما = ا + (ب + ج لا - ۲ لا$^{۲}$) قو$^{-۲لا}$

## دفعہ ۳۶

(۱) ما = ۲ جب ۲ لا - ۴ جم ۲ لا + ا قو$^{-لا}$

(۲) ما = ۴ جم ۴ لا - ۲ جب ۴ لا + ا قو$^{۲لا}$ + ب قو$^{۳لا}$

(۳) ما = ۲ جم لا + قو$^{-۴لا}$ ( ا جم ۳ لا + ب جب ۳ لا )

(۴) ما = جب ۲۰ لا + قو$^{لا}$ ( ا جم ۲۰ لا + ب جب ۲۰ لا )

## دفعہ ۳۷

(۱) ما = لا$^{۳}$ - ۳ لا$^{۲}$ + ۶ لا - ۶ + ا قو$^{-لا}$

(۲) ما = ۶ لا$^{۲}$ - ۶ لا + ا + ب قو$^{-۲لا}$

(۳) ما = ۶ لا + ۶ + (ا + ب لا) قو^(۲لا)

(۴) ما = لا^۳ + ۳ لا^۲ + ع لا + ف + (ا + ب لا) قو^(۳لا)

(۵) ما = ۲۴ لا^۲ + ۱۴ لا − ۵ + ا قو^(−لا) + ب قو^(۲لا)

(۶) ما = ۸ لا^۳ + ۷ لا^۲ − ۵ لا + ا قو^(لا) + ب قو^(۲لا) + ج

## دفعہ ۳۸

(۱) ما = ا جم لا + (ب + ۲ لا) جب لا

(۲) ما = ا قو^(لا) + (لا + ۲) قو^(۲لا)

(۳) ما = ا قو^(۲لا) + (ب + ج لا − ۲۰ لا^۲ − ۲۰ لا^۳ − ۱۵ لا^۴ − ۹ لا^۵) قو^(لا)

(۴) ما = {ا جب لا + (ب − لا) جم لا} قو^(لا)

(۵) ما = (ا + ب لا − لا^۲) جم لا + (ع + ف لا + ۳ لا^۲) جب لا

(۶) ما = ا + (ب + ۳ لا) قو^(لا) + ج قو^(−لا) + لا^۲ + ع جم لا + (ف + ۲ لا) جب لا

(۷) ما = {ا جب ۴ لا + (ب − لا + لا^۲) جم ۴ لا} قو^(۳لا)

## دفعہ ۳۹

(۱) ما = ا لا + ب لا^۲ + ۲ لا^۳

(۲) ما = ۲ + ا لا^(−۴) جم (۳ لوک لا) + ب لا^(−۴) جب (۳ لوک لا)

(۳) ما = ہ جم (لوک لا) - جب (لوک لا) + ۱ لا$^{۲}$

+ ب لا جم (√۳ لوک لا - عہ)

(۴) ما = ہ + لوک لا + ۱ لا + ب لا لوک لا

+ ج لا (لوک لا)$^{۲}$ + د لا (لوک لا)$^{۳}$

(۵) ما = (۱+۲لا)$^{۲}$ [{لوک (۱+۲لا)}$^{۲}$ + ۱ لوک (۱+۲لا) + ب]

(۶) ما = ۱ جم {لوک (۱+لا) - عہ} + ۲ لوک (۱+لا) جب لوک (۱ + لا)

## دفعہ ۴

(۱) ما = ۱ جم (لا - عہ)، ی = - ۱ جب (لا - عہ)

(۲) ما = ۱ قو$^{۵لا}$ + ب قو$^{۳لا}$، ی = ۶ ۱ قو$^{لا}$ - ۷ ب قو$^{۴لا}$

(۳) ما = ۱ قو$^{لا}$ + ب جم (۲لا - عہ)، ی = ۲ ۱ قو$^{لا}$ - ب جم (۲لا - ل)

(۴) ما = قو$^{لا}$ + ۱ + ب قو$^{۲لا}$، ی = قو$^{لا}$ + ۱ - ب قو$^{۲لا}$

(۵) ما = ۱ جم (لا - عہ) + ۴ ب جم (۲لا - بہ) + جم ۷ لا،
ی = ۱ جم (لا - عہ) + ب جم (۲لا - بہ) - ۲ جم ۷ لا

(۶) ما = - ۵ ۱ قو$^{۳لا}$ - ۴ ب قو$^{۴لا}$ + ۲ قو$^{-لا}$ + جم ۲ لا - جب ۲ لا

ی = ۱ قو$^{۳لا}$ + ب قو$^{۴لا}$ + ۳ قو$^{-لا}$ + ۴ جم ۲ لا + ۵ جب ۲ لا

# تیسرے باب پر متفرق مثالیں

(۱) $ما = (ا + ب لا + ج لا^{۲}) قو^{لا} + ۲ قو^{۳لا}$

(۲) $ما = (ا + ب لا + ۶ لا^{۳}) قو^{-\frac{۳لا}{۲}}$

(۳) $ما = ا قو^{-۳لا} + ب قو^{-۲لا} + ج قو^{-لا} + ع + ۲ قو^{-۲لا} (جب لا - ۲ جم لا)$

(۴) $ما = ا قو^{لا} + ب جم (۲ لا - عہ) - ۲ قو^{لا} (۴ جب ۲ لا + جم ۲ لا)$

(۵) $ما = (ا + ب لا + ج لا^{۲}) قو^{-لا} + (ع + لا + ۲ لا^{۲}) قو^{۳لا}$

(۶) $ما = ا جب (لا - عہ) + ب جیز (۳ لا - بہ) - ۲ جیز ۲ لا$

(۷) $ما = (ا + ب لا + ۵ لا^{۲}) جمز لا + (ع + ف لا) جیز لا$

(۸) $ما = ۳ + ۴ لا + ۲ لا^{۲} + (ا + ب لا + ۴ لا^{۲}) قو^{۲لا} + جم ۲ لا$

(۹) $ما = (ا + ب لا + ۳ جب ۲ لا - ۴ لا جم ۲ لا - ۲ لا^{۲} جب ۲ لا) قو^{۲لا}$

(۱۰) $ما = ا جم (لا - عہ) + \frac{۳}{۲} - \frac{۱}{۲} جم ۲ لا - \frac{۳}{۴} لا جم لا$
$+ \frac{۱}{۱۶} جب ۳ لا$

(۱۱) $ما = ا جم (لا - عہ) + ب جم (۳ لا - بہ) - ۳ لا جم لا + لا جم ۳ لا$

(۱۲) $ما = (ا_{۰} + ا_{۱} لا + ا_{۲} لا^{۲} + .... + ا_{ر-۱} لا^{ر-۱}) قو^{لا} + ا^{لا} لا^{ر} / (لوک ا - ۱)^{ر}$

(۱۳) $ما = ا + ب لوک لا + ۲ (لوک لا)^{۳}$

(۱۴) ما = ا + ب لا$^{\text{-۱}}$ + $\frac{\text{۵}}{\text{۳}}$ لا$^{\text{۲}}$

(۱۵) ما = ا لا$^{\text{۳}}$ + ب جم ($\sqrt{\text{۲}}$ لوک لا - عہ)

(۱۶) ما = ا + ب لوک (لا + ۱) + {لوک (لا + ۱)}$^{\text{۲}}$ + لا$^{\text{۲}}$ + ۸ لا

(۱۷) لا = ا و$^{\text{۳ت}}$ + ب و$^{\text{-۳ت}}$ + ع جم ت + ف جب ت - و$^{\text{ت}}$ ،

ما = ا و$^{\text{۳ت}}$ + ۲۵ ب و$^{\text{-۳ت}}$ + (۳ ع - ۴ ف) جم ت
+ (۳ ف + ۴ ع) جب ت - و$^{\text{ت}}$

(۱۸) لا = ا و$^{\text{۲ت}}$ + ب و$^{\text{-ت}}$ جم ($\sqrt{\text{۳}}$ ت - عہ)

ما = ا و$^{\text{۲ت}}$ + ب و$^{\text{-ت}}$ جم ($\sqrt{\text{۳}}$ ت - عہ + $\frac{\text{۲}\pi}{\text{۳}}$)

ی = ا و$^{\text{۲ت}}$ + ب و$^{\text{-ت}}$ جم ($\sqrt{\text{۳}}$ ت - عہ + $\frac{\text{۴}\pi}{\text{۳}}$)

(۱۹) لا = ا ت + ب ت$^{\text{-۱}}$ ، ما = ب ت$^{\text{-۱}}$ - ا ت

(۲۰) لا = ا ت جم (لوک ت - عہ) + ب ت$^{\text{-۱}}$ جم (لوک ت - بہ) ،

ما = ا ت جب (لوک ت - عہ) + ب ت$^{\text{-۱}}$ جب (لوک ت - بہ)

(۲۷) (آ) (لا - ۱) و$^{\text{لا}^{\text{۲}}}$ (ب) $\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ (لا$^{\text{۲}}$ - ۲ لا + ۱) جب لا
+ $\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ (لا$^{\text{۲}}$ - ۱) جم لا

(۳۱) ما = و$^{\text{لا}^{\text{۲}}}$ + ا و$^{\text{لا}}$

(۳۲) ما = $\frac{\text{جب ا لا}}{\text{ب}^{\text{۲}} - \text{ا}^{\text{۲}}}$ + ا جم ب لا + ب جب ب لا

(۳۴) ما = ا و^(ا لا) + ب و^(ب لا) + و^(ب لا) ∫ لا و^((ا - ب) لا) (لوک لا - ۱) ف(لا)

(۳۵) (۳) ما = ا جم (لا - عہ) - لا جم لا + جب لا لوک جب لا

(۳۷) (آ) $\frac{\text{ک}}{\text{۲ ب ھ ع}}$  (۲) صفر

(۳۸) ما = ع جم ن لا + ف جب ن لا + گ جمز ن لا

+ ھ جبز ن لا

# چوتھا باب

## دفعہ ۴۲

(۱) $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}} = \text{ا} \frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}}$

(۲) $\frac{\text{جف}^2\text{ ی}}{\text{جف لا}^2} + \frac{\text{جف}^2\text{ ی}}{\text{جف ما}^2} = ۰$ (دو ابعاد میں لاپلاس کی مساوات)

(۳) $\frac{\text{جف}^2\text{ ی}}{\text{جف لا}^2} + \frac{\text{جف}^2\text{ ی}}{\text{جف ما}^2} = \frac{۱}{\text{ا}^2} \frac{\text{جف}^2\text{ ی}}{\text{جف ت}^2}$

(۴) ما $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}}$ + لا $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}} = ۰$

(۵) ب $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}}$ + ا $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}}$ = ۲ ا ب ی

(۶) لا $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}}$ + ما $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}}$ = ن ی (یولر کے مسئلہ متجانس تفاعلوں)

## دفعہ ۴۳

(۱) $\frac{جف^{۲} ی}{جف لا^{۲}} = \frac{جف ی}{جف ت}$ (۲) $\frac{جف^{۲} ی}{جف لا^{۲}} + \frac{جف^{۲} ی}{جف ما^{۲}} + \frac{جف^{۲} ی}{جف ت^{۲}} = ۰$

(۳) $\frac{جف ی}{جف لا} + \frac{جف ی}{جف ما} = ۱$

(۴) $ی = لا \frac{جف ی}{جف لا} + ما \frac{جف ی}{جف ما} + \left(\frac{جف ی}{جف لا}\right)^{۲} + \left(\frac{جف ی}{جف ما}\right)^{۲}$

(۵) $۴ ی = \left(\frac{جف ی}{جف لا}\right)^{۲} + \left(\frac{جف ی}{جف ما}\right)^{۲}$

(۶) $\frac{جف ی}{جف لا} \frac{جف ی}{جف ما} = ۱$

## دفعہ ۴۵

(۱) $ما = ا قو^{-پ^{۲}(لا+ت)}$ (۲) $ی = ا جب پ لا جب پ ا ما$

(۳) $ی = ا جم پ (ا لا - ما)$

(۴) $و = ا قو^{پ لا + ق ما} جب ی \sqrt{پ^{۲} + ق^{۲}}$ جہاں پ اور ق مثبت ہیں

(۵) $و = ج جم (پ ق لا + پ^{۲} ما + ق^{۲} ی)$

(۶) $و = ا قو^{-رت} جب \left(\frac{م \pi لا}{ل}\right) جب \left(\frac{ن \pi ما}{ل}\right)$ جہاں م اور ن کوئی صحیح عدد ہیں

اور $ر ل^{۲} = \pi^{۲}(م^{۲} + ن^{۲})$

## دفعہ ۴۸

(۱) $\frac{۴}{\pi}$ (جب لا + $\frac{۱}{۳}$ جب ۳ لا + $\frac{۱}{۵}$ جب ۵ لا + ....)

(۲) ۲ (جب لا − $\frac{۱}{۲}$ جب ۲ لا + $\frac{۱}{۳}$ جب ۳ لا − ....)

(۳) $\frac{۲}{\pi}$ [ ( $\frac{\pi^{۳}}{۱}$ − $\frac{\pi ۶}{۱^{۳}}$ ) جب لا − ( $\frac{\pi^{۳}}{۲}$ − $\frac{\pi ۶}{۲^{۳}}$ ) جب ۲ لا

+ ( $\frac{\pi^{۳}}{۳}$ − $\frac{\pi ۶}{۳^{۳}}$ ) جب ۳ لا ..... ]

(۴) $\frac{۴}{\pi}$ [ $\frac{۲}{۱-۲^{۲}}$ جب ۲ لا + $\frac{۴}{۱-۴^{۲}}$ جب ۴ لا + $\frac{۶}{۱-۶^{۲}}$ جب ۶ لا

+ .... ]

(۵) $\frac{۱}{\pi}$ [ $\frac{۱}{۲}$ (۱ + و$^{\pi}$) جب لا + $\frac{۲}{۵}$ (۱ − و$^{\pi}$) جب ۲ لا

+ $\frac{۳}{۱۰}$ (۱ + و$^{\pi}$) جب ۳ لا + $\frac{۴}{۱۷}$ (۱ − و$^{\pi}$) جب ۴ لا + ... ]

(۶) $\frac{۲}{\pi}$ $\sum_{۱}^{\infty}$ $\frac{۱}{ن^{۲}}$ ( ۲ جب $\frac{ن\pi}{۲}$ − ن $\pi$ جم $\frac{ن\pi}{۲}$ ) جب ن لا

(۷) (ا) (۲)، (۳) اور (۶) (ب) (۲)

## چوتھے باب پر متفرق مثالیں

(۲) $\frac{جف^{۲} و}{جف لا^{۲}}$ = $\frac{۱}{ک}$ $\frac{جف و}{جف ت}$

## دفعہ ۴۳

(۱) $\frac{\text{جف}^2 \text{ی}}{\text{جف لا}^2} = \frac{\text{جف ی}}{\text{جف ت}}$ (۲) $\frac{\text{جف}^2 \text{ی}}{\text{جف لا}^2} + \frac{\text{جف}^2 \text{ی}}{\text{جف ما}^2} + \frac{\text{جف}^2 \text{ی}}{\text{جف ت}^2} = ۰$

(۳) $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}} = ۱$

(۴) $\text{ی} = \text{لا} \frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} + \text{ما} \frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}} + \left(\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}}\right)^2 + \left(\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}}\right)^2$

(۵) $۴\,\text{ی} = \left(\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}}\right)^2 + \left(\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}}\right)^2$

(۶) $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} \, \frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}} = ۱$

## دفعہ ۴۵

(۱) $\text{ما} = \text{ا}\,\text{قو}^{-\text{پ}^2(\text{لا}+\text{ت})}$ (۲) $\text{ی} = \text{ا}\,\text{جب پ لا جب پ ا ما}$

(۳) $\text{ی} = \text{ا}\,\text{جم پ}(\text{ا لا} - \text{ما})$

(۴) $\text{و} = \text{ا}\,\text{قو}^{\text{پ لا}+\text{ق ما}}\,\text{جب ی}\sqrt{\text{پ}^2 + \text{ق}^2}$ جہاں پ اور ق مثبت ہیں

(۵) $\text{و} = \text{ج}\,\text{جم}(\text{پ ق لا} + \text{پ}^2\,\text{ما} + \text{ق}^2\,\text{ی})$

(۶) $\text{و} = \text{ا}\,\text{قو}^{-\text{رت}}\,\text{جب}\left(\frac{\text{م}\,\pi\,\text{لا}}{\text{ل}}\right)\text{جب}\left(\frac{\text{ن}\,\pi\,\text{ما}}{\text{ل}}\right)$ جہاں م اور ن کوئی صحیح عدد ہیں

اور $\text{ر}\,\text{ل}^2 = \pi^2(\text{م}^2 + \text{ن}^2)$

## دفعہ ۴۸

(۱) $\frac{4}{\pi}$ ( جب لا + $\frac{1}{3}$ جب ۳ لا + $\frac{1}{5}$ جب ۵ لا + .... )

(۲) ۲ ( جب لا − $\frac{1}{2}$ جب ۲ لا + $\frac{1}{3}$ جب ۳ لا − .... )

(۳) $\frac{2}{\pi}$ [ $\left(\frac{\pi^3}{1} - \frac{6\pi}{1^3}\right)$ جب لا − $\left(\frac{\pi^3}{2} - \frac{6\pi}{2^3}\right)$ جب ۲ لا
+ $\left(\frac{\pi^3}{3} - \frac{6\pi}{3^3}\right)$ جب ۳ لا .... ]

(۴) $\frac{4}{\pi}$ [ $\frac{2}{2^2-1}$ جب ۲ لا + $\frac{4}{4^2-1}$ جب ۴ لا + $\frac{6}{6^2-1}$ جب ۶ لا
+ .... ]

(۵) $\frac{1}{\pi}$ [ $\frac{1}{2}$ (۱ + ق$^{\pi}$) جب لا + $\frac{2}{5}$ (۱ − ق$^{\pi}$) جب ۲ لا
+ $\frac{3}{10}$ (۱ + ق$^{\pi}$) جب ۳ لا + $\frac{4}{17}$ (۱ − ق$^{\pi}$) جب ۴ لا + ... ]

(۶) $\frac{2}{\pi}$ $\sum_{ن=1}^{\infty}$ $\frac{1}{ن^2}$ ( ۲ جب $\frac{ن\pi}{2}$ − ن $\pi$ جم $\frac{ن\pi}{2}$ ) جب ن لا

(۷) (۱) (۲)، (۳) اور (۶) (ب) (۶)

## چوتھے باب پر متفرق مثالیں

(۲) $\frac{جف^2 و}{جف لا^2} = \frac{1}{ک} \frac{جف و}{جف ت}$

## دفعہ ۴۳

(۱) $\frac{\text{جف}^{2}\text{ی}}{\text{جف لا}^{2}} = \frac{\text{جف ی}}{\text{جف ت}}$ (۲) $\frac{\text{جف}^{2}\text{ی}}{\text{جف لا}^{2}} + \frac{\text{جف}^{2}\text{ی}}{\text{جف ما}^{2}} + \frac{\text{جف}^{2}\text{ی}}{\text{جف ت}^{2}} = ۰$

(۳) $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}} = ۱$

(۴) $\text{ی} = \text{لا}\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} + \text{ما}\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}} + \left(\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}}\right)^{2} + \left(\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}}\right)^{2}$

(۵) $۴\,\text{ی} = \left(\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}}\right)^{2} + \left(\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}}\right)^{2}$

(۶) $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}}\;\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}} = ۱$

## دفعہ ۴۵

(۱) $\text{ما} = \text{ا}\,\text{قو}^{-\text{پ}^{2}(\text{لا}+\text{ت})}$ (۲) $\text{ی} = \text{ا}\,\text{جب پ لا جب پ ا ما}$

(۳) $\text{ی} = \text{ا}\,\text{جم پ}(\text{ا لا} - \text{ما})$

(۴) $\text{و} = \text{ا}\,\text{قو}^{\text{پ لا}+\text{ق ما}}\,\text{جب ی}\sqrt{\text{پ}^{2}+\text{ق}^{2}}$ جہاں پ اور ق مثبت ہیں

(۵) $\text{و} = \text{ج}\,\text{جم}(\text{پ ق لا} + \text{پ}^{2}\text{ما} + \text{ق}^{2}\text{ی})$

(۶) $\text{و} = \text{ا}\,\text{قو}^{\text{رت}}\,\text{جب}\left(\frac{\text{م}\,\pi\,\text{لا}}{\text{ل}}\right)\text{جب}\left(\frac{\text{ن}\,\pi\,\text{ما}}{\text{ل}}\right)$ جہاں م اور ن کوئی صحیح عدد ہیں

اور $\text{ر}\,\text{ل}^{2} = \pi^{2}(\text{م}^{2} + \text{ن}^{2})$

## دفعہ ۸۴

(۱) ۴/π (جب لا + ۱/۳ جب ۳ لا + ۱/۵ جب ۵ لا + ....)

(۲) ۲ (جب لا − ۱/۲ جب ۲ لا + ۱/۳ جب ۳ لا − ....)

(۳) ۲/π [ (π³/۱ − π۶/۱³) جب لا − (π³/۲ − π۶/۲³) جب ۲ لا + (π³/۳ − π۶/۳³) جب ۳ لا .... ]

(۴) ۴/π [ ۲/(۲² − ۱) جب ۲ لا + ۴/(۴² − ۱) جب ۴ لا + ۶/(۶² − ۱) جب ۶ لا + .... ]

(۵) ۱/π [ ۱/۲ (۱ + و^π) جب لا + ۲/۵ (۱ − و^π) جب ۲ لا + ۳/۱۰ (۱ + و^π) جب ۳ لا + ۴/۱۷ (۱ − و^π) جب ۴ لا + .... ]

(۶) ۲/π² · Σ_{۱}^{∞} ۱/ن² جب ن π/۲ (۲ جب ن π/۴ − ن π جم ن π/۴) جب ن لا

(۷) (۱) (۲)، (۳) اور (۶) (ب) (۶)

## چوتھے باب پر متفرق مثالیں

(۲) جف² و / جف لا² = ۱/ک² · جف و / جف ت

(۵) $\frac{\text{جف}^2\,\text{و}}{\text{جف ت}^2} = \frac{\text{ا}^2}{\text{ر}^2}\,\frac{\text{جف}}{\text{جف ر}}\left(\text{ر}^2\,\frac{\text{جف و}}{\text{جف ر}}\right)$

(۷) $\text{و} = \text{و}_{\text{۰}}\,\text{قو}^{-\text{گ لا}}\,\text{جب}\,(\text{ن ت} - \text{گ لا})$ جہاں $\text{گ} = +\sqrt{\frac{\text{ن}}{\text{۲ک}}}$

(۱۲) $\text{و} = \frac{\text{۸}}{\pi}\left(\text{قو}^{-\text{ک ت}}\,\text{جب لا} + \frac{\text{۱}}{\text{۲۷}}\,\text{قو}^{-\text{۹ک ت}}\,\text{جب ۳ لا} + \frac{\text{۱}}{\text{۱۲۵}}\,\text{قو}^{-\text{۲۵ک ت}}\,\text{جب ۵ لا} + \cdots\right)$

(۱۳) لا کی بجائے $\frac{\pi\,\text{لا}}{\text{ل}}$، ت کی بجائے $\frac{\pi^2\,\text{ت}}{\text{ل}^2}$، اور جزو ضربی $\frac{\text{۸}}{\pi}$ کی بجائے $\frac{\text{۸ ل}^2}{\pi^3}$ رکھو۔

(۱۴) $\text{و} = \frac{\pi^2}{\text{۶}} - \left(\text{قو}^{-\text{۴ک ت}}\,\text{جم ۲ لا} + \frac{\text{۱}}{\text{۴}}\,\text{قو}^{-\text{۱۶ک ت}}\,\text{جم ۴ لا} + \frac{\text{۱}}{\text{۹}}\,\text{قو}^{-\text{۳۶ک ت}}\,\text{جم ۶ لا} + \cdots\right)$

(۱۵) $\text{و} = \frac{\text{۴۰۰}}{\pi}\left(\text{قو}^{-\text{ک ت}}\,\text{جب لا} + \frac{\text{۱}}{\text{۳}}\,\text{قو}^{-\text{۹ک ت}}\,\text{جب ۳ لا} + \frac{\text{۱}}{\text{۵}}\,\text{قو}^{-\text{۲۵ک ت}}\,\text{جب ۵ لا} + \cdots\right)$

[یہ مشاہدہ طلب ہے کہ اگرچہ صفر اور π کے درمیان لا کی تمام قیمتوں کے لیے و = ۱۰۰ لیکن لا = ۰ یا π کے لیے و = ۰ اور یہ عدم تسلسل ہے]

(۱۶) مثال (۱۵) کے حل میں و کی بجائے ۱۰۰ - و رکھو۔

(۱۸) و = $\frac{۴ و}{\pi}$ {$\frac{۱}{و}$ ک $\pi^۲$ ت \ ۴ ل$^۲$ جم ($\frac{\pi لا}{۲ ل}$)

$- \frac{۱}{۳} \frac{۱}{و}$ ک $\pi^۲$ ت \ ۴ ل$^۲$ جم ($\frac{۳ \pi لا}{۲ ل}$) + ۰۰۰۰ }

(۱۹) ا = $\frac{۴ م}{\pi}$ (جب لا جم و ت $- \frac{۱}{۹}$ جب ۳ لا جم ۳ و ت

$+ \frac{۱}{۲۵}$ جب ۵ لا جم ۵ و ت - ۰۰۰)

# پانچواں باب

## دفعہ ۵۲

(۱) (ا - ۲ لا - ج) (ا + ۳ لا - ج) = ۰

(۲) (۲ ا - لا$^۲$ - ج) (۲ ا + ۳ لا$^۲$ - ج) = ۰

(۳) ۹ ۴ (ا - ج)$^۲$ = ۴ لا$^۶$

(۴) (۲ ا - لا$^۲$ - ج) (۲ لا - ا$^۲$ - ج) = ۰

(۵) (۲ ا - لا$^۲$ - ج) (ا - ج قو$^{لا}$) (ا + لا - ۱ - ج قو$^{-لا}$) = ۰

(۶) (ا - قو$^{لا}$ - ج) (ا + قو$^{-لا}$ - ج) = ۰

## دفعہ ۵۴

(صرف کامل ابتدائی درج کئے گئے ہیں - آگے چل کر یہ

معلوم ہوگا کہ بعض صورتوں میں نادر حل موجود ہیں،

(۱) لا = ۴ع + ۴ع$^{۳}$ ، ما = ۲ع$^{۲}$ + ۳ع$^{۴}$ + ج

(۲) لا = $\frac{۱}{۲}$(ع + ع$^{-۱}$) ، ما = $\frac{۱}{۴}$ ع$^{۲}$ − $\frac{۱}{۲}$ لوک ع + ج

(۳) (ع − ۱)$^{۲}$ لا = ج − ع + لوک ع ، (ع − ۱)$^{۲}$ ما = ع$^{۲}$(ج − ۲ + لوک ع) + ج

(۴) لا = $\frac{۳}{۲}$ ع$^{۲}$ + ۳ع + ۳ لوک (ع − ۱) + ج ،
ما = ع$^{۳}$ + $\frac{۳}{۲}$ ع$^{۲}$ + ۳ع + ۳ لوک (ع − ۱) + ج

(۵) لا = ۲ مس$^{-۱}$ ع − ع$^{-۱}$ + ج ، ما = لوک (ع$^{۳}$ + ع)

(۶) لا = ع + ج قو$^{-ع}$ ، ما = $\frac{۱}{۲}$ ع$^{۲}$ + ج (ع + ۱) قو$^{-ع}$

(۷) لا = ۲ع + ج ع (ع$^{۲}$ − ۱)$^{-\frac{۱}{۲}}$ ، ما = ع$^{۲}$ − ۱ + ج (ع$^{۲}$ − ۱)$^{-\frac{۱}{۲}}$

(۸) لا = جب ع + ج ، ما = ع جب ع + جم ع

(۹) لا = مس ع + ج ، ما = ع مس ع + لوک جم ع

(۱۰) لا = لوک (ع + ۱) − لوک (ع − ۱) + لوک ع + ج ،
ما = ع − لوک (ع$^{۲}$ − ۱)

(۱۱) لا = $\frac{ع}{۱ + ع^{۲}}$ + مس$^{-۱}$ ع ، ما = ج − $\frac{۱}{۱ + ع^{۲}}$

(۱۲) ع = ۱

# چھٹا باب

## دفعہ ۵۸

(۱) ک - ۱: (= کامل ابتدائی)، (ما + ج)$^{2}$ = لا$^{3}$، لا = ۰ قرن طریق ہے

(۲) ک - ۱: (ما + ج)$^{2}$ = لا - ۲، ن - ح (= نادر حل) لا = ۲

(۳) ک - ۱: لا$^{2}$ + ج ما + ج$^{2}$ = ۰، ن - ح: ما$^{2}$ = ۴ لا$^{2}$

(۴) ک - ۱: ما = جیب (لا + ج)، ن - ح: ما$^{2}$ = ۱

(۵) ک - ۱: (۲ لا$^{3}$ + ۳ لا ما + ج)$^{2}$ - ۴ (لا$^{2}$ + ما)$^{3}$ = ۰، لا$^{2}$ + ما = ۰ قرن طریق ہے

(۶) ک - ۱: ج$^{2}$ - ۲اج لا ما + ۸ ج ما$^{3}$ - ۱۲ لا$^{2}$ ما$^{2}$ + ۱۶ لا$^{3}$ = ۰، ما$^{2}$ - لا = ۰ قرن طریق ہے

(۷) ک - ۱: ج$^{2}$ + ۶ ج لا ما - ۲ ج ما$^{3}$ - لا (۳ ما$^{2}$ - لا) = ۰، ما$^{2}$ + لا = ۰ قرن طریق ہے۔

## دفعہ ۶۵

(۱) ک - ۱: (ما + ج)$^{2}$ = لا (لا - ۱)(لا - ۲)، ن - ح: لا (لا - ۱)(لا - ۲) = ۰ (تماس طریق) لا = ۱ - $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ اور لا = ۱ + $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ خیالی نقاط تماس کا (تماس طریق) ہے۔

(۲) ک - ۱: (ما + ج)$^{2}$ = لا (لا - ۱)$^{2}$، ن - ح: لا = ۰، (تماس طریق لا = $\frac{۱}{۳}$، عقدہ طریق لا = ۱

(۳) ک - ا : ما$^2$ - ۲ ج لا + ج$^2$ = ۰، ن - ح: ما$^2$ = لا$^2$

(۴) ک - ا : لا$^2$ + ج (لا - ۳ ما) + ج$^2$ = ۰، ن - ح: (۳ ما + لا)(ما - لا) = ۰

(۵) ک - ا ما - ج لا$^2$ - ج$^2$ = ۰، ن - ح: لا$^4$ + ۴ ما = ۰، (تماس طریق) لا = ۰

(۶) ک - ۲: ما = ج (لا - ج)$^2$، ما = ۰ نادر حل اور خاص تکملہ بھی ہے، ۲۷ ما - ۴ لا$^3$ = ۰، ایک نادر حل ہے۔

(۷) تفرقی مساوات ع$^2$ ما$^2$ جم$^2$ عہ - ۲ ع لا ما جب$^2$ عہ + ما$^2$ - لا$^2$ جب$^2$ عہ = ۰، ن - ح: ما$^2$ جم$^2$ عہ = لا$^2$ جب$^2$ عہ، (تماس طریق) ما = ۰

(۸) تفرقی مساوات (لا$^2$ - ۱) ع$^2$ - ۲ لا ما ع - لا$^2$ = ۰، ن - ح: لا$^2$ + ما$^2$ = ۱، (تماس طریق) لا = ۰

(۹) تفرقی مساوات (۲ لا$^2$ + ۱) ع$^2$ + (لا$^2$ + ۲ لا ما + ما$^2$ + ۲) ع + ۲ ما$^2$ + ۱ = ۰، ن - ح: لا$^2$ + ۶ لا ما + ما$^2$ = ۴، لا = ما ایک (تماس طریق) ہے۔

(۱۰) تفرقی مساوات ع$^2$ (۱ - لا$^2$) - (۱ - ما$^2$) = ۰، ن - ح: لا = ± ۱ اور ما = ± ۱

## دفعہ ۶۷

(۱) ک - ا: ما = ج لا + ج$^2$، ن - ح: لا$^2$ + ۴ ما = ۰

(۲) ک - ا: ما = ج لا + ج$^3$، ن - ح: ۲۷ ما$^2$ + ۴ لا$^3$ = ۰

(۳) ک - ا: ما = ج لا + جم ع، ن - ح: (ما - لا جب$^{-1}$ لا)$^2$ = ۱ - لا$^2$

(۴) ک-۱: ما=ج لا + $\sqrt{\text{لا}^2 \text{ج}^2 + \text{ب}^2}$، ن-ح: $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$

(۵) ک-۱: ما=ج لا - ج^۲، ن-ح: ما = لا (لوگ لا-۱)

(۶) ک-۱: ما=ج لا-جب^{-۱} ج، ن-ح: ما = ± $\left\{\sqrt{\text{لا}^2 - 1} - \text{جب}^{-1}\sqrt{1 - \frac{1}{\text{لا}^2}}\right\}$

(۷) $\frac{1}{2}$(ما-ع لا)^۲ = -ع ک^۲، ۲ لا ما = ک^۲، ایک قائم زائد جس کے متقارب محور ہیں۔

(۸) (لا-ما)^۲ - ۲ ک (لا+ما) + ک^۲ = ۰، ایک مکافی جو محوروں کو مس کرتا ہے۔

(۹) چار قرنی بر تدویر $\text{لا}^{\frac{2}{3}} + \text{ما}^{\frac{2}{3}} = \text{ک}^{\frac{2}{3}}$

# چھٹے باب پر متفرق مثالیں

(۱) کوئی نادر حل نہیں، لا=۰ ایک (تماس طریق) ہے۔

(۲) ما = ع لا - $\frac{\text{ع}}{\text{ع}-1}$

(۵) ۲ ما = ± ۳ لا لفافوں کو تعبیر کرتا ہے، ما=۰ لفاف اور قرن طریق دونوں ہے۔

(۶) ک-۱: لا ما = ما ج + ج^۲

(۷) ک-۱: لا = ما ج + لا ما ج^۲، ن-ح: ما + ۴ لا^۲ = ۰

(رکھو ما = $\frac{۱}{ما}$، لا = $\frac{۱}{۷}$)

(۸) (اَ) ع + لا = ۳ ت^۳ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے
۲ لا = ۳ (ت^۳ - ت^۲)، ۴۰ ما = ۹ (۵ ت^۶ + ۲ ت^۵ - ۵ ت^۴) + ج

(۲) ک - ا: ما^۲ + ۲ ج^۲ = ۱ + ۲ ج لا ن - ج: لا^۲ - ۴ ما^۲ + ۴ = (تماسس طریق) ما =

(۱۱) ک - ا: ا = ا {ا + جم (ط - ع)} مساوی خط صنوبری کا ایک قبیل جو دائرہ ر = ۲ ا میں کھینچا گیا ہو جہاں ر = ۲ ا ایک نادر حل ہے ۔ نقطہ ر = ۰ قرن طریق اور نادر حل دونوں ہے۔

# ساتواں باب

## دفعہ

(۱) ما = لوک قط لا + ا لا + ب،

(۲) لا = ا + ما + ب لوک (ما - ب)

(۳) ا ما = جم (ا لا + ب)

(۴) لا = لوک {قط (ا ما + ب) + مس (ا ما + ب)} + ج

(۵) ما = لا^۳ + ا لا لوک لا + ب لا + ج

(۶) ما = - ق^لا + ا ق^لا + ب لا^ن-۲ + ج لا^ن-۳ + ..... + ص لا + ک

(۷) دائرہ (لا - ا)^۲ + (ما - ب)^۲ = ک^۲ ۔ تفرقی مساوات سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ نصف قطر انحنا ہمیشہ ک کے مساوی ہے۔

(۹) $(۱ + ما^۲)^{\frac{۱}{۲}} = ک ما_۲$ ، زنجیرہ ما ـ ب = ک جمز $\left\{\frac{لا - ا}{ک}\right\}$

## دفعہ ۳ے

(۱) ما = لا (ا لوک لا + ب)

(۲) ما = ا لا جم (۲ لوک لا) + ب لا جب (۲ لوک لا)

(۳) ما = لا (ا لوک لا + ب)$^۲$

(۴) ما = لا$^۲$ (ا لوک لا + ب)$^۲$

## دفعہ ۴ے

(۱) ما = ± ممز $\frac{لا - ج}{\sqrt{۲}}$ (۲) ما = ـ لوک (۱ ـ لا)

(۳) ما = جب$^{-۱}$ لا (۴) ت = $\frac{۱}{ا}\sqrt{\frac{ھ}{۲ گ}}\left\{ ھ جم^{-۱}\sqrt{\frac{لا}{ھ}}\right.$

$\left. + \sqrt{لا ھ - لا^۲}\right\}$

(۵) (اَ) مخروطی ع = $\frac{مہ}{۲ ھ} + \left(\frac{۱}{ج} - \frac{مہ}{۲ ھ}\right)$ جم طہ

(۲َ) ج ع = جم طہ $\sqrt{۱ - \frac{مہ}{۲ ھ}}$ یا جمز طہ $\sqrt{\frac{مہ}{۲ ھ} - ۱}$

بموجب اس کے کہ مہ $\gtrless$ ۲ ھ

## دفعہ ۷۵

(۱) ما = ا(لا$^{۲}$ + ۱) + ب و$^{-لا}$ (۲) ما = ا(لا − ۱) + ب و$^{-لا}$

(۳) ما = ا(لا − ۱) + ب و$^{-لا}$ + لا$^{۲}$ (۴) ما = ۱ + و$^{-لا^{۲}/۲}$

(۵) ما = و$^{۲لا}$

## دفعہ ۷۷

(۲) ما = لا$^{۳}$ + ا لا − ب/لا (۳) ما = (لا$^{۲}$ + ا لا) و$^{لا}$ + ب لا

(۴) ما = و$^{۲لا}$ + (ا لا$^{۳}$ + ب) و$^{لا}$

(۵) ما = ا لا$^{۳}$ + ب لا$^{-۳}$ (۶) ما = ا لا$^{۲}$ + ب جب لا

## دفعہ ۸۰

(۱) ما = (ا − لا) جم لا + (ب + لوک جب لا) جب لا

(۲) ما = {ا − لوک مس(π/۴ + لا)} جم ۲ لا + ب جب ۲ لا

(۳) ما = {ا − و$^{-لا}$ + لوک(۱ + و$^{-لا}$)} و$^{لا}$ + {ب − لوک(۱ + و$^{لا}$)} و$^{-لا}$

(۴) ما = ا لا + ب لا$^{-۱}$ + (۱ − لا$^{-۱}$) و$^{لا}$

(۵) ما = ا قو^لا + (ب - لا) قو^۲لا + ج قو^۳لا

# ساتویں باب پر متفرق مثالیں

(۱) ما = ا قو^(لا/ب) - ب (۲) ما = ا + لوک (لا^۲ + ب)

(۳) ما = ۲ لا^(ن+۱)/|ن+۱ + ۲ ا لا^ن/|ن + ا^۲ لا^(ن-۱)/|ن-۱ + ب لا^(ن-۲)

+ ج لا^(ن-۳) + ... + ھ لا + ک

(۴) ما = -۳^(-ن) جم {۳ لا - ۱/۲ π (ن - ۲)} + ا جم لا

+ ب جب لا + ج لا^(ن-۳) + ... + ھ لا + ک

(۵) ما = ا لا + ب لوک لا (۶) ما = ا قو^لا + ب (لا^۲ - ۱) قو^۲لا

(۷) ما = ا جم ن لا + ب جب ن لا + لا/ن جب ن لا

- ۱/ن^۲ جم ن لا لوک قطن لا

(۸) ما (۲ لا + ۳) = ا لوک لا + ب + قو^لا

(۹) (اَ) ما = √(ا لا + ب)

(۲َ) ما = √(ا لوک لا + ب)

(۱۰) ما = (ا جم لا + ب جب لا + جب ۲ لا) قو$^{لا^{۲}}$

(۱۲) ما = لا$^{۲}$ ی (۱۴) ع = $-\frac{۱}{۴}$

(۱۷) (آ) ما = ا قو$^{لا^{۲}}$ + ب قو$^{-لا^{۲}}$ - جب لا$^{۲}$ (رکھو ی = لا$^{۲}$)

(۲) ما(۱+لا$^{۲}$) = ا(۱-لا$^{۲}$) + ب لا (رکھو لا = یس ی)

(۱۸) $\frac{فر^{۲} ما}{فری^{۲}}$ - ۲ ما = ۲ (۱-ی$^{۲}$)، ما = جب$^{۲}$ لا + ا جمز($\sqrt{۲}$ جب لا + ع)

(۱۹) ما = ا جم{۲(۱+لا) قو$^{لا}$} + ب جب{۲(۱+لا) قو$^{لا}$} + (۱+لا) قو$^{لا}$

# آٹھواں باب

## دفعہ ۸۳

(۱) ما = ۲ + لا + لا$^{۲}$ - $\frac{۱}{۳}$ لا$^{۴}$ - $\frac{۲}{۱۵}$ لا$^{۵}$، ٹھیک حل

ما = ۲ + لا + لا$^{۲}$

(۲) ما = ۲ لا - ۲ لوک لا - $\frac{۱}{۳}$ (لوک لا)$^{۳}$، ٹھیک قیمت

ما = لا + $\frac{۱}{لا}$

(۳) $\text{ما} = 2 + \text{لا}^{2} + \text{لا}^{3} + \frac{3}{20}\text{لا}^{5} + \frac{1}{10}\text{لا}^{6}$

$\text{ی} = 3\text{لا}^{2} + \frac{3}{4}\text{لا}^{4} + \frac{6}{5}\text{لا}^{5} + \frac{3}{28}\text{لا}^{7} + \frac{3}{40}\text{لا}^{8}$

(۴) $\text{ما} = 5 + \text{لا} + \frac{1}{12}\text{لا}^{4} + \frac{1}{6}\text{لا}^{6} + \frac{2}{63}\text{لا}^{7} + \frac{1}{72}\text{لا}^{9}$

$\text{ی} = 1 + \frac{1}{3}\text{لا}^{3} + \text{لا}^{5} + \frac{2}{9}\text{لا}^{6} + \frac{1}{8}\text{لا}^{8} + \frac{11}{324}\text{لا}^{9} + \frac{7}{264}\text{لا}^{11}$

(۵) ما کی وہی قیمت ہے جو مثال ۴ میں ہے۔

## دفعہ ۸۷

(۱) ۲٫۱۹　　(۲) ۲٫۱۹۲

(۳) (ا) ۴٫۱۲ ، (ب) ۴٫۱۱۸

(۴) خطائیں ۰٫۰۰۱۸ ، ۰٫۰۰۰۱۷ ، ۰٫۰۰۰۰۱۳

بالائی حدود ۰٫۰۱۷۲ ، ۰٫۰۰۲۸۶ ، ۰٫۰۰۰۳۲۰

## دفعہ ۸۹

۱٫۱۱۶۷۸۴۸۷ ، ۱٫۱۱۶۷۸۰۲۵۰ ، ۱٫۱۱۶۷۸۴۴۹

# نواں باب

## دفعہ ۹۵

(۱) $\text{ی} = \left\{1 - \frac{\text{لا}}{2!} + \frac{\text{لا}^{2}}{4!} - \cdots\right\} = \text{جم}\sqrt{\text{لا}}$

$\text{و} = \text{لا}^{\frac{1}{2}}\left\{1 - \frac{\text{لا}}{3!} + \frac{\text{لا}^{2}}{5!} - \cdots\right\} = \text{جب}\sqrt{\text{لا}}$

(۲) $ع = \left\{ ۱ - ۳\text{لا} + \frac{۳\,\text{لا}^{۲}}{۱ \times ۳} + \frac{۳\,\text{لا}^{۳}}{۳ \times ۵} + \frac{۳\,\text{لا}^{۴}}{۵ \times ۷} + \frac{۳\,\text{لا}^{۵}}{۷ \times ۹} + \cdots \right\}$

$و = \text{لا}^{\frac{۱}{۲}} (۱ - \text{لا})$

(۳) $ع = \left\{ ۱ + \frac{۱}{۳}\text{لا} + \frac{۱ \times ۴}{۳ \times ۹}\text{لا}^{۲} + \frac{۱ \times ۴ \times ۷}{۳ \times ۶ \times ۹}\text{لا}^{۳} + \cdots \right\} = (۱ - \text{لا})^{-\frac{۱}{۳}}$

$و = \text{لا}^{\frac{۷}{۳}} \left\{ ۱ + \frac{۸}{۱۰}\text{لا} + \frac{۸ \times ۱۱}{۱۰ \times ۱۳}\text{لا}^{۲} + \frac{۸ \times ۱۱ \times ۱۴}{۱۰ \times ۱۳ \times ۱۶}\text{لا}^{۳} + \cdots \right\}$

(۴) $ع = \text{لا}^{ن} \left\{ ۱ - \frac{۱}{۴(ن+۱)}\text{لا}^{۲} + \frac{۱}{۴ \times ۸ (ن+۱)(ن+۲)}\text{لا}^{۴} - \frac{۱}{۴ \times ۸ \times ۱۲ (ن+۱)(ن+۲)(ن+۳)}\text{لا}^{۶} + \cdots \right\}$

و کو ع سے حاصل کرنے کے لئے ن کو ـ ن میں تبدیل کرو۔ اگر ع کو مستقل $\frac{۱}{۲^{ن}\, \text{جا}(ن+۱)}$ سے ضرب دیا جائے تو حاصل ضرب کو رتبہ ن کا بیسل کا تفاعل کہتے ہیں اور اس کو $\text{ج}_{ن}$ (لا) سے تعبیر کرتے ہیں۔

## دفعہ ۹۶

(۱) اور (۴)، لا کی تمام قیمتیں (۲) اور (۳)، $|\text{لا}| < ۱$

## دفعہ ۹۷

(۱) $ع = \left\{ ۱ + \text{لا} + \frac{۲}{۴}\text{لا}^{۲} + \frac{۲ \times ۵}{۴ \times ۹}\text{لا}^{۳} + \frac{۲ \times ۵ \times ۱۰}{۴ \times ۹ \times ۱۶}\text{لا}^{۴} + \cdots \right\}$

$$و = ی\,\text{لوک}\,لا + \left\{-۲لا - لا^{۲} - \frac{۱۴}{۲۷}لا^{۳} - \cdots\right\}$$

$$(۲)\quad ی = \left\{۱ - \frac{۱}{۲^{۲}}لا^{۲} + \frac{۱}{۲^{۲}\times۴^{۲}}لا^{۴} - \frac{۱}{۲^{۲}\times۴^{۲}\times۶^{۲}}لا^{۶} + \cdots\right\}$$

$$و = ی\,\text{لوک}\,لا + \left\{\frac{۱}{۲^{۲}}لا^{۲} - \frac{۱}{۲^{۲}\times۴^{۲}}\left(۱+\frac{۱}{۲}\right)لا^{۴} + \frac{۱}{۲^{۲}\times۴^{۲}\times۶^{۲}}\left(۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}\right)لا^{۶} - \cdots\right\}$$

ی کو رتبہ صفر کا بیسل کا تفاعل کہتے ہیں اور اس کو جے (لا) سے تعبیر کرتے ہیں ۔

$$(۳)\quad ی = \left\{۱ - ۲لا + \frac{۳}{۲!}لا^{۲} - \frac{۴}{۳!}لا^{۳} + \cdots\right\}$$

$$و = ی\,\text{لوک}\,لا + \left\{۲\left(۲-\frac{۱}{۲}\right)لا - \frac{۳}{۲!}\left(۲+\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}\right)لا^{۲} + \frac{۴}{۳!}\left(۲+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}\right)لا^{۳} - \cdots\right\}$$

$$(۴)\quad ی = لا^{\frac{۱}{۲}}\left\{۱ + \frac{۱\times۳}{۴^{۲}}لا^{۲} + \frac{۱\times۳\times۵\times۷}{۴^{۲}\times۸^{۲}}لا^{۴} + \frac{۱\times۳\times۵\times۷\times۹\times۱۱}{۴^{۲}\times۸^{۲}\times۱۲^{۲}}لا^{۶} + \cdots\right\}$$

$$و = ی\,\text{لوک}\,لا + ۲لا^{\frac{۱}{۲}}\left\{\frac{۱\times۳}{۴^{۲}}\left(۱+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۲}\right)لا^{۲} + \frac{۱\times۳\times۵\times۷}{۴^{۲}\times۸^{۲}}\left(۱+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۷}-\frac{۱}{۴}\right)لا^{۴} + \cdots\cdots\right\}$$

XII

## دفعہ ۹۸

(۱) $\text{ع} = \text{لا}^{-۲}\Big\{ -\frac{۱}{۲^۲ \times ۴}\,\text{لا}^۴ + \frac{۱}{۲^۲ \times ۴^۲ \times ۶}\,\text{لا}^۶ - \frac{۱}{۲^۲ \times ۴^۲ \times ۶^۲ \times ۸}\,\text{لا}^۸ + \frac{۱}{۲^۲ \times ۴^۲ \times ۶^۲ \times ۸^۲ \times ۱۰}\,\text{لا}^{۱۰} - \ldots\ldots \Big\}$

$\text{و} = \text{ع لوک لا} + \text{لا}^{-۲}\Big\{ ۱ + \frac{۱}{۲^۲}\,\text{لا}^۲ + \frac{۱}{۲^۲ \times ۴^۲}\,\text{لا}^۴ - \frac{۱۱}{۲^۲ \times ۴^۲ \times ۶^۲}\,\text{لا}^۶ + \frac{۳۱}{۲^۲ \times ۴^۲ \times ۶^۲ \times ۸^۲}\,\text{لا}^۸ \ldots\ldots \Big\}$

(۲) $\text{ع} = \text{لا} + ۲\,\text{لا}^۲ + ۳\,\text{لا}^۳ + \ldots = \text{لا}\,(۱ - \text{لا})^{-۲}$

$\text{و} = \text{ع لوک لا} + ۱ + \text{لا} + \text{لا}^۲ + \ldots\ldots = \text{ع لوک لا} + (۱ - \text{لا})^{-۱}$

(۳) $\text{ع} = \Big\{ ۱ \times ۲\,\text{لا}^۲ + ۲ \times ۳\,\text{لا}^۳ + ۳ \times ۴\,\text{لا}^۴ + \ldots\ldots \Big\}$

$\text{و} = \text{ع} + \text{ع لوک لا} + \Big\{ -۱ + \text{لا} + ۳\,\text{لا}^۲ + ۵\,\text{لا}^۳ + ۷\,\text{لا}^۴ + \ldots\ldots\ldots \Big\}$

(۴) $\text{ع} = \Big\{ ۲\,\text{لا} + ۲\,\text{لا}^۲ - \text{لا}^۳ + \text{لا}^۴ + \frac{۵}{۴}\,\text{لا}^۵ \ldots\ldots \Big\}$

$\text{و} = \text{ع لوک لا} + \Big\{ ۱ - \text{لا} - ۵\,\text{لا}^۲ - \text{لا}^۳ + \frac{۱۱}{۳}\,\text{لا}^۴ \ldots\ldots \Big\}$

## دفعہ ۹۹

(۱) $\text{ما} = \text{ب}\Big\{ ۱ - \text{لا}^۲ - \frac{۱}{۳}\,\text{لا}^۴ - \frac{۱}{۵}\,\text{لا}^۶ \ldots\ldots \Big\} + \text{ب}_۱\,\text{لا}$

$$= \text{ب}\left\{ ۱ - \frac{۱}{۲}\,\text{لا لوک}\,\frac{۱+\text{لا}}{۱-\text{لا}} \right\} + \text{ا}_{۱}\,\text{لا}$$

$$(۲)\quad \text{ما} = \text{ب}\left\{ ۱ - \frac{\text{ن}(\text{ن}+۱)}{\lfloor ۲}\,\text{لا}^{۲} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۲)(\text{ن}+۱)(\text{ن}+۳)}{\lfloor ۴}\,\text{لا}^{۴} - \cdots\cdots \right\}$$

$$+\ \text{ا}_{۱}\left\{ \text{لا} - \frac{(\text{ن}-۱)(\text{ن}+۲)}{\lfloor ۳}\,\text{لا}^{۳} + \frac{(\text{ن}-۱)(\text{ن}-۳)(\text{ن}+۲)(\text{ن}+۴)}{\lfloor ۵}\,\text{لا}^{۵} - \cdots\cdots \right\}$$

[ $\frac{۱}{\text{لا}}$ کی قوتوں کے حلوں کے لیے نویں باب کے آخر میں متفرق مثالوں میں سے مثال ۷ کو دیکھو ]

$$(۳)\quad \text{ما} = \text{ب}\left\{ ۱ - \frac{۱}{۳\times۴}\,\text{لا}^{۴} + \frac{۱}{۳\times۴\times۷\times۸}\,\text{لا}^{۸} - \frac{۱}{۳\times۴\times۷\times۸\times۱۱\times۱۲}\,\text{لا}^{۱۲} + \cdots\cdots \right\}$$

$$+\ \text{ا}_{۱}\left\{ \text{لا} - \frac{۱}{۴\times۵}\,\text{لا}^{۵} + \frac{۱}{۴\times۵\times۸\times۹}\,\text{لا}^{۹} - \frac{۱}{۴\times۵\times۸\times۹\times۱۲\times۱۳}\,\text{لا}^{۱۳} + \cdots \right\}$$

$$(۴)\quad \text{ما} = \text{ب}\left\{ ۱ - \frac{۱}{۴}\,\text{لا}^{۲} - \frac{۱}{۱۲}\,\text{لا}^{۳} + \frac{۵}{۹۶}\,\text{لا}^{۴} \cdots\cdots \right\}$$

$$+\ \text{ا}_{۱}\left( \text{لا} - \frac{۱}{۶}\,\text{لا}^{۳} - \frac{۱}{۲۴}\,\text{لا}^{۴} + \frac{۱}{۲۴}\,\text{لا}^{۵} \cdots\cdots \right\}$$

دفعہ ۱۰۰

$$(۱)\quad \text{ی}^{۴}\,\frac{\text{فر}^{۲}\,\text{ما}}{\text{فر ی}^{۲}} + \text{ی}^{۳}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر ی}} + (۱ - \text{ن}^{۲}\,\text{ی}^{۲})\,\text{ما} = ۰$$

$$(۲)\quad \text{ما} = \text{ا}\,\text{لا}^{۲}\,(۱ + ۲\,\text{لا})$$

$$(۳)\quad \text{ما} = \text{لا}^{۲}\,(۱ + ۲\,\text{لا})\left\{\text{ا} + \text{ب}\int \text{لا}^{-۲}\,(۱ + ۲\,\text{لا})^{-۲}\,\text{قو}^{\frac{۱}{\text{لا}}}\,\text{فرلا}\right\}$$

$$(۵)\quad \text{ی قو}^{-\text{ی}} \;\text{اور}\; \Big[\text{ی قو}^{\text{ی}}\,\text{لوک ی} + \text{ی}^{۲}\Big\{۱ - \frac{۱}{\underline{|۲}}\left(۱ + \frac{۱}{۲}\right)\text{ی}$$

$$+ \frac{۱}{\underline{|۳}}\left(۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳}\right)\text{ی}^{۲} - \cdots\Big\}\Big]$$

$$\text{جہاں}\quad \text{ی} = \frac{۱}{\text{لا}}$$

# نویں باب پر متفرق مثالیں

XIII

$$(۱)\quad \text{ع} = \text{لا}^{-\frac{۱}{۳}}\left\{۱ + \frac{۳}{\underline{|۳}}\,\text{لا} + \frac{۹}{\underline{|۶}}\,\text{لا}^{۲} + \frac{۲۷}{\underline{|۹}}\,\text{لا}^{۳} + \cdots\right\}$$

$$\text{و} = \left\{\frac{۱}{\underline{|۱}} + \frac{۳}{\underline{|۴}}\,\text{لا} + \frac{۹}{\underline{|۷}}\,\text{لا}^{۲} + \frac{۲۷}{\underline{|۱۰}}\,\text{لا}^{۳} + \cdots\right\}$$

$$\text{ط} = \text{لا}^{\frac{۱}{۳}}\left\{\frac{۱}{\underline{|۲}} + \frac{۳}{\underline{|۵}}\,\text{لا} + \frac{۹}{\underline{|۸}} \times \text{لا}^{۲} + \frac{۲۷}{\underline{|۱۱}}\,\text{لا}^{۳} + \cdots\right\}$$

$$(۲)\quad \text{ع} = \left\{۱ + \frac{۱}{۱^{۲}}\,\text{لا} + \frac{۱}{۱^{۲} \times ۲^{۲}}\,\text{لا}^{۲} + \frac{۱}{۱^{۲} \times ۲^{۲} \times ۳^{۲}}\,\text{لا}^{۳} + \cdots\right\}$$

$$\text{و} = \text{ع لوک لا} + ۲\left\{-\frac{۱}{۱^{۲}}\,\text{لا} - \frac{۱}{۱^{۲} \times ۲^{۲}}\left(۱ + \frac{۱}{۲}\right)\text{لا}^{۲}\right.$$

$- \frac{۱}{۱^{۲} \times ۲^{۲} \times ۳^{۲}} \left(۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳}\right) \text{لا}^{۳} - \ldots\ldots \}$

ط = ۶ (لوک لا)$^{۲}$ + ۲ (و − ۶ لوک لا) لوک لا

$+ \{ ۶\,\text{لا} + \left( \frac{۶}{۱^{۴} \times ۲^{۲}} + \frac{۸}{۱^{۳} \times ۲^{۳}} + \frac{۶}{۱^{۲} \times ۲^{۴}} \right) \text{لا}^{۲} + \cdots \}$

# گیارہواں باب

## دفعہ ۱۱۳

(۱) $\frac{\text{لا}}{\text{ا}} = \frac{\text{ما}}{\text{ب}} = \text{ی}$، مبداء میں سے گذرتے ہوئے خطوطِ مستقیم۔

(۲) ل لا + م ما + ن ی = ا، لا$^{۲}$ + ما$^{۲}$ + ی$^{۲}$ = ب، دائرے

(۳) ما = ا ی، لا$^{۲}$ + ما$^{۲}$ + ی$^{۲}$ = ب ی، دائرے

(۴) لا$^{۲}$ − ما$^{۲}$ = ا، لا$^{۲}$ − ی$^{۲}$ = ب، قائم زائدی اسطوانوں کے دو نظاموں کے تقاطع ۔

(۵) لا − ما = ا (ی − لا)، (لا − ما)$^{۲}$ (لا + ما + ی) = ب

(۶) لا$^{۲}$ + ما$^{۲}$ + ی$^{۲}$ = ا، ما$^{۲}$ − ۲ ما ی − ی$^{۲}$ = ب، کروں کے ایک نظام اور قائم زائدی اسطوانوں کے ایک نظام کے تقاطع۔

(۷) $\sqrt{\text{م}^{۲} + \text{ن}^{۲}}$　　(۸) زائدنما ما$^{۲}$ + ی$^{۲}$ − ۲ لا$^{۲}$ = ۱

(۹) (لا۲ + ما۲) (ک مس-۱ ما/لا)۲ = ی۲ ر۲

(۱۰) ۱/لا = ۱/ما + ۱/ر = ۱/ی + ۱/ر

## دفعہ ۱۱۴

(۱) ما - ۳ لا = د ۵ ی + مس (ما - ۳ لا) ب قوٰ لا

(۲) ما + لا = د لوک {ی۲ + (ما + لا)۲} - ۲ لا = ب

(۳) لا ما = د (ی۲ + لا ما)۲ - لا۴ = ب

(۴) ما = د لا لوک (ی - ۲ لا/ما) - لا = ب

## دفعہ ۱۱۶

(۱) لا۲ + ما۲ + ی۲ = ج۲ کرے جن کے مرکز مبدا پر ہیں

(۲) لا۲ + ما۲ + ی۲ = ج لا کرے جن کے مرکز محور لا پر ہیں اور جو مبدا میں سے گذرتے ہیں ۔

(۳) لا ما ی = ج۳

(۴) ما ی + ی لا + لا ما = ج۲ ، مشابہ مخروطی نما جن کے مرکز مبدا پر ہیں ۔

(۵) لا - ج ما = ما لوک ی

(۶) لا۲ + ۲ ما ی + ۲ ی۲ = ج۲ ، مشابہ مخروطی نما جن کے مرکز مبدا

XIV

پر ہیں ۔

## دفعہ ۱۱۷

(۱) ما = ج لا لوک لا     (۲) لا$^۲$ ما = ج ی و ی

(۳) (لا + ما + ی$^۲$) و$^{لا^۲}$ = ج

(۴) ما (لا + ی) = ج (ما + ی)

(۵) $\frac{\text{ما + ی}}{\text{لا}}$ + $\frac{\text{لا + ی}}{\text{ما}}$ = ج

(۶) ن ما − م ی = ج (ن لا − ل ی)،

مشترک خط $\frac{\text{لا}}{\text{ل}}$ = $\frac{\text{ما}}{\text{م}}$ = $\frac{\text{ی}}{\text{ن}}$ ہے۔

## دفعہ ۱۲۰

(۳) ی = ج و$^{لا^۲}$     (۴) لا$^۲$ ی + ۴ = ۰

## گیارھویں باب پر متفرق مثالیں

(۱) ما = ا لا ، ی$^۲$ − لا ما = ب

(۲) لا$^۳$ ما$^۳$ ی = ا، لا$^۳$ + ما$^۳$ = ب لا$^۲$ ما$^۲$

(۳) ما + ی = ا و$^{لا}$، ما$^۲$ − ی$^۲$ = ب

(۴) $\text{ما} = \text{جب لا} + \frac{\text{ج ی}}{\text{۱} + \text{ی}^{۲}}$

(۵) $\text{لا}^{۲} + \text{لا ما}^{۲} + \text{لا}^{۲}\text{ی} = \text{ت} + \text{ج}$

(۶) $\text{ف}(\text{ما}) = \text{ک ما}$ ، $\text{لا}^{\text{ک}} = \text{ج ما}^{\text{ی}}$

(۸) $\frac{\text{فرلا}}{\text{لا}} = \frac{\text{فرما}}{\text{۲ ما}} = \frac{\text{فری}}{\text{۳ ی}}$

(۹) $\text{ما} + \text{ی} = \text{۲ و}^{\text{لا}-\text{۳}}$ ، $\text{ما}^{۲} - \text{ی}^{۲} = \text{۳}$

(۱۰) (۱) $\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲} + \text{ی}^{۲} = \text{ج}(\text{لا} + \text{ما} + \text{ی})$ ،

(۲) $\text{لا}^{۲} - \text{لا ما} + \text{ما}^{۲} = \text{ج ی}$

(۳) $\text{ما}^{۲} - \text{ما ی} - \text{لا ی} = \text{ج ی}^{۲}$

(۱۴) $\text{لا ما} = \text{ج و}^{\text{ی}}\text{جب ط}$

# بارہواں باب

## دفعہ ۱۲۳

(۱) $\text{فہ}\left(\frac{\text{لا}}{\text{ی}} ، \frac{\text{ما}}{\text{ی}}\right) = ۰$

(۲) $\text{فہ}(\text{ل لا} + \text{م ما} + \text{ن ی} ، \text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲} + \text{ی}^{۲}) = ۰$

(۳) $\text{فہ}\left(\frac{\text{ما}}{\text{ی}} ، \frac{\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲} + \text{ی}^{۲}}{\text{ی}}\right) = ۰$

(۴) فہ $(\text{لا}^{2} - \text{ما}^{2} ،\ \text{لا}^{2} - \text{ی}^{2}) = ۰$

(۵) فہ $\left\{(\text{لا} - \text{ما})^{2} (\text{لا} + \text{ما} + \text{ی}) ،\ \dfrac{\text{لا} - \text{ما}}{\text{ی} - \text{لا}}\right\} = ۰$

(۶) فہ $(\text{لا}^{2} + \text{ما}^{2} + \text{ی}^{2} ،\ \text{ما}^{2} - ۲\,\text{ما ی} - \text{ی}^{2}) = ۰$

(۷) فہ $\left[\text{ما} - ۳\text{لا} ،\ \text{قو}^{-۵\text{لا}} \{۵\text{ی} + \text{جس}(\text{ما} - ۳\text{لا})\}\right] = ۰$

(۸) فہ $\{\text{ما} + \text{لا} ،\ \text{لوک}\,(\text{ی}^{2} + \text{ما}^{2} + ۲\,\text{ما لا} + \text{لا}^{2}) - ۲\text{لا}\} = ۰$

(۹) $\text{ما}^{2} = ۴\,\text{لا ی}$ ، (۱۰) $\text{ا}(\text{لا}^{2} - \text{ما}^{2}) + \text{ب}(\text{لا}^{2} - \text{ی}^{2}) + \text{ج} = ۰$

(۱۲) فہ $(\text{لا}^{2} + \text{ما}^{2} ،\ \text{ی}) = ۰$ ، محوری کے گرد گردشی سطحیں

## دفعہ ۱۳۶

(۱) فہ $(\text{ی} + \text{لا}_{۱} ،\ \text{لا}_{۱} + \text{لا}_{۲} ،\ \text{لا}_{۱} + \text{لا}_{۳}) = ۰$

(۲) فہ $(\text{ی} ،\ \text{لا}_{۱}^{۲}\,\text{لا}_{۲}^{-۱} ،\ \text{لا}_{۱}^{۳}\,\text{لا}_{۳}^{-۱} ،\ \text{لا}_{۱}^{۴}\,\text{لا}_{۴}^{-۱}) = ۰$

(۳) فہ $(\text{ی} - \text{لا}_{۱}\text{لا}_{۲} ،\ \text{لا}_{۱} + \text{لا}_{۲} + \text{لا}_{۳} ،\ \text{لا}_{۱}\text{لا}_{۲}\text{لا}_{۳}) = ۰$

(۴) فہ $(۲\text{ی} + \text{لا}_{۱}^{۲} ،\ \text{لا}_{۱}^{۲} - \text{لا}_{۲}^{۲} ،\ \text{لا}_{۱}^{۲} - \text{لا}_{۳}^{۲}) = ۰$

(۵) فہ $(۴\,\text{ما ی} - \text{لا}_{۳}^{۲} ،\ ۲\text{لا}_{۳} - \text{لا}_{۲}^{۲} ،\ ۲\text{لا}_{۲} - \text{لا}_{۱}^{۲}) = ۰$ ، خاص تکملہ $\text{ی} = ۰$

(۶) فہ{ی ـ ۳ لا۱ ی ـ ۳ لا۲ ی + ۶ √(ی ـ لا۱ ـ لا۲ ـ لا۳)} = ۰،
خاص تکملہ ی = لا۱ + لا۲ + لا۳

## دفعہ ۱۲۹

(۱) ی = (۲ ب۲ + ۱) لا + ب ما + ج
(۲) ی = لا جم عہ + ما جب عہ + ج
(۳) ی = ا لا + ما لوک ا + ج
(۴) ی = ا۳ لا + ا۲ ما + ج
(۵) ی = ۲ لا قط عہ + ۲ ما مس عہ + ج
(۶) ی = لا (۱ + ا) + ما (۱ + ۱/ا) + ج

## دفعہ ۱۳۰

(۱) ا ی = (لا + ا ما + ب)۲
(۲) ی = ± جذ{(لا + ا ما + ب) \ (۱ + ا۲)^(۱/۲)}
(۳) ی۲ ـ ا۲ = (لا + ا ما + ب)۲ یا ی = ب
(۴) ی۲ (۱ + ا۳) = ۸ (لا + ا ما + ب)۳
(۵) (ی + ا) و^(لا + ا ما) = ب
(۶) ی = ب و^(ا لا + ا۲ ما)

## دفعہ ۱۳۱

(۱) ۳ ی = ۲ (لا + ۱)$^{۳/۲}$ + ۳ ا ما + ۳ ب

(۲) ۲ ا ی = ا$^{۲}$ لا$^{۲}$ + ما$^{۲}$ + ۲ ا ب

(۳) ا ی = ا لا$^{۲}$ + ا$^{۲}$ لا + ق$^{ا ما}$ + ا ب

(۴) (۲ ی − ا ما$^{۲}$ − ۲ ب)$^{۲}$ = ۱۶ ا لا

(۵) ی = ا (ق$^{لا}$ + ق$^{ما}$) + ب

(۶) ا ی = ا$^{۲}$ لا + ا جب لا + جب ما + ا ب

## دفعہ ۱۳۲

(۱) ی = −۲ − لوک لا ما (۲) ۳ ی = لا ما − لا$^{۲}$ − ما$^{۲}$

(۳) ۸ ی$^{۳}$ = −۲۷ لا$^{۲}$ ما$^{۲}$ (۴) ی لا = − ما

(۵) ی = ۰ (۶) ی$^{۲}$ = ۱ (۷) ی = ۰

## دفعہ ۱۳۶

(۱) ۴ ی = − ما$^{۲}$

(۲) عام تکملہ کی ایک مخصوص صورت جو اُس سطح کو تعبیر کرتی ہے جس کی تکوین نقطہ (۰، ۱-، ۰) میں سے گذرتے ہوئے

(۶) فہ{ی − ۳ لا$_{۱}$ ی′ − ۳ لا$_{۲}$′ ی + ۶ √(ی − لا$_{۱}$ − لا$_{۲}$ − لا$_{۳}$)} = ۰′

خاص تکملہ ی = لا$_{۱}$ + لا$_{۲}$ + لا$_{۳}$

## دفعہ ۱۲۹

(۱) ی = (۲ ب$^{۲}$ + ۱) لا + ب ما + ج

(۲) ی = لا جم عہ + ما جب عہ + ج

(۳) ی = ا لا + ما لوک ا + ج

(۴) ی = ا$^{۳}$ لا + ا$^{-۲}$ ما + ج

(۵) ی = ۲ لا قطعہ + ۲ ما مس عہ + ج

(۶) ی = لا (۱ + ا) + ما (۱ + $\frac{۱}{ا}$) + ج

## دفعہ ۱۳۰

(۱) ا ی = (لا + ا ما + ب)$^{۲}$

(۲) ی = ± جمز{(لا + ا ما + ب) \ (۱ + ا$^{۲}$)$^{\frac{۱}{۲}}$}

(۳) ی$^{۲}$ − ا$^{۲}$ = (لا + ا ما + ب)$^{۲}$ یا ی = ب

(۴) ی$^{۲}$ (۱ + ا$^{۳}$) = ۸ (لا + ا ما + ب)$^{۳}$

(۵) (ی + ا) و$^{لا + ا ما}$ = ب

(۶) ی = ب و$^{ا لا + ا^{۲} ما}$

## دفعہ ۱۳۱

(۱) ۳ ی = ۲ (لا + ا)$^{۳/۲}$ + ۳ ا ما + ۳ ب

(۲) ۲ ا ی = ا$^{۲}$ لا$^{۲}$ + ما$^{۲}$ + ۲ ا ب

(۳) ا ی = ا لا$^{۲}$ + ا$^{۲}$ لا + ق$^{\text{ا ما}}$ + ا ب

(۴) (۲ ی − ا ما$^{۲}$ − ۲ ب)$^{۲}$ = ۱۶ ا لا

(۵) ی = ا (ق$^{\text{لا}}$ + ق$^{\text{ما}}$) + ب

(۶) ا ی = ا$^{۲}$ لا + ا جب لا + جب ما + ا ب

## دفعہ ۱۳۳

(۱) ی = −۲ − لوک لا ما     (۲) ۳ ی = لا ما − لا$^{۲}$ − ما$^{۲}$

(۳) ۸ ی$^{۳}$ = − ۲۷ لا$^{۲}$ ما$^{۲}$     (۴) ی لا = − ما

(۵) ی = ۰     (۶) ی$^{۲}$ = ۱     (۷) ی = ۰

## دفعہ ۱۳۶

(۱) ۴ ی = − ما$^{۲}$

(۴) عام تکملہ کی ایک مخصوص صورت جو اُس سطح کو تعبیر کرتی ہے جس کی تکوین نقطہ (۰، ۱-، ۰) میں سے گذرتے ہوئے

جمبسنوں سے ہوئی ہے ۔

# بارہویں باب پر متفرق مثالیں

(۱) ی = ا لا + ب ما - ا^۲ ب ، نادر تکملہ ی^۲ = لا^۲ ما

(۲) ی لا = ا لا + ب ما - ا^۲ ب ، نادر تکملہ ی^۲ = ما

(۳) فہ {لا ما ، (ی^۲ + لا ما)^۲ - لا^۴} = ۰

(۴) ی = ۳ لا^۳ - ۳ ا لا^۲ + ا^۲ لا + ۲ ما^۲ - ۴ ا ما^۳ + ۳ ا^۲ ما^۲ - ا^۳ ما + ب

(۵) ی = ا لا_۱ + ب لوک لا_۲ + (ا^۲ + ۲ ب) لا_۳^{-۱} + ج

(۶) ی = فہ {(لا_۱ + لا_۳) \ لا_۲ ، لا_۱^۲ - لا_۳^۲}

(۷) ۳ ا (لا + ا ما + ب) = (۱ + ا^۳) لوک ی یا ی = ب ، ی = ب میں ی = ۰ شامل ہے لیکن وہ نادر تکملہ بھی ہے ۔

(۸) ی (۱ + ا^۲ + ب^۲) = (لا_۱ + ا لا_۲ + ب لا_۳ + ج)^۲

(۹) فہ (ی ÷ قو^{لا_۱} ، ی ÷ قو^{لا_۲} ، ی ÷ قو^{لا_۳}) = ۰

(۱۰) ی = ا لا - (۲ + ۳ ا + ½ ا^۲) ما + ب

(۱۱) ی^۲ = ا لا^۲ - (۲ + ۳ ا + ½ ا^۲) ما^۲ + ب

(۱۲) $ی^{۲} = (۱ + ل^{۲})\, لا^{۲} + ل\, ما^{۲} + ب$

(۱۳) $ی = ل\, س\,(لا + ل\, ما + ب)$، یا $ی = ب$

ی = ۰ نادر تکملہ ہے لیکن وہ ی = ب میں بھی شامل ہے۔

(۱۴) $ی^{۲} = ل\, لا^{۲} + ب\, ما - ۳\, ل^{۳} + ب^{۲}$، نادر تکملہ $ی^{۲} = \pm \frac{۲\, لا^{۳}}{۹}$

$- \frac{ما^{۴}}{۴}$

(۱۵) $ی = لا + ما - ۱ \pm ۲ \sqrt{(لا - ۱)(ما - ۱)}$

(۱۶) $ی^{۲} - لا\, ما = ج$

XVI (۱۷) $ف\left(\frac{ی}{لا}، \frac{ی}{ما}\right) = ۰$، مخروط جن کے راس مبداء پر ہیں۔

(۱۸) $لا^{۲} + ما^{۲} + ی^{۲} = ۲\, جم\, عہ + ۲\, ما\, جب\, عہ + ج$، کرے جن کے مرکز دئے ہوئے دائرے پر ہیں عام تکملہ کے دوسرے حل حاصل ہوتے ہیں۔

(۱۹) $لا\, ما\, ی = ن$، (یہ نادر تکملہ ہے۔ کامل تکملہ سے مماس مستوی حاصل ہوتے ہیں)

(۲۰) تفرقی مساوات $(ی - ع\, لا - ق\, ما)\left(۱ - \frac{۱}{ع} - \frac{۱}{ق}\right) = ۰$

کا کوئی نادر تکملہ نہیں ہے اور کامل تکملہ مستویوں کو تعبیر کرتا ہے۔ ہر وہ تکملہ جو عام تکملہ میں شامل ہے ایک ایسے مستوی کے لفاف کو تعبیر کرتا ہے جس کی مساوات میں صرف ایک مبدل ہے یعنے جو کشادپذیر سطح ہے۔

# تیرہواں باب

## دفعہ ۱۳۹

(۱) ما$^{۲}$ {(لا − ا)$^{۲}$ + ما$^{۲}$ + ۲ ی} = ب

(۲) ی$^{۲}$ = ۲ ا لا + ا$^{۲}$ ما$^{۲}$ + ب

(۳) ی = ا لا + ب قو (ما + ا)$^{-۱}$

(۴) ی$^{۲}$ = ۲ (ا$^{۲}$ + ۱) لا$^{۲}$ + ۲ ا ما + ب

(۵) ی = ا لا + ۳ ا$^{۲}$ ما + ب

(۶) (ی$^{۲}$ + ا$^{۲}$)$^{۳}$ = ۹ (لا + ا ما + ب)$^{۲}$

(۷) ی = لا$^{۳}$ + ا لا + $\frac{۲}{۳}$ (ما + ا)$^{\frac{۳}{۲}}$ + ب

(۸) ی = ا لا + ب ما + ا$^{۲}$ + ب$^{۲}$

## دفعہ ۱۴۱

(۱) ی = ا$_{۱}$ لا$_{۱}$ + ا$_{۲}$ لا$_{۲}$ + (۱ − ا$_{۱}^{۳}$ − ا$_{۲}^{۲}$) لا$_{۳}$ + ا$_{۳}$

(۲) ی = ا$_{۱}$ لا$_{۱}$ + ا$_{۲}$ لا$_{۲}$ ± جب$^{-۱}$ (ا$_{۱}$ ا$_{۲}$ لا$_{۳}$) + ا$_{۳}$

(۳) ی = ا$_{۱}$ لوک لا$_{۱}$ + ا$_{۲}$ لوک لا$_{۲}$ ± لا$_{۳}$ $\sqrt{\text{ا}_{۱} + \text{ا}_{۲}}$ + ا$_{۳}$

(۴) $۲ی = ا_۱ لا_۱^۲ + ا_۲ لا_۲^۲ + ا_۳ لا_۳^۲ - ۲ (ا_۱ ا_۲ ا_۳)^{\frac{۱}{۳}} لوک\ لا_۴ + ا_۴$

(۵) $۲ (ا_۱ ا_۲ ا_۳)^{\frac{۱}{۳}} لوک\ ی = ا_۱ لا_۱^۲ + ا_۲ لا_۲^۲ + ا_۳ لا_۳^۲ + ۱$

(۶) $۴ ا_۱ ی = ۴ ا_۱^۲ لوک\ لا_۲ + ۲ ا_۱ ا_۲ (لا_۱ - لا_۲) - (لا_۱ + لا_۲)^۲$
$+ ۴ ا_۱ ا_۳$

(۷) $(۱ + ا_۱ ا_۲) لوک\ ی = (ا_۱ + ا_۲)(لا_۱ + ا_۱ لا_۲ + ا_۲ لا_۲ + ا_۳)$

(۸) $ی = -(ا_۱ + ا_۲) لا_۱ + (۲ ا_۱ - ا_۲) لا_۲ + (-ا_۱ + ۲ ا_۲) لا_۳$
$- \frac{۱}{۲} (لا_۱^۲ + لا_۲^۲ + لا_۳^۲) \pm \frac{۲}{۳} \{ لا_۱ + لا_۲ + لا_۳ - ۲ ا_۱^۲$
$+ ۲ ا_۱ ا_۲ - ۲ ا_۲^۲ \}^{\frac{۳}{۲}} + ا_۳$

## دفعہ ۱۴۲

(۱) $ی = \pm (لا_۱ + لا_۲)^۲ + لوک\ لا_۳ + ا$ -

(۲) کوئی مشترک تکملہ نہیں ہے -

(۳) $ی = لا_۱^۲ + لا_۲^۲ + لا_۳^۲ + ا$ ، یا $ی = لا_۱^۲ + ۲ لا_۲ لا_۳ + ا$

(۴) $ی = ا (لا_۱ + ۲ لا_۲) + ب\ لوک\ لا_۳ + ۲ ا ب\ لوک\ لا_۴ + ج$

(۵) $ی = ا (۳ لا_۱ + لا_۲^۳ - لا_۳^۳) + ب$

(۶) کوئی مشترک تکملہ نہیں ہے۔

(۷) ی = ا (لا$_1$ − لا$_4$) + ب (لا$_2$ − لا$_3$) + ج یا ی = ا (لا$_1$ − ۲لا$_2$)
+ ب (۲لا$_3$ − لا$_4$) + ج

(۸) ی = فہ (۳لا$_1$ + لا$_2^3$ − لا$_3^3$)۔

(۹) ی = فہ (لا$_1$ − لا$_4$، لا$_2$ − لا$_3$) یا ی = فہ (لا$_1$ − ۲لا$_2$، ۲لا$_3$ − لا$_4$)

## تیرھویں باب پر متفرق مثالیں

(۱) ی$^2$ = ا$_1$ لوک لا$_1$ − ا$_1$ لا$_2$ لوک لا$_2$ + ا$_2$ لوک لا$_3$ + ا$_3$

(۲) کوئی مشترک تکملہ نہیں ہے۔

(۳) ی = ا$_1$ لوک لا$_1$ + ا$_2$ لا$_2$ + (ا$_1$ + ا$_2$) لا$_3$
± $\sqrt{\text{ا}_1(\text{ا}_1 + ۲\text{ا}_2)\,\text{لا}_4^3}$ + ا$_3$

(۴) ۰ = ا$_1$ لوک لا$_1$ + ا$_2$ لا$_2$ + (ا$_1$ + ا$_2$) لا$_3$
± $\sqrt{\text{ا}_1(\text{ا}_1 + ۲\text{ا}_2)\,\text{ی}^3}$ + ۱

(۵) ۲ لوک ی = ج ± (لا$_1^2$ + لا$_2^2$ + لا$_3^2$)

(۶) ی$^3$ = لا$_1^3$ + لا$_2^3$ + لا$_3^3$ + ج

(۷) ۴ ی + لا$_{۱}^{۲}$ + لا$_{۲}^{۲}$ + لا$_{۳}^{۲}$ = ۰

(۱۰) ی = فہ (لا$_{۱}$ لا$_{۲}'$ لا$_{۲}$ + لا$_{۳}$ + لا$_{۴}'$ لا$_{۴}$ لا$_{۵}$)

(۱۱) (۳) ۳ ی = لا$_{۱}^{۳}$ − ۳ لا$_{۱}$ لا$_{۲}$ + ج

# چودھواں باب

## دفعہ ۱۴۴

(۱) ی = لا$^{۳}$ + لا ف (ما) + فا (ما)

(۲) ی = لوک لا لوک ما + ف (لا) + فا (ما)

(۳) ی = − $\frac{۱}{لا^{۲}}$ جب لا ما + ما ف (لا) + فا (لا)

(۴) ی = لا$^{۳}$ ما$^{۳}$ + ف (ما) لوک لا + فا (ما)

(۵) ی = جب (لا + ما) + $\frac{۱}{ما}$ ف (لا) + فا (ما)

(۶) ی = − لا ما + ف (لا) + قو$^{لا ما}$ فا (لا)

(۷) ی = (لا$^{۲}$ + ما$^{۲}$)$^{۲}$ − ۱

(۸) ی = ما$^{۲}$ + ۲ لا ما + ۲ ما + ا لا$^{۲}$ − ب لا + ج

(۹) ی = (لا$^{۲}$ + ما$^{۲}$)$^{۲}$　　(۱۰) ی = لا$^{۳}$ ما$^{۳}$ + ما (۱ − لا$^{۳}$)

## دفعہ ۱۴۵

(۱) ی = فا$_{۱}$(ما + لا) + فا$_{۲}$(ما + ۲لا) + فا$_{۳}$(ما + ۳لا)

(۲) ی = ف (ما − ۲لا) + فا (۲ما − لا)

(۳) ی = ف (ما + لا) + فا (ما − لا)

(۴) مخروطی نما ۴لا$^{۲}$ − ۸لاما + ما$^{۲}$ + ۸لا − ۴ما + ی + ۲ = ۰

## دفعہ ۱۴۶

(۱) ی = ف (۲ما − ۳لا) + لا فا (۲ما − ۳لا)

(۲) ی = ف (۵ما + ۴لا) + لا فا (۵ما + ۴لا)

(۳) ی = ف (ما + ۲لا) + لا فا (ما + ۲لا) + قہ (ما)

(۴) ی (۲لا + ما) = ۳لا

## دفعہ ۱۴۷

(۱) ی = لا$^{۴}$ + ۲لا$^{۳}$ما + ف (ما + لا) + لا فا (ما + لا)

(۲) ی = ۶لا$^{۲}$ما + ۳لا$^{۳}$ + ف (ما + ۲لا) + فا (۲ما + لا)

(۳) و = −۲ ππ لا$^{۲}$ ما$^{۲}$

## دفعہ ۱۴۸

(۱) ی = قو$^{لا + ۲ما}$ + ف (ما + لا) + لا فا (ما + لا)

(۲) ی = لا^۲ (۳ لا + ما) + ف (ما + ۳ لا) + لا فا (ما + ۳ لا)

(۳) ی = - لا^۲ جم (۲ لا + ما) + ف (ما + ۲ لا) + لا فا (ما + ۲ لا) + فہ (ما) -

(۴) ی = لا قو^{لا-ما} + ف (ما - لا) + فا (۲ ما + ۳ لا)

(۵) ی = (لا + ما)^۳ + ف (ما + خ لا) + فا (ما - خ لا)

(۶) ی = ۲ لا^۲ لوک (لا + ۲ ما) + ف (۲ ما + لا) + لا فا (۲ ما + لا)

## دفعہ ۱۴۹

(۱) ی = لا جب ما + ف (ما - لا) + لا فا (ما - لا)

(۲) ی = لا^۴ + ۲ لا^۳ ما + ف (ما + ۵ لا) + فا (ما - ۳ لا)

(۳) ی = جب لا - ما جم لا + ف (ما - ۳ لا) + فا (ما + ۲ لا)

(۴) ی = جب لا ما + ف (ما + ۲ لا) + فا (ما - لا)

(۵) ی = ۱/۲ مس لا مس ما + ف (ما + لا) + فا (ما - لا)

(۶) ما = لا لوک ت + ت لوک لا + ف (ت + ۲ لا) + فا (ت - ۲ لا)

## دفعہ ۱۵۰

(۱) ی = ف (لا) + فا (ما) + قو^{۳ لا} فہ (ما + ۲ لا)

(۲) ی = قو^{لا} {ف (ما - لا) + لا فا (ما - لا)}

xvIII

(۳) و = ∑ ا قو^{ھ(لا + ھ ت)}

(۴) ی = ن (ما + لا) + قو^{-لا} فا(ما - لا)

(۵) ی = ∑ ا قو^{ھ(لا + ھ ما)} + ∑ ب قو^{ک(لا + ۲ک ما)}

(۶) و = ∑ ا قو^{ن(لا جم عہ + ما جب عہ)}

(۷) ی = قو^{لا} {ف(ما + ۲لا) + ∑ ا قو^{ک(ما + ۲ک لا)}}

(۸) ی = ۱ + قو^{-لا} {(ما - لا)^{۲} - ۱}

## دفعہ ۱۵۱

(۱) ی = ۱/۲ قو^{۲لا - ما} + قو^{لا} ف(ما + لا) + قو^{۲لا} فا(ما + لا)

(۲) ی = ۱ + لا - ما - لاما + قو^{لا} ف(ما) + قو^{-ما} فا(لا)

(۳) ی = ۱/۸۲ {جب(لا - ۳ما) + ۹ جم(لا - ۳ما)} + ∑ ا قو^{ک(ما + ک لا)}

(۴) ی = لا + ف(ما) + قو^{-لا} فا(ما + لا)

(۵) ما = - قو^{لا + ی} + ∑ ا قو^{لا قط عہ + ی مس عہ}

(۶) ی = قو$^{۲لا}$ { لا$^{۲}$ مس (ما + ۳لا) + لاف (ما + ۳لا)
+ فا (ما + ۳لا) }

## دفعہ ۱۵۲

(۱) ما$^{۲}$ ر − ۲ ماس + ت = ع + ۲ ما

(۲) ع ت − ق س = ق$^{۳}$

(۳) ر + ۳ س + ت + (رت − س$^{۲}$) = ۱

(۴) ع ق (ر − ت) − (ع$^{۲}$ − ق$^{۲}$) س + (ع ما − ق لا)
(رت − س$^{۲}$) = ۰

(۵) ۲ ع ر + ق ت − ۲ ع ق (رت − س$^{۲}$) = ۱

(۶) ق ر + (ی ق − ع) س − ع ت ی = ۰

## دفعہ ۱۵۴

(۱) ی = ف (ما + جب لا) + فا (ما − جب لا)

(۲) ی = ف (لا + ما) + فا (لاما)

(۳) ما − سا (لا + ما + ی) = فہ (لا) یا ی = ف (لا)
+ فا (لا + ما + ی)

(۴) ی = ف (لا + مس ما) + فا (لا − مس ما)

(۵) ی = ف (لا$^{۲}$ + ما$^{۲}$) + فا (ما / لا) + لا ما

(۶) ما = ف (لا + ما + ی) + لا فا (لا + ما + ی)

(۳) $\text{و} = \sum \text{ا}\ \text{قو}^{\text{ھ}(\text{لا} + \text{ھ}\ \text{ت})}$

(۴) $\text{ی} = \text{ن}(\text{ما} + \text{لا}) + \text{قو}^{-\text{لا}}\ \text{فا}(\text{ما} - \text{لا})$

(۵) $\text{ی} = \sum \text{ا}\ \text{قو}^{\text{ھ}(\text{لا} + \text{ھ}\ \text{ما})} + \sum \text{ب}\ \text{قو}^{\text{ک}(\text{لا} + ۲\text{ک}\ \text{ما})}$

(۶) $\text{و} = \sum \text{ا}\ \text{قو}^{\text{ن}(\text{لا}\ \text{جم}\ \text{عہ} + \text{ما}\ \text{جب}\ \text{عہ})}$

(۷) $\text{ی} = \text{قو}^{\text{لا}} \left\{ \text{ف}(\text{ما} + ۲\text{لا}) + \sum \text{ا}\ \text{قو}^{\text{ک}(\text{ما} + ۲\text{ک}\ \text{لا})} \right\}$

(۸) $\text{ی} = ۱ + \text{قو}^{-\text{لا}} \left\{ (\text{ما} - \text{لا})^{۲} - ۱ \right\}$

## دفعہ ۱۵۱

(۱) $\text{ی} = \frac{۱}{۲}\ \text{قو}^{۲\text{لا} - \text{ما}} + \text{قو}^{\text{لا}}\ \text{ف}(\text{ما} + \text{لا}) + \text{قو}^{۲\text{لا}}\ \text{فا}(\text{ما} + \text{لا})$

(۲) $\text{ی} = ۱ + \text{لا} - \text{ما} - \text{لاما} + \text{قو}^{\text{لا}}\ \text{ف}(\text{ما}) + \text{قو}^{-\text{ما}}\ \text{فا}(\text{لا})$

(۳) $\text{ی} = \frac{۱}{۸۲} \left\{ \text{جب}(\text{لا} - ۳\text{ما}) + ۹\ \text{جم}(\text{لا} - ۳\text{ما}) \right\} + \sum \text{ا}\ \text{قو}^{\text{ک}(\text{ما} + \text{ک}\ \text{لا})}$

(۴) $\text{ی} = \text{لا} + \text{ف}(\text{ما}) + \text{قو}^{-\text{لا}}\ \text{فا}(\text{ما} + \text{لا})$

(۵) $\text{ما} = -\text{قو}^{\text{لا} + \text{ی}} + \sum \text{ا}\ \text{قو}^{\text{لا}\ \text{قط}\ \text{عہ} + \text{ی}\ \text{س}\ \text{عہ}}$

(۶) ی = قو$^{۲لا}$ { لا$^{۲}$ س (ما + ۳ لا) + لا ف (ما + ۳ لا) + فا (ما + ۳ لا) }

## دفعہ ۱۵۲

(۱) ما$^{۲}$ ر ـ ۲ ما س + ت = ع + ۶ ما

(۲) ع ت ـ ق س = ق$^{۳}$

(۳) ر + ۳ س + ت + (ر ت ـ س$^{۲}$) = ۱

(۴) ع ق (ر ـ ت) ـ (ع$^{۲}$ ـ ق$^{۲}$) س + (ع ما ـ ق لا) (ر ت ـ س$^{۲}$) = ۰

(۵) ۲ ع ر + ق ت ـ ۲ ع ق (ر ت ـ س$^{۲}$) = ۱

(۶) ق ر + (ی ق ـ ع) س ـ ع ت ی = ۰

## دفعہ ۱۵۴

(۱) ی = ف (ما + جب لا) + فا (ما ـ جب لا)

(۲) ی = ف (لا + ما) + فا (لا ما)

(۳) ما ـ سا (لا + ما + ی) = فہ (لا) یا ی = ف (لا) + فا (لا + ما + ی)

(۴) ی = ف (لا + س ما) + فا (لا ـ س ما)

(۵) ی = ف (لا$^{۲}$ + ما$^{۲}$) + فا ($\frac{۱}{لا}$) + لا ما

(۶) ما = ف (لا + ما + ی) + لا فا (لا + ما + ی)

(۷) ۳ ی = ۴ لا^۳ ما - لا^۲ ما^۴ - ۶ لوک ما - ۳

## دفعہ ۱۵۷

(۱) ع + لا - ۲ ما = ف (ق - ۲ لا + ۳ ما)، لہ = - ۱/۲

(۲) ع - لا = ف (ق - ما)، لہ = ∞

(۳) ع - و^لا = ف (ق - ۲ ما)، لہ = ∞

(۴) ع - ما = ف (ق + لا)، ع + ما = فا (ق - لا)، لہ = ± ۱

(۵) ع - ما = ف (ق - ۲ لا)، ع - ۲ ما = فا (ق - لا)، لہ = - ۱ یا - ۱/۲

(۶) ع لا - ما = ف (ق ما - لا)، لہ = - لا یا - ما

(۷) ی ع - لا = ف (ی ق - ما)، لہ = ی/ع ق

## دفعہ ۱۵۸

(۱) ی = ا لا + ب ما - ۱/۲ لا^۲ + ۲ لا ما - ۳/۲ ما^۲ + ج

ی = ۱/۲ لا^۲ (۱ + ۳ م^۲) + (۲ + ۳ م) لا ما + ن لا + ف (ما + م لا)

= ۲ لا ما - ۱/۲ (لا^۲ + ۳ ما^۲) + ن لا + سا (ما + م لا)

XIX

(۲) ی = ½ (لا$^{2}$ + ما$^{2}$) + ا لا + ب ما + ج ، ی = ½ (لا$^{2}$ + ما$^{2}$) + ن لا + سا (ما + م لا)

(۳) ی = لو$^{لا}$ + ما$^{2}$ + ا لا + ب ما + ج ، ی = لو$^{لا}$ + ما$^{2}$ + ن لا + سا (ما + م لا)

(۴) لا = ½ (عہ − بہ) ، ما = ½ {سا(بہ) − فہ(عہ)} ،

ی = لا ما + ½ {فہ(عہ) − سا(بہ)} + بہ ما

(۵) لا = بہ − عہ ، ما = فہ(عہ) − سا(بہ) ،

ی = لا ما − فہ(عہ) + سا(بہ) + بہ ما

(۶) ی + ما/م + م لا − ن لوک لا = فہ (لا$^{م}$ ما) ، دوسرا طریقہ ناکام رہتا ہے۔

(۷) ی$^{2}$ = لا$^{2}$ + ما$^{2}$ + ۲ ا لا + ۲ ب ما + ج ،

ی$^{2}$ = لا$^{2}$ + ما$^{2}$ + ۲ ن لا + سا (ما + م لا)

(۸) ۲ ی = ما$^{2}$ − لا$^{2}$

## چودھویں باب پر تفرقی مثالیں

(۱) ی = لا$^{2}$ ما$^{2}$ + لا ف (ما) + فا (ما)

(۲) ی = لو$^{لا+ما}$ + ف (لا) + فا (ما)

(۳) ما ی = ما لوک ا - ف (لا) + ما فا (لا)

(۴) ی = ف (لا + ما) + لا فا (لا + ما) - جب (۲ لا + ۳ ما)

(۵) ی = ف (ما + لوک لا) + لا فا (ما + لوک لا)

(۶) ی = لا + ما + ف (لا ما) + فا (لا$^{۲}$ ما)

(۷) ی = لوک (لا + ما) ف (لا$^{۲}$ - ما$^{۲}$) + فا (لا$^{۲}$ - ما$^{۲}$)

(۸) ۴ ی = ۶ لا ما - ۳ لا$^{۲}$ - ۵ ما$^{۲}$ + ۴ ا لا + ۴ ب ما + ج ،

۴ ی = ۶ لا ما - ۳ لا$^{۲}$ - ۵ ما$^{۲}$ + ۲ ن لا + ۲ سا (ما + م لا)

(۹) ۳ ی = ۳ ج ۲ ± ۲ (لا + ا)$^{\frac{۳}{۲}}$ ± ۲ (ما + ب)$^{\frac{۳}{۲}}$

(۱۰) م ی = جب ما + م$^{۲}$ جب لا - م ن لا = م فہ (ما + م لا)

(۱۱) ۲ لا = ع - بہ ، ۲ ما = سا (بہ) - فہ (عہ) ،

۲ ی = ۳ لا$^{۲}$ - ۶ لا ما - ۷ ما$^{۲}$ + فہ (عہ) - سا (بہ) + ۲ بہ ما

(۱۲) ی = لا$^{۳}$ + ما$^{۳}$ + (لا + ما + ۱)$^{۲}$

(۱۳) ی = لا$^{۲}$ - لا ما + ما$^{۲}$

(۲۰) ع لا + ق ما = ف (ع$^{۲}$ + ق$^{۲}$) ، ع ما - ق لا = فا ($\frac{ق}{ع}$)

## کُل کتاب پر متفرق مثالیں

(۱) (لا$^{۲}$ - ما$^{۲}$)$^{۲}$ = ج لا ما　　(۲) ما = لا$^{۲}$ + ج قو$^{۲}$ لا

(۳) ۲ قط لا قط ۱ = لا + جب لا جم لا + ج

(۴) (لا ما + ج)$^{۲}$ = ۴ (لا$^{۲}$ + ما) (ما$^{۲}$ − ج لا)

(۵) ۱ + لا ما = ما (ج + جب$^{-۱}$ لا) $\sqrt{۱ - لا^{۲}}$

(۶) ما = (ا − $\frac{۱}{۴}$ لا) جم ۲ لا + ب جب ۲ لا

(۷) ما = $\frac{لا^{۲}}{۵}$ − $\frac{۲ لا}{۲۵}$ + $\frac{۲۸}{۱۲۵}$ + $\frac{۱}{۱۶}$ لا قو$^{لا}$ (جب ۲ لا

− جم ۲ لا) + ا قو$^{لا}$ + ب قو$^{لا}$ جم (۲ لا + ع)

(۸) ما = ا + ب لا + ج لا لوک لا

+ لوک لا + $\frac{۱}{۲}$ لا (لوک لا)$^{۲}$ + $\frac{۱}{۲}$ لا$^{۲}$

(۹) ما + قط لا = ج مس لا

(۱۰) لا = ا قو$^{۲ت}$ + ب قو$^{-۲ت}$ − $\frac{۲}{۵}$ (جم ت − جب ت)،

ما = ا قو$^{۲ت}$ − ۳ ب قو$^{-۲ت}$ − $\frac{۶}{۵}$ جم ت

(۱۱) لا$^{\frac{۲}{۳}}$ = (ما − ۱)$^{\frac{۲}{۳}}$ + ج، نادر حل ما = ۱

(۱۲) ما = ا قم (ب − لا)

(۱۳) ما = (ا + ب لا + $\frac{لا^{۲}}{۹۴}$) جب ۲ لا + (ع + ف لا

− $\frac{لا^{۳}}{۹۶}$) جم ۲ لا

(۱۴) ۲ لا ما = ۳ لا$^{۲}$ + ج،

(۱۵) ی + لا ما = ج (لا + ما ـ لا ما)

(۱۶) لا$^{۳}$ + ما$^{۳}$ + ی$^{۳}$ = ج لا ما ی

(۱۷) ی = ف (لا ما) ـ ۱/۲ لا$^{۲}$ ـ ۱/۲ ما$^{۲}$

(۱۸) (لا ـ ما) و$^{(لا - ی)/(لا - ما)}$ = ف ( (لا ـ ۳ ما + ی) / (لا ـ ما)$^{۲}$ )

(۱۹) (ی + لا)$^{۲}$ = (ی + ۲ ما) ف (ما/لا)

(۲۰) ی = ا لا + ب ما + ا$^{۲}$ + ب$^{۲}$، نادر تکملہ ۴ ی + لا$^{۲}$ + ما$^{۲}$ = ۰

(۲۱) ی = و$^{لا}$ ف (لا ـ ما) + فا (ما)

(۲۲) ی = ا لا$^{۲}$ + ب ما + ۴ ا$^{۲}$، نادر تکملہ ۱۶ ی + لا$^{۴}$ = ۰

(۲۳) ی = ف (لا + ما) + فا (لا ـ ما) + ۱/۹ (لا$^{۳}$ + ما$^{۳}$)

(۲۴) ی = لا ف (ما) + ما فا (لا)

(۲۵) ج ی = (لا + ا) (ما + ب)

(۲۶) ی = ۱/۲ لا ما + ف (ما/لا) + لا فا (ما/لا)

(۲۷) ی = ف (ی + لا) + فا (ی + ما)

(۲۸) ما (لا + ج) = ج$^{۲}$ لا، نادر حل ما = ۰ اور ما + ۴ لا$^{۲}$ = ۰

(۲۹) ا ما$^{۴}$ = (لا + ب)$^{۵}$

(۳۰) ما = ا جم $\left(\frac{\text{لا}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1}\right)$ + ب جب $\left(\frac{\text{لا}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1}\right)$

(۳۱) لا$^2$ + ما$^2$ + ی$^2$ = ۲ (لا جم عہ + ما جب عہ + ج)

(۳۲) ما = قو$^{\text{لا}}$ − $\frac{3}{2}$ قو$^{2\text{لا}}$ + $\frac{1}{2}$ قو$^{3\text{لا}}$

(۳۳) لا = قو$^{-\text{کت}}$ (ا جم لہ ت + ب جب لہ ت)

+ ج جم (ع ت − عہ)

جہاں ج = $\frac{1}{\sqrt{(\text{کہ}^2+\text{لہ}^2-\text{ع}^2)^2+4\,\text{کہ}^2\text{ع}^2}}$، ٹس عہ = $\frac{2\,\text{کہ ع}}{\text{کہ}^2+\text{لہ}^2-\text{ع}^2}$

اور ا اور ب اختیاری مستقل ہیں۔

(۳۴) ما = ا جم (جب لا) + ب جب (جب لا)

(۳۵) (۱) فا = ا لوک (ر + ی) + ب

(۲) فہ = ا $\int$ قو$^{-\frac{\text{عا}^2}{4\text{د}^2}}$ فرعا + ب، $\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}}$

= $\frac{1}{\sqrt{\text{ت}}}$ قو$^{-\frac{\text{لا}^2}{4\text{دت}}}$

(۳۶) و = ا $\{\frac{1}{5} + \frac{2}{7}(3\text{ی}^2-\text{ر}^2) + \frac{1}{35}(35\text{ی}^4$

$-30\text{ی}^2\text{ر}^2 + 3\text{ر}^4)\}$

جہاں $ر^2 = لا^2 + ما^2 + ی^2$

(۳۹) $ی = ج \left(1 + \frac{لا}{1} + \frac{لا^4}{\lfloor 4 \cdot 1^4} + \frac{لا^8}{\lfloor 8 \cdot 1^8} + \cdots \right)$ جمزت

$+ ج \left( \frac{لا^2}{\lfloor 2 \cdot 1^2} + \frac{لا^3}{\lfloor 3 \cdot 1^3} + \frac{لا^6}{\lfloor 6 \cdot 1^6} + \frac{لا^7}{\lfloor 7 \cdot 1^7} + \cdots \right)$ جمزت

(۴۱) $ما - لا = ج \, (لا ما - 1) \, قو^{-لا}$

(۴۲) $ما = (1+لا)^{ا-ب} (1-لا)^{ا+ب} \left\{ ۂ + ب \int (1 + لا)^{-ا+ب-1} (1-لا)^{-ا-ب-1} فرلا \right\}$

اگر ۲ ا ایک صحیح عدد ہو تو تکملہ کی قیمت $ی = \frac{1+لا}{1-لا}$ رکھ کر معلوم کیجا سکتی ہے ۔

(۴۳) (آ) $ما = (1 - لا^2)(ۂ + ب \, لوک \, لا)$

($\bar{۲}$) $ما = (1 - لا^2)(لا + ۂ + ب \, لوک \, لا)$

(۴۴) $(1 - لا^2) \, ما = (ۂ + ب \int قو^{-لا^2} فرلا) \, قو^{\frac{1}{2} لا^2}$ ، [رکھو لوک ما $= \int (ی - \frac{1}{2} ع) فرلا$ ، ع میں تفرقی مساوات کا ایک حل $ی = لا$ ہے ۔]

(۴۵) $ف(لا) = 1 - \frac{(۲ن - ۲)}{(۲ن - 1)} \frac{لا^2}{\lfloor 2} \cdots$

$$+ \frac{(2ن-2)(2ن-4)(2ن-6)}{(2ن-1)(2ن-2)(2ن-3)} \frac{لا^3}{\lfloor 3} - \cdots\cdots$$

$$ف_ن(لا) = لا - \frac{(2ن-2)(2ن-4)}{(2ن-1)(2ن-2)} \frac{لا^3}{\lfloor 3} + \cdots\cdots$$

(۴۶) $ما = ا لا^5 + ب لا^3 + ع (لا^2 + 1)$، $\frac{ج}{9}$ کی بجائے ع رکھنے سے

(۴۷) $و = 1 + \frac{ج}{\lfloor 2} \left(\frac{لا}{د}\right)^2 + \frac{ج\{ج+2(ب+1)\}}{\lfloor 4} \left(\frac{لا}{د}\right)^4$

$$+ \frac{ج\{ج+2(ب+1)\}\{ج+4(ب+3)\}}{\lfloor 6} \left(\frac{لا}{د}\right)^6 + \cdots$$

$$و = \left(\frac{لا}{د}\right) + \frac{(ج+ب)}{\lfloor 3} \left(\frac{لا}{د}\right)^3 + \frac{\{ج+ب\}\{ج+3(ب+2)\}}{\lfloor 5} \left(\frac{لا}{د}\right)^5$$

$+ \cdots\cdots$

دونوں سلسلے دائرہ $|لا| = |د|$ کے اندر مستدق ہیں۔

(۴۹) $لا^2 \frac{فر^2 ما}{فر لا^2} = (2 - لا^2) ما$

(۵۰) $\frac{1}{ق} \left\{ \frac{جف ف}{جف ما} - \frac{جف ق}{جف لا} \right\}$ کو صرف لا کا ایک تفاعل ہونا چاہیئے، $لا^3 ما - \frac{1}{2} لا^2 ما^2 = ج$

(۵۱) $لا^2 + ما^2 + 2 ب لا ما = 2 د لا$

(۵۲) ۶ و ڈو = ا ∫ و$^{۲}$ ڈو فرلا + ب جہاں و = $\frac{ق}{ف}$ اور ط = ∫ و فرلا

(۵۳) ف. ن مم (ن لا + ا) + ق = ن$^{۲}$

(۵۴) ما (ا - لا) = ا (۳ - ۲ لا) قو$^{۲لا}$ + ب (ا - ۲ لا) قو$^{-۲لا}$

(۵۶) لا$^{۳}$ + مای = ج (ما + ی)

(۵۷) ما = ا قو$^{-۲لا}$ + قو$^{لا}$ (ب جم لا √۳ + ج جب لا √۳)

+ $\frac{۳}{۸}$ لا$^{۲}$ + $\frac{۱}{۲۴۶۴۹}$ قو$^{-۲لا}$ {۱۵۷ لا (۶ جم لا + ۱۱ جب لا)
+ ۳ (۳۸۳ جم لا - ۵۶ جب لا) }

(۵۸) ما = (۳ + ۴ لا$^{۲}$) {ا + ب ∫ (۳ + ۴ لا$^{۲}$)$^{-۲}$ قو$^{-\frac{۲}{۳} لا^{۲}}$ فرلا}

(۵۹) ی$^{۲}$ (لا + ما)$^{۲}$ (لا$^{۲}$ + ما$^{۲}$ + ی$^{۲}$) = ج (لا$^{۲}$ + ما$^{۲}$ - ی$^{۲}$)$^{۲}$

(۶۰) لای = ج (ما + ی)

(۶۲) (آ) رکھو ما = - $\frac{۱}{۶ ا_{۲} (لا)}$ $\frac{فر۶}{فرلا}$

(ب) ما - $\frac{۱}{۲}$ = $\frac{لا (ج + مس لا)}{ا - ج مس لا}$ (طریقہ کیلئے دیکھو مثال ۴)

(۶۵) اگر ایک ذرہ ف اِس طرح حرکت کرے کہ اِس کی رفتار سمتی نیم قطر و ف کے متناسب ہو اور و ف پر اور نیز ایک ثابت خط و ک پر عمود ہو تو وہ مستقل رفتار کے ساتھ ایک دائرہ مرتسم کرے گا جس کا محور و ک ہوگا۔

(۶۷) ر$^{۲}$ جب ۲ (طہ + عہ) = ا، نادر حل ر$^{۴}$ = ا

(۶۸) ما^۲ − لا^۲ = ج لا + ۲ ا^۲ ± ا √(۴ ا^۲ − ج^۲)، نادر حل ما^۲ − لا^۲ = ± ۲ ا ما

(۷۰) ۴ ا (ما − ج) = (لا − ج)^۲، نادر حل ما = لا − ا

(۷۱) لا + ا = ج جم فہ + ج لوک سس ½ فہ

(۷۲) ا جم ط + ب جم طَ = ک

(۷۴) ۲ ج ما = (لا + ج)^۲، نادر حل ما (ما − ۲ لا) = ۰

(۷۵) لا + ع ما + ا ع^۲ = ۰، (ما + ا ع) √(ع^۲ + ۱) = ج + ا جنز^{-۱} ع،

لا √(ع^۲ + ۱) + ع (ج + ا جنز^{-۱} ع) = ۰

کوئی نادر حل نہیں ہے۔ ع ممیز ما^۲ = ۴ ا لا سے دریچوں کا قرن طریق تعبیر ہوتا ہے۔

(۷۷) ما = ا لا، ی = ب + √(لا^۲ + ما^۲)، ی = √(لا^۲ + ما^۲) + ف (ما/لا)

ذیلی تکملوں سے محوری میں سے گذرتے ہوئے مستویوں کا ایک قبیل اور قائم مستدیر مخروطوں کا ایک قبیل جن کا محور محوری ہے تعبیر ہوتے ہیں۔ عام تکملہ سے سطحوں کا ایک قبیل تعبیر ہوتا ہے جن میں سے ہر ایک میں خطوطِ مستقیم کے اُن زوجوں کی لامتناہی تعداد ہوتی ہے جن میں مستوی اور مخروط منقطع ہوتے ہیں۔

(۷۸) لا^۲ + ما^۲ + ی^۲ = ف {لا^۲ + ما^۲ + (لا + ما)^۲}،

لا² + ما² + ی² = ج² ، ی² = لا ما + ج

(۷۹) (۲ لا − ما)⁴ = ج⁵ ی (لا + ۲ ما)

(۸۰) $\frac{\text{ک ز − ب ما}}{\text{ی + ج}}$ = ف ( $\frac{\text{ا لا + ب ما}}{\text{ی − ج}}$ )

XXII

(۸۱) (۱) ب = $\frac{\text{ع}}{\text{ر}}$ + ا قو^{− ر ت / ل}

(۲) ا = ب − $\frac{\text{ع}}{\text{ر}}$ (۳) ب = $\frac{\text{ع}}{\text{ر}}$

(۸۲) ب = ک جم (ع ت − صہ) + ا قو^{− ر ت / ل} جہاں ک

= $\frac{\text{ع}}{\sqrt{\text{ر² + ل² ع²}}}$ ، مس صہ = $\frac{\text{ل ع}}{\text{ر}}$ ، اور ا اختیاری ہے۔

(۸۳) ق = ک جب (ع ت − صہ) جہاں مس صہ

= (ج ل ع² − ۱) \ ع ج ر اور

ک = $\frac{\text{ع ج}}{\sqrt{\text{(ج ل ع² − ۱)² + ع² ج² ر²}}}$

(۸۵) لا = ا جم (ت − ۶) + ب جم (۳ ت − بہ)،
ما = ۲ ا جم (ت − عہ) − ۵ ب جم (۳ ت − بہ)

(۸۶) ک اور ب، مساوات ک² (ل ن − م²) + ک (ر ن

+ ل س) + ر س = ۰ کی اصلیں ہیں۔

(۹۱) لا = ا جم (ع ت − ع) + ب جم (ق ت − ب)،

ا = ا جب (ع ت − ع) − ب جب (ق ت − ب)

جہاں ۲ ع = √(۴ ج² + ک²) + ک، ۲ ق = √(۴ ج² + ک²) − ک

(۹۲) فر²ی / فرت² + (ا + ب) فری / فرت + ا ب ی = ا ب ج

(۹۳) ع = √(ن² − ۲ م²) سے خاص تکملہ کا حیطہ اعظم ہوتا ہے بشرطیکہ ۲ م² ≯ ن²

(۹۴) لا = ا و^(−ک ت) جم (ع ت − ص) جہاں ع = √(ن² − ک²)

(۹۷) ف = ½ و ا³ ر² جم ط

(۹۸) ما جب ع ب / ج = ا جب (ع لا / ج) جم (ع ت + ا)

(۱۰۰) ف = ج جمز م (ما + ص) جم (م لا − ن ت)

(۱۱۵) (۴) ع_لا = ا (−۲)^لا + ب (−½)^لا

(۸) ع_لا = ۲^لا (ع جم π لا / ۳ + ق جب π لا / ۳)

(۱۰) ع_لا = ا (−۹)^لا + ب + ۲^لا / ۱۱

(۱۱۹) ع = ک / م جم م لا / ج جب م ت

(۱۲۰) ی = و^(−ما) جب لا

# جوابوں کی متبادل شکلوں پر نوٹ

بعض مثالوں میں حل کے طریقہ کو ذرا سا بدل لینے سے کامل ابتدائی کی مختلف شکل حاصل ہو سکتی ہے۔ مثلاً دفعہ ۲ کی مثال ۲ میں جواب ا ر ما = جم (ا لا + ب) ہے لیکن طالب علم جواب ا ر ما = جب (ا لا + ب) یا ا ر ما = جبز (ا لا + ب) بھی بہ آسانی حاصل کر سکتا ہے۔ اگر پہلی شکل میں ب کی بجائے (ب - $\frac{1}{2}$ ٦) کو رکھا جائے تو جواب کی دوسری شکل حاصل ہوتی ہے اور اگر اس دوسری شکل میں ا اور ب کی بجائے علی الترتیب ا خ اور ب خ کو رکھا جائے تو خ سے تقسیم کرنے پر جواب کی تیسری شکل حاصل ہوتی ہے۔ دیگر شکلیں ا کی بجائے $\frac{1}{ا}$ رکھ کر حاصل کیجا سکتی ہیں۔

دفعہ ۱۱۶ کی مثال ۴ کے جواب میں ج$^2$ کی بجائے -ج$^2$ یا ج یا -ج کو رکھا جا سکتا ہے۔ عام طور پر اختیاری مستقل کے متعلق یہ فرض کیا جاتا ہے کہ وہ تمام قیمتیں حقیقی یا خیالی بالمتف اختیار کرتا ہے اور اس کی بجائے ایک نئے اختیاری مستقل کے کسی تفاعل کو رکھا جا سکتا ہے۔

جہاں تکملوں کے زوج مطلوب ہوں فطرتاً اکثر متبادل زوج حاصل ہوتے ہیں۔ مثلاً دفعہ ۱۱۳ کی مثالوں ۵ اور ۶ کے جوابوں کی بجائے علی الترتیب

$$\text{ما - ی = ا (ما - لا)}^{2} \text{ (ما - ی)}^{2} \text{ (لا + ما + ی) = ب}$$

اور $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + \text{ی}^2 = \text{ا}$، $\text{لا}^2 + ۲\,\text{ما}^2 - ۲\,\text{ما ی} = \text{ب}$

کو رکھا جا سکتا ہے ۔ مثالوں کے اِس جٹ میں زوجوں ع = ا، و
= ب کی بجائے ف (ع، و) = ا، فا (ع، و) = ب کو رکھا
جا سکتا ہے جہاں ف اور فا، ع اور و کے کوئی دو غیر تابع تفاعل
ہیں ۔

جزئی تفرقی مساواتوں کی متعدد مثالوں میں متبادل جواب
حاصل ہو سکتے ہیں مثلاً دفعہ ۲۴ کی مثال ۳ کا جواب $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}}$ جب ع
$= \frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}}$ جم ع اور دفعہ ۱۳۹ کی مثال ۲ کا جواب $\text{ی}^2 (\text{ا} - \text{ما}^2)$
$= (\text{لا} + \text{ب})^2$ حاصل ہو سکتا ہے ۔ (ملاحظہ ہو نوٹ صفحہ ۳۴۱)

نوٹ ۔ طالب علم کو یہ یاد رکھنا چاہئے کہ کامل ابتدائی کو حقیقت میں کامل
بنانے کے لیے ہمیں اُن انتہائی شکلوں کا لحاظ رکھنا چاہئے جو اختیاری
مستقلوں کو لامتناہی بنانے سے حاصل ہوتی ہیں ۔ چنانچہ دفعہ ۱۴
مثال ۴ میں کامل ابتدائی لا − ما + ج = لوک (لا + ما) ہے ۔
اب ج کو $-\infty$ لینے سے حل لا + ما = ۰ حاصل ہوتا ہے ۔
اسی طرح دفعہ ۷۰ مثال ۱ میں کامل ابتدائی لا = ا + ما +
ب لوک (ما − ب) ہے ۔ یہاں $\frac{\text{ا}}{\text{ب}} = +\infty$ لینے سے حل ما
= ب حاصل ہوتا ہے ۔ ایسے حلوں اور اِن کی ہندسی تعبیروں
پر میں نے تفصیل کے ساتھ اپنے مقالہ

***The incompleteness of Complete Primitives of Differential Equations***

(مطبوعہ میتھمیاٹیکل گزٹ سنہ ۱۹۳۹ء) میں بحث کی ہے ۔ نیز اِس

مقالہ میں کل تفرقی مساوات

ف فرلا + ق فرما + ر فری = ۰

کے نادر حلوں سے متعلق بعض نئے نتیجے بیان کئے گئے ہیں ۔

تمت

# اشاریہ

# تفرقی مساواتیں

# اغلاط نامہ

## تفرقی مساواتیں

| صفحہ | سطر | غلط | صحیح | صفحہ | سطر | غلط | صحیح |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ۳۵ | ۲ | تو‑۱۱ | و‑۱ | ۱۴۰ | شکل | tac-locus | تماس |
| ۳۷ | ۱۷ | نظام | تبیل | ۱۴۱ | ۱۱سطر | 〃 | 〃 |
| ۴۵ | ۶ | نہوتی | ہوتی | ۱۴۳ | ۱۹ | 〃 | 〃 |
| ۵۶ | ۱ | قو^لا | و^لا | ۱۸۵ | فٹ نوٹ سطر۱ | فروفیسر | پروفیسر |
| ۸۸ | ۱ | اختیاری | اختیاری | | | | |
| ۹۱ | ۱۳ | ۲ و / سہ ھ | ۲ و / سہ ھ | ۱۹۱ | شکل | ٧ | لا |
| ۱۰۹ | ۱۴ | و‑۳^۲ | و‑۳^۱ | 〃 | فٹ نوٹ سطر۱ | (لا^۱) | (لا، ۱) |
| ۱۱۳ | ۱۸ | طول | طول میں | ۱۹۳ | ۴سطر | جب | جب' |
| ۱۳۷ | ۴و۶ و۷و۱۰ و۱۱ | tac-locus | تماس | ۱۹۶ | ۲تا۳ | | پہلی رقم سے پہلا تقرب تقسیم ہوتا ہے، یہ تقرب دفعہ ۵۵ میں زیر بحث آچکا تھا اور اس کو رد کر دیا جاچکا تھا۔ |
| ۱۳۸ | ۵ | 〃 | 〃 | | | | |
| ۱۳۹ | ۱۲ | 〃 | 〃 | | | | |
| ۱۴۰ | ۱۳ | 〃 | 〃 | | | | |

| صفحہ | سطر | غلط | صحیح |
| --- | --- | --- | --- |
| ۱۹۷ | ۱۷ | جہاں گ = صرف ا | ٠ |
| ۱۹۹ | ۴ | لا = | لا = ٠ |
| ۲۰۳ | ۹ | ٠ = ٠، ۴، ٠ | x = ۴، ٠ |
| ۲۱۲ | ۳ | پ | ع |
| ۲۱۶ | ۱۱ | تفرتی | تفرقی |
| " | فٹ نوٹ سطر ۲ | تغیبر | تعبیر |
| ۲۲۰ | ۶ | یہ ن | ن |
| " | ۱۱ | ج + ۲ ن ۳ | ج + ۲ ن - ۲ |
| ۲۲۶ | ۱۳ | کے | کے، |
| ۲۳۵ | ۳ | حل | مساوات |
| ۲۳۶ | ۸ | موورسری | دوسری |
| ۲۳۷ | ۱۶ | قوت نما | قوت نمائی |
| ۲۴۹ | ۱۹ | ر / ن - ۱ | ا / ن - ۱ |
| ۲۶۰ | ۱۲ | باقاعدہ | باقاعدہ[1] |
| " | فٹ نوٹ سطر | Index | Index: 1 |
| ۲۶۹ | سطر ۱۰ | ۲ | ۲ |
| ۲۷۹ | ۹ و ۱۵ و ۱۶ | جف فا | جف فا |
| ۲۷۹ | ۱۰ | فرنی | فری |
| ۲۸۴ | ۱۴ | ناتکمیل پذیر | ناتکمل پذیر |

| صفحہ | سطر | غلط | صحیح |
| --- | --- | --- | --- |
| ۲۹۷ | ۱۰ | رم | رقم |
| ۳۲۵ | ۱۲ | کو استحالہ | کو استحالہ لا = ٧ |
| ۳۳۰ | ۱۵ | - ر۲ / ۲ | - ر۲ / ۲ |
| ۳۵۵ | ۵ | حطی | خطی |
| ۳۵۷ | ۷ | دس | اس |
| ۳۶۵ | فٹ نوٹ سطر ۲،۱ | اندرومیری امپیرلیون | انڈرومیری امپیر (لیوس) |
| ۳۷۰ | سطر ۱۷ | کرتے نے | کرنے |
| " | ۲۴ | (- ۱ ا | (- ۲ ا |
| ۳۷۵ | ۹ | تکمل پذیرا | تکمل پذیر |
| " | ۲۰ | تراسغف | تراش |
| ۳۹۰ | ۱ | تقاعل | تفاعل |
| ۳۹۴ | ۲ | برنقطہ | ہرنقطہ |
| ۴۵۵ | ۶ | جفب ف / جف لا | جفب ف / جفب لا |
| ۵۰۰ | ۱۵ | موجگی | موجودگی |
| ۵۲۱ | ۱۴ | + ر / ر - ۱ | + ا / ر - ۱ |
| ۵۲۲ | ۸ | ۲ (لا + ر)۲ | ۲ (لا + ر)۳/۲ |
| " | ۱۷ | لا = ٠ | لا = ١ |